

**ZADANIA KONTROLNE Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW**  
**Stan naprężenia, odkształcenia, równania Hooke'a**

1. Wyznaczyć naprężenia główne i macierz przejścia do kierunków głównych dla tensora naprężenia

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Narysować obraz macierzy naprężeń w układzie wyjściowym i w ukł. osi głównych.

2. Dla tensorów naprężenia  $\mathbf{T}_\sigma$  wyznaczyć :

- a) naprężenia i kierunki główne
- b) wektory naprężenia  $\bar{p}_v$
- c) wektory naprężenia normalnego  $\bar{\sigma}_n$
- d) wektory naprężenia stycznego  $\bar{\tau}$

odpowiadające płaszczyznom o wektorach normalnych  $\bar{n}$ .

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ & 5 & 0 \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n}(1, -2, 3)$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n}(-1, 0)$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n}(1, 0, 2)$$

3. Dla tensora naprężenia  $\mathbf{T}_\sigma$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć :

- a) długość wektora napr. normalnego  $\bar{\sigma}_n$  w pkt. A na płaszczyźnie o wektorze normalnym  $\bar{v}(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$
- b) wektory naprężeń stycznych leżące w płaszczyźnie jak w pkt. a) i równoległe do wektorów  $\bar{v}'(1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$  i  $\bar{v}''(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

4. Sprawdzić, czy poniższe związki mogą opisywać stan naprężenia (siły masowe pominać)

a)  $\sigma_x = 5y^2 - 4$

$\sigma_y = -4y$

$\tau_{xy} = 4x + 7$

b)  $\sigma_{11} = 6x_3 + x_2$

$\sigma_{22} = 4x_1x_2$

$\sigma_{33} = 5$

$\sigma_{12} = -12$

$\sigma_{13} = 7x_2x_3 + x_1$

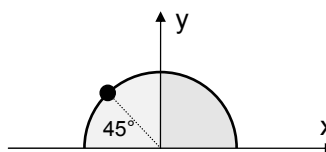
$\sigma_{23} = -7x_1^2 + x_2$

5. W punkcie  $A(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$  wektor sił masowych ma współrzędne  $\bar{P}(0; 10)$ , a wektor obciążenia powierzchniowego  $\bar{q}(5; -1)$ . Sprawdzić czy dane poniżej związki opisują stan naprężenia w tym punkcie

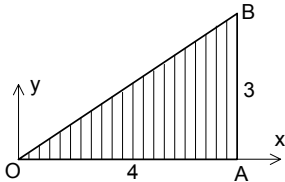
$\sigma_x = \sqrt{2}x^2 + 5y$

$\sigma_y = 10y - x$

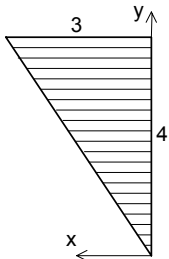
$\tau_{xy} = 5\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}y^2$



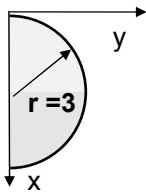
6. Odtworzyć obciążenie tarczy trójkątnej, w której stan naprężenia określony jest podanymi związkami. Sprawdzić globalną równowagę tarczy.



$$\begin{aligned}\sigma_x &= 4x \\ \tau_{xy} &= -3y \\ \sigma_y &= 2xy\end{aligned}$$



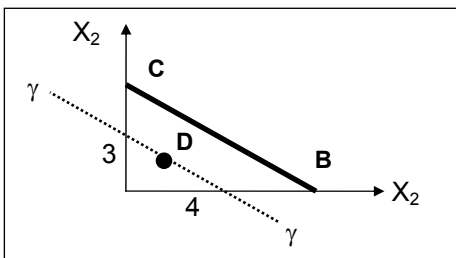
$$\begin{aligned}\sigma_x &= 3y + 1 \\ \tau_{xy} &= -5y \\ \sigma_y &= 3x - y\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2x \\ \tau_{xy} &= -3 \\ \sigma_y &= y\end{aligned}$$

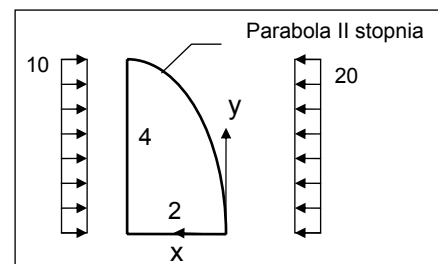
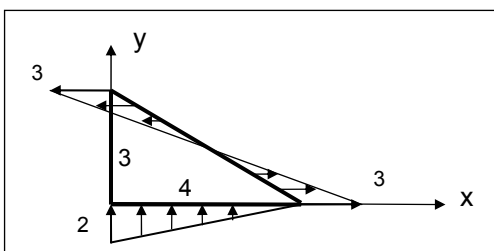
7. Dla danych poniżej funkcji :

- dobrać stałe  $\alpha$  i  $\beta$  tak, aby funkcje te przedstawiały rzeczywiste pole naprężeń przy zerowych siłach masowych
- odtworzyć obciążenie brzegu BC
- wyznaczyć wektory: naprężenia  $\bar{p}_v$ , naprężenia normalnego  $\bar{\sigma}_n$  i stycznego  $\bar{\tau}$  odpowiadające przekrojowi tarczy płaszczyzną  $\gamma - \gamma$  równoległą do krawędzi BC, w punkcie D(1, 1)



$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 3\alpha x_1 \\ \sigma_{22} &= \beta x_1 x_2 \\ \sigma_{12} &= 2x_2 + x_1^2\end{aligned}$$

8. Zapisać statyczne warunki brzegowe dla tarcz



9. Sprawdzić, czy stan odkształcenia mogą opisywać następujące równania:

- $$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= k x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) & \epsilon_{22} &= k x_3^2 & \epsilon_{12} &= k x_1 x_2 & \epsilon_{13} &= \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= 4 (x_1^2 + x_2^2) & \epsilon_{22} &= k x_3^2 & \epsilon_{12} &= 5 x_1 x_2 & \epsilon_{13} &= \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0\end{aligned}$$

10. Jaki warunek musi spełniać funkcja  $\varphi(x_1, x_2)$ , aby poniższe równania mogły opisywać stan odkształcenia

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad \varepsilon_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

11. Dla danych funkcji przemieszczeń obliczyć naprężenia główne w punkcie A (1, -1, 0):

$$u_1 = 4x_1^2 - x_1 x_2 \quad u_2 = -3x_1 + x_2^2 \quad u_3 = 0$$

12. Dla danych funkcji przemieszczeń określić:

$$u_1 = 2x_1^2 + 3x_2 - 2x_3 \quad u_2 = x_2^2 - 3x_3 \quad u_3 = -x_3^2 + 2x_1 + 3x_2$$

- tensor naprężenia w punkcie A (1, 3, 5)
- naprężenia główne w punkcie A
- siły masowe
- składowe wektora naprężenia na płaszczyz. o równaniu  $x_3 = -5$ , w pkt. B (-8, 1, -5)

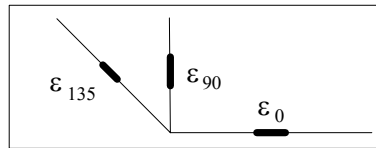
13. Pole przemieszczeń opisują następujące funkcje :

$$a) \quad u = \frac{1}{E} (2\nu x + 5y^2 + 5\nu y^2) \quad v = -\frac{1}{E} 2\nu y \quad w = \frac{1}{E} (2z + 6y + 6\nu y)$$

$$b) \quad u_1 = 4x_1^2 x_3 \quad u_2 = x_2^2 + x_1 x_3 \quad u_3 = -x_1 + 4x_3^2$$

Znaleźć tensor naprężenia i wektor sił masowych w punkcie A (0, 1, 1).

14. W pkt. A ciała, w którym panuje płaski stan naprężenia, określono przy pomocy tensometrów odkształcenia w trzech kierunkach pokazanych na rysunku. Obliczyć odkształcenia i naprężenia główne w tym punkcie.



$$\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-3} \quad \varepsilon_{90} = 5 \times 10^{-4} \quad \varepsilon_{135} = 2 \times 10^{-4} \quad E = 200 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3$$

Janusz German