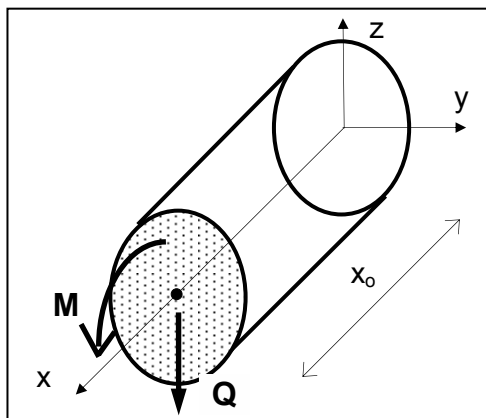
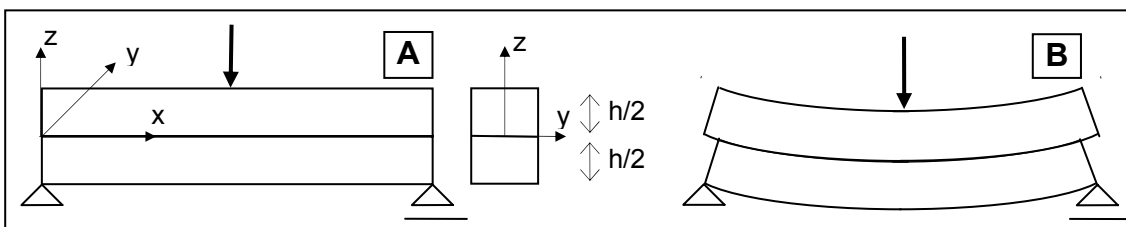


1. ZGINANIE POPRZECZNE - SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

DEFINICJA: Każdy przypadek takiego obciążenia pręta, które redukuje się w środku ciężkości przekroju poprzecznego do momentu M leżącego w płaszczyźnie (x,z) i siły poprzecznej Q określa się jako **zginanie poprzeczne**.



1.1. Obserwacje doświadczalne

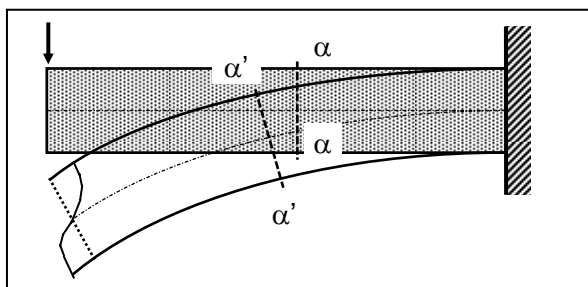


* założmy, że dwie belki o przekroju prostokątnym leżą swobodnie na sobie i między powierzchniami kontaktu nie występuje tarcie. Każda z nich może się odkształcać niezależnie od drugiej i w wyniku zginania przyjmą one położenie, jak na rys. B. Wyobraźmy sobie teraz, że mamy belkę litą o przekroju $b \times h$. Wzdłuż płaszczyzny obojętnej (jej śladem jest oś belki) muszą wystąpić naprężenia styczne τ_{zx} , „blokujące” możliwość poślizgu. Muszą one mieć swojego „odpowiednika” w płaszczyźnie przekroju, którym są naprężenia τ_{xz} . W przekroju innym niż prostokątny mogą wystąpić również naprężenia τ_{xy} . Zginanie belki skutkuje także powstaniem naprężenia normalnego σ_x . Pozostałe składowe tensora naprężenia są tak małe (jeżeli nie zerowe), że można je pominąć.

2. NAPRĘŻENIE NORMALNE

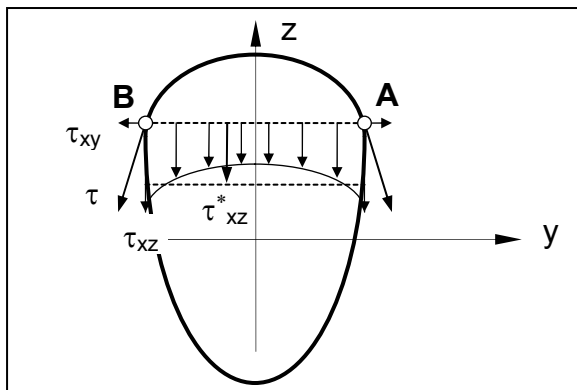
2.1. Hipoteza płaskich przekrojów (hipoteza Bernouli'ego)

* przekrój poprzeczny pręta, płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem, pozostaje w wyniku deformacji nadal płaski i prostopadły do ugiętej osi pręta (w rzeczywistości - wskutek występowania naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym pręta i wywołanych nimi odkształceń kątowych przekrój ulega pewnej deplanacji, ale jej wpływ na wielkość naprężeń normalnych jest pomijalnie mały)



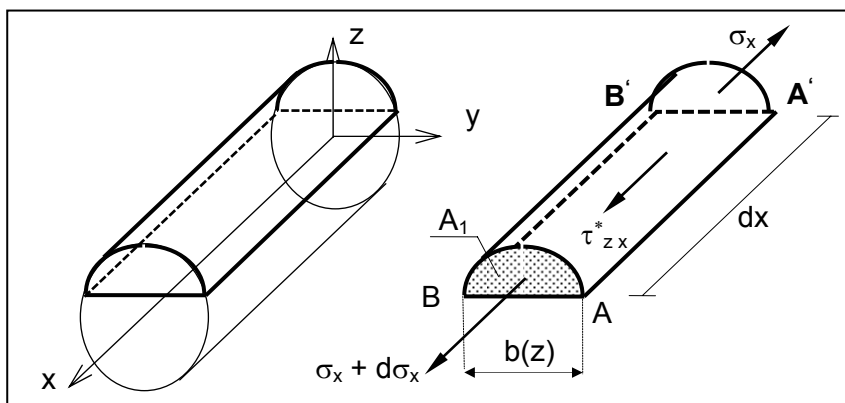
$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I_y} z$$

3. NAPRĘŻENIA STYCZNE



Założenie : zamiast rzeczywistego rozkładu naprężenia τ_{xz} przyjmuje się uśredniony rozkład o stałej wartości τ_{xz}^*

3.1. Uśrednione naprężenie styczne τ_{xz}



* warunek równowagi sił

$$\iint_{A_1} (\sigma_x + d\sigma_x) dA - \iint_{A_1} \sigma_x dA + \tau_{zx}^* b(z) dx = 0$$

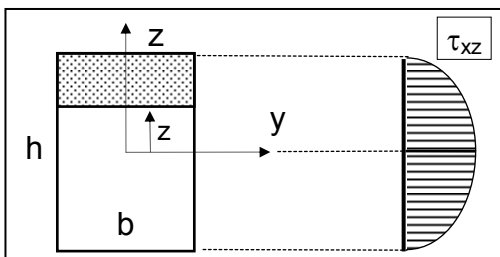
$$\iint_{A_1} d\sigma_x dA = -\tau_{zx}^* b(z) dx \quad ; \quad d\sigma_x = \frac{dM(x)}{I_y} z$$

$$\frac{dM(x)}{I_y} \iint_{A_1} z dA = -\tau_{zx}^* b(z) dx \quad \Rightarrow \quad \tau_{zx}^* = -\frac{dM(x)}{dx} \frac{1}{I_y} \frac{1}{b(z)} S_y(z)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^* = \frac{Q(x) S_y^1(z)}{I_y b(z)}$$

4. PRZYKŁADY

4.1. Przekrój prostokątny

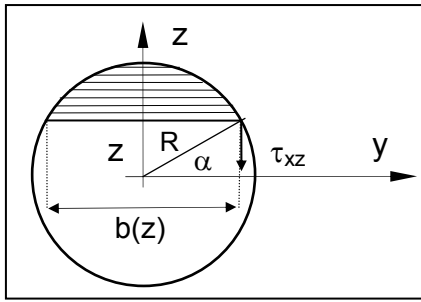


$$S_y(z) = b \times \left(\frac{h}{2} - z\right) \times \left(z + \frac{h/2 - z}{2}\right) = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q b \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) / 2}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{3Q}{2A} \left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)$$

$$\tau_{xz}^{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \quad \text{dla } z = 0$$

4.2. Przekrój kołowy

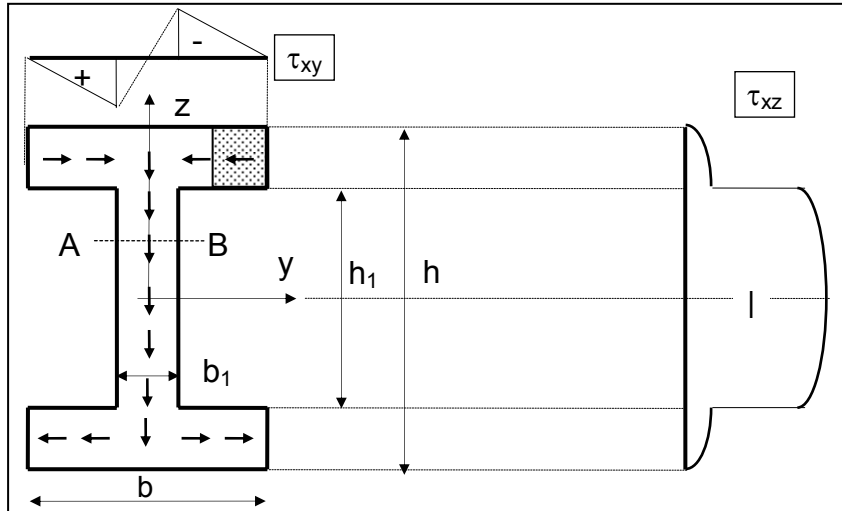


$$S_y(z) = \frac{2}{3} R^3 \cos^3 \alpha \quad I_y = \frac{\pi R^4}{4} \quad b(z) = 2 R \cos \alpha$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q(x) S_y^1(z)}{I_y b(z)} = \frac{4Q}{3A} (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{4Q}{3A} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)$$

$$\tau_{xz}^{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A} \quad \text{dla } z = 0$$

4.3. Przekrój dwuteowy



* **środek** $-h_1/2 \leq z \leq h_1/2$

$$S_y^1(z) = S_y^{A-B}(z) = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} \right) + b_1 \left(\frac{h_1}{2} - z \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{2} + z \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - z^2 \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q(x)}{I_y b_1} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - z^2 \right) \right]$$

* **stopka** $h_1/2 \leq |z| \leq h/2$

$$S_y^1(z) = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \frac{1}{2} \left(z + \frac{h}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \frac{Q(x)}{I_y} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]$$

$$S_y(y) = \left(\frac{b}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right) \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{Q(x)}{I_y} \frac{S_y(y)}{\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right)} = - \frac{Q(x)}{I_y} \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} \right)$$

* **moment bezwładności**

$$I_y = \frac{b h^3}{12} - 2 \frac{\left(\frac{b-b_1}{2} \right) h_1^3}{12} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{b}{12} (h^3 - h_1^3)$$

* **udział środka w przenoszeniu siły poprzecznej**

$$Q_s = \iint_{A_s} \tau_{xz} dA = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} dy \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_{xz} dz = 4 \int_0^{b_1/2} dy \int_0^{h_1/2} \tau_{xz} dz$$

$$Q_s = 4 \frac{Q(x)}{I_y b_1} \int_0^{b_1/2} dy \int_0^{h_1/2} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - z^2 \right) \right] dz$$

$$Q_s = \frac{Q(x)}{I_y} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) h_1 + \frac{b_1 h_1^3}{12} \right]$$

$$Q_s = \frac{\frac{b}{8} (h^2 - h_1^2) h_1 + \frac{b_1 h_1^3}{12}}{\frac{b}{12} (h^3 - h_1^3) + \frac{b_1 h_1^3}{12}} Q(x)$$

* udział pól w przenoszeniu momentu zginającego

$$M_p = \iint_{A_p} \sigma_x z dA = \iint_{A_p} \frac{M}{I_y} z^2 dA = \frac{M}{I_y} I_y^{\text{półek}}$$

$$M_p = \frac{b (h^3 - h_1^3)}{b_1 h_1^3 + b (h^3 - h_1^3)} M$$

TYP	b [cm]	b ₁ [cm]	h [cm]	h ₁ [cm]	Q _s / Q	M _p / M
100	5.0	0.45	10	8.64	0.936	0.859
160	7.4	0.63	16	14.10	0.946	0.844
220	9.8	0.81	22	19.56	0.950	0.836
300	12.5	1.08	30	26.76	0.952	0.826
400	15.5	1.44	40	35.68	0.953	0.815

WNIOSEK: w przekroju dwuteowym środnik przenosi ok. 95% siły poprzecznej, zaś półki przenoszą powyżej 80% momentu zginającego.