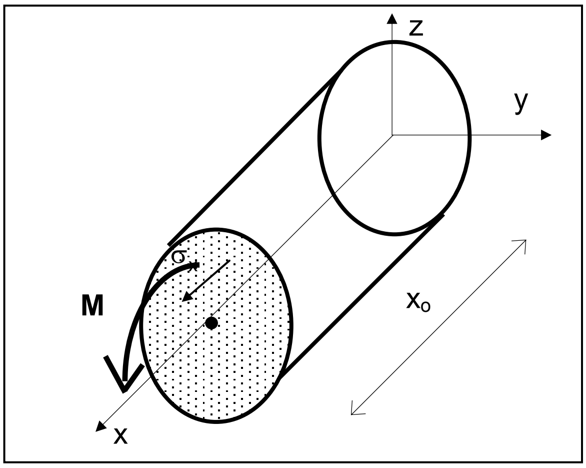
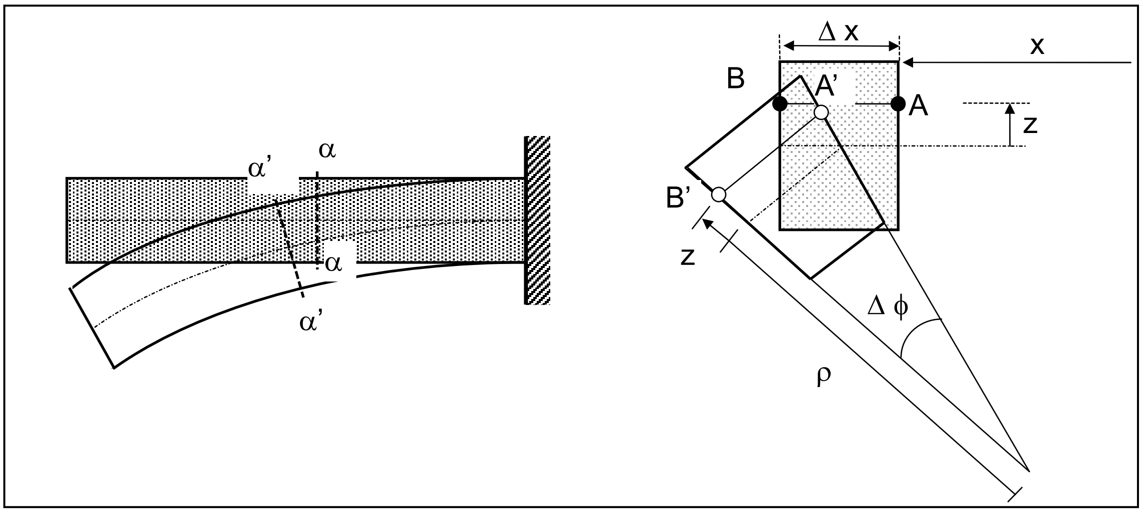
1. ZGINANIE PROSTE

DEFINICJA: Każdy przypadek takiego obciążenia pręta, które redukuje się w środku ciężkości przekroju poprzecznego do momentu leżącego w płaszczyźnie (x, z) określa się jako proste zginanie lub krótko **zginanie.**



1.1. Naprężenia normalne – wg. hipotezy płaskich przekrojów (hipotezy Bernouli'ego)

✶ przekrój poprzeczny pręta, płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem, pozostaje w wyniku deformacji nadal płaski i prostopadły do ugiętej osi pręta



$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{(\rho + z)\Delta\phi - \rho\,\Delta\phi}{\rho\,\Delta\phi} = \frac{z}{\rho(x)}$$

$$\text{zał.: } (\sigma_y \cong 0, \sigma_z \cong 0, \tau_{ij} = 0) \Rightarrow \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_x = E\,\frac{z}{\rho(x)}$$

$$M(x) = \iint_A \sigma_x\, z\, dA = \iint_A \frac{E}{\rho(x)}\, z^2 dA = \frac{E}{\rho(x)}\, I_y$$

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E\, I_y} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sigma_x = \frac{M(x)}{I_y}\, z}$$

1.2. Składowe macierzy naprężenia i odkształcenia oraz wektora przemieszczenia

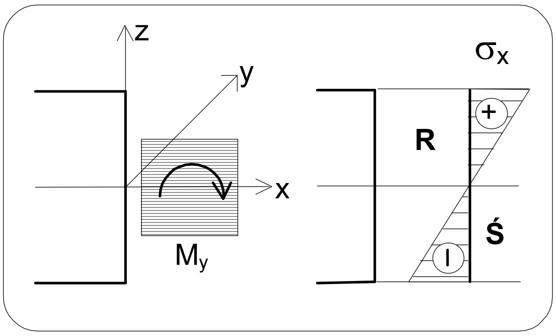
$$\boxed{\sigma_x = \pm \frac{M_y}{I_y} z} \qquad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}} \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

2. ANALIZA ROZWIĄZANIA

1. Stan naprężenia przy zginaniu to **jednoosiowy stan naprężenia** (tylko jeden element macierzy naprężenia jest niezerowy)**.** Naprężenie normalne zależy jedynie od zmiennej "z".
2. Diagonalna postać macierzy naprężenia świadczy o tym, że jedyne niezerowe naprężenie σ_x **jest maksymalnym naprężeniem normalnym** spośród wszystkich możliwych odpowiadających dowolnym płaszczyznom przekroju pręta.
3. Stan odkształcenia przy zginaniu to **trójosiowy stan odkształcenia** (niezerowe składowe w 3 wzajemnie prostopadłych kierunkach)**.**

3. ROZKŁAD NAPRĘŻENIA NORMALNEGO σ_x

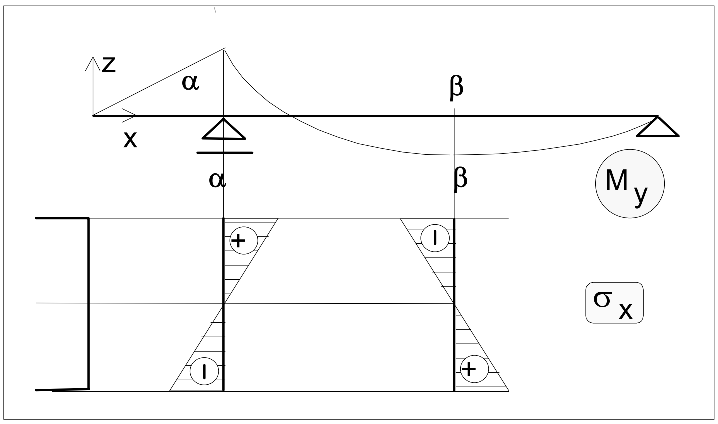


✶ **Zginanie w płaszczyźnie (x, z)**

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

włókna o dodatniej współrzędnej "z" (tzw. "górne włókna") są rozciągane. Zgodnie z przyjętą konwencją znakowania naprężeń - naprężeniu normalnemu rozciągającemu przypisuje się znak "plus". Stąd, naprężenia w górnych włóknach są dodatnie, a w równaniu określającym σ_x występuje znak "+" [dla "z+" musi być "σ_x+"]

3.1. Rozkład naprężenia w przekroju pręta



$$\sigma_x^{\alpha-\alpha} = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_x^{\beta-\beta} = -\frac{M_y}{I_y} z$$

3.2. Naprężenie maksymalne

$$\left|\sigma_x^{max}\right| = \frac{M_y^{max}}{I_y}\max\left(h^g, h_d\right)$$

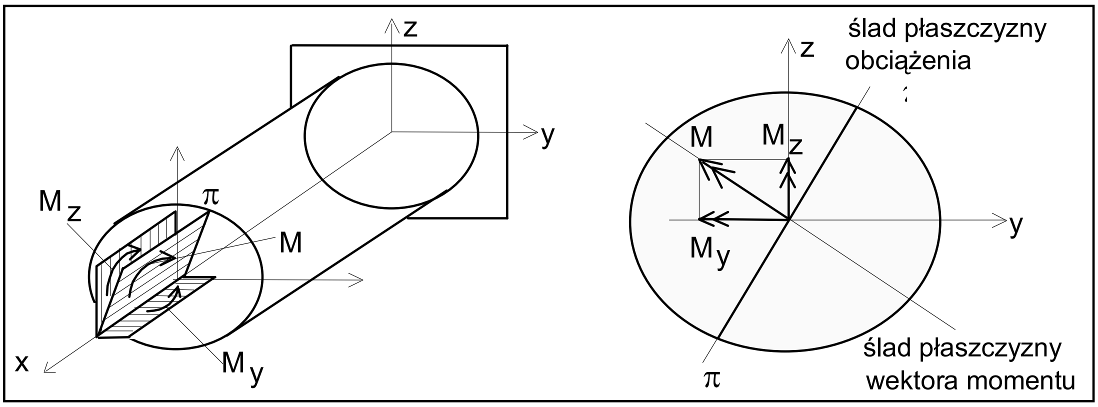
$$\left|\sigma_x^{max}\right| = \frac{M^{max}}{W^{min}} \qquad W^{min} = \frac{I_y}{\max\left(h^g, h_d\right)}$$

✶ **warunek wytrzymałościowy**

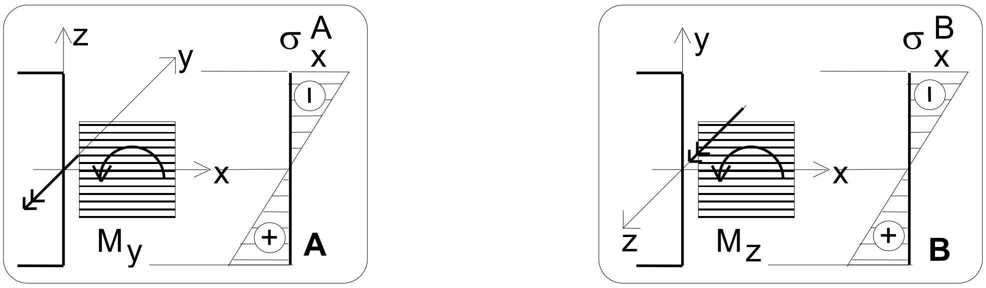
$$\boxed{\left|\sigma_x^{max}\right| = \frac{M^{max}}{W^{min}} \le R}$$

4. ZGINANIE UKOŚNE

Definicja: Zginanie ukośne to taki przypadek wytrzymałościowy, w którym obciążenie zewnętrzne redukuje się w przekroju poprzecznym pręta do pary sił (o momencie M) leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju, ale nie będącej żadną z płaszczyzn głównych bezwładności tzn. (x, y) lub (x, z).



4.1. Naprężenie normalne σ_x (zastosowanie zasady superpozycji)



✶ **Przypadek A - zginanie w płaszczyźnie (x, z)**

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} z$$

✶ **przypadek B - zginanie w płaszczyźnie (x, y)**

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

✶ **- zginanie w płaszczyźnie π**

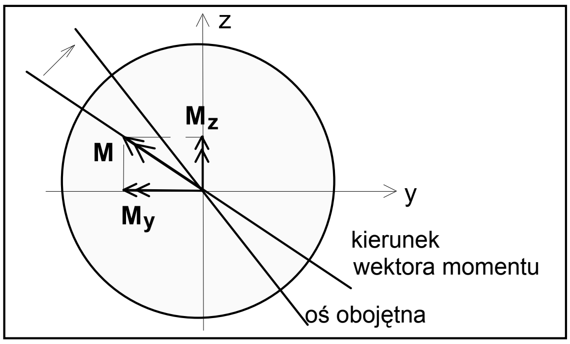
$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y}$$

4.2. Oś obojętna

Definicja: oś obojętna to zbiór punktów, w których naprężenie σ_x osiąga wartość zerową.

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0$$

$$z_o = -\frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y} y$$



✶ równanie śladu płaszczyzny wektora momentu (prosta działania wektora momentu)

$$z_M = -\operatorname{tg}\alpha\, y = -\frac{M_z}{M_y} y$$

✶ relacja między położeniem osi obojętnej i równaniem prostej działania wektora momentu

założenie: $I_y > I_z$

oś obojętna $\quad z_o = -A\,y \quad ; \quad A = \frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y}$

prosta wektora momentu $\quad z_M = -B\,y \quad ; \quad B = \frac{M_z}{M_y}$

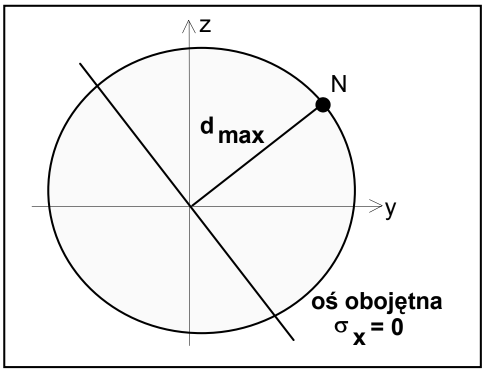
Wnioski (A > B):

1. oś obojętna odchyla się od kierunku wektora momentu zawsze w stronę tej osi bezwładności, względem której moment bezwładności jest mniejszy
2. oś obojętna pokrywa się z kierunkiem wektora momentu wtedy gdy $I_y = I_z$

4.3. Maksymalne naprężenie normalne

✶ **przekrój niebezpieczny** - przekrój poprzeczny pręta, w którym rozkład momentów M_y i M_z jest najbardziej niekorzystny z punktu widzenia wielkości naprężenia normalnego

✶ **punkt niebezpieczny** - punkt przekroju niebezpiecznego, w którym naprężenie normalne jest największe; jest to zarazem punkt położony najdalej od osi obojętnej



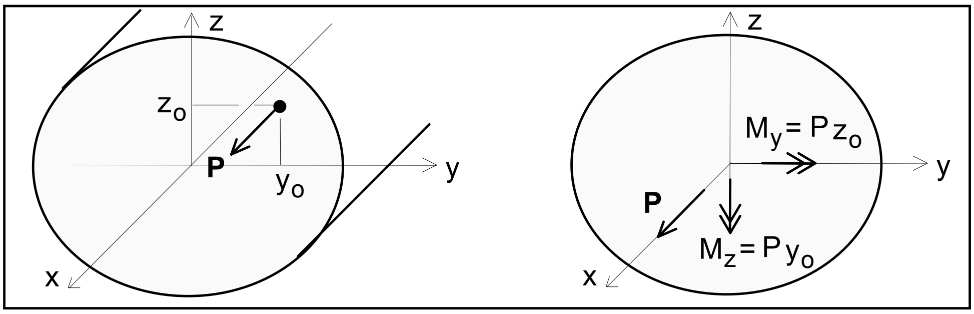
$$\boxed{\sigma_x^{max} = \pm \frac{M_y^{n-n}}{I_y} z^N \pm \frac{M_z^{n-n}}{I_z} y^N}$$

✶ **warunek wytrzymałościowy**

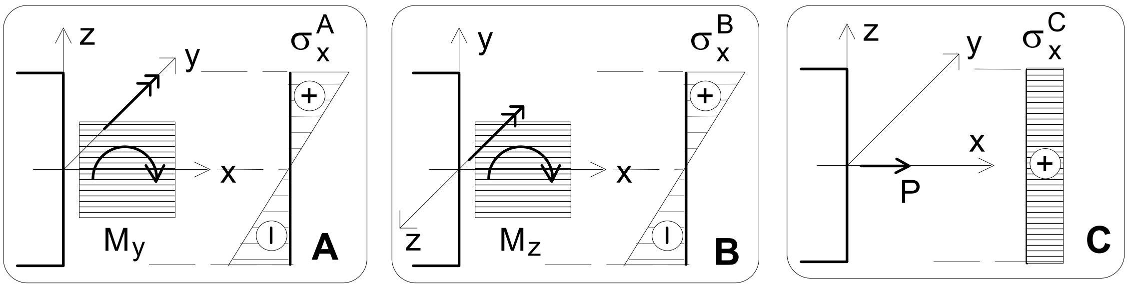
$$\boxed{\left|\sigma_x^{max}\right| \le R}$$

5. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA MIMOŚRODOWEGO ROZCIĄGANIA

Definicja: Mimośrodowe rozciąganie to przypadek wytrzymałościowy, w którym obciążenie zewnętrzne redukuje się w przekroju poprzecznym pręta do wypadkowej, prostopadłej do przekroju, zgodnie skierowanej z jego normalną zewnętrzną, ale nie leżącą na osi pręta



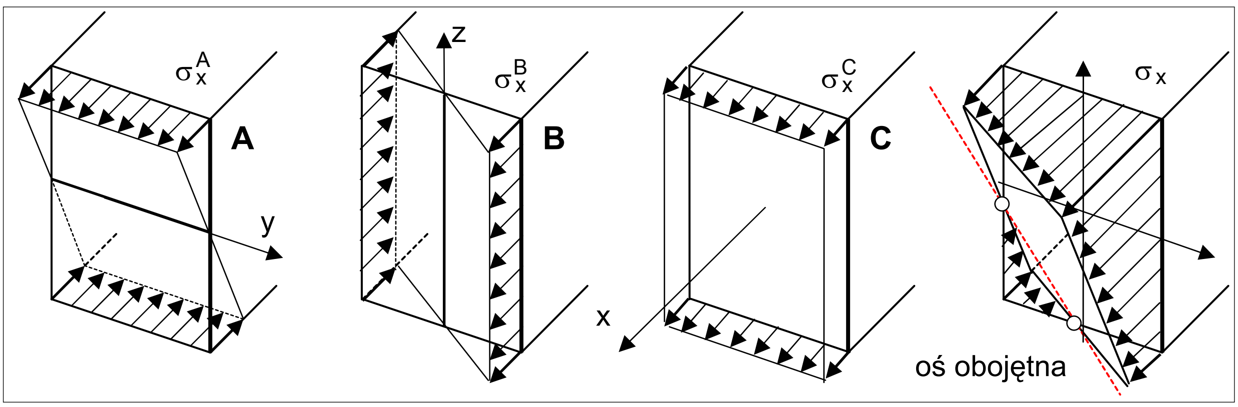
5.1. Naprężenie normalne σ_x (zastosowanie zasady superpozycji)



- przypadek A - **zginanie w płaszczyźnie (x, z)** $\sigma_x^A = \frac{M_y}{I_y} z$
- przypadek B - **zginanie w płaszczyźnie (x, y)** $\sigma_x^B = \frac{M_z}{I_z} y$
- przypadek C - **osiowe rozciąganie** $\sigma_x^C = \frac{P}{A}$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y}$$

5.2. Bryła naprężeń



5.3. Oś obojętna

Definicja: oś obojętna to zbiór punktów, w których naprężenie σ_x osiąga wartość zerową.

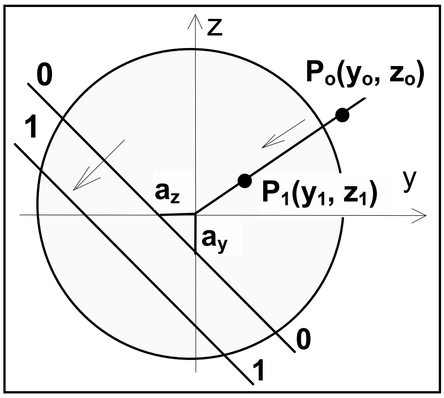
$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \qquad \Big| \times \frac{A}{P}$$

$$1 = \frac{z}{-I_y/Az_o} + \frac{y}{-I_z/Ay_o}$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

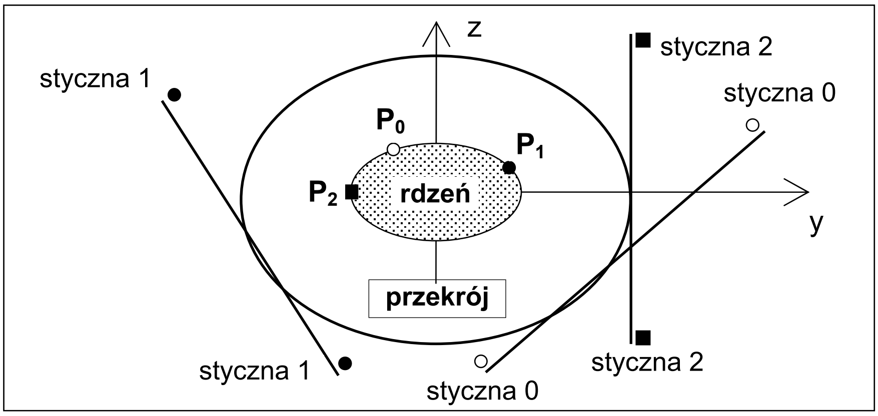
$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{y}{a_y} + \dfrac{z}{a_z} = 1 \\[2ex] a_y \overset{def}{=} -\dfrac{i_z^2}{y_o} \qquad a_z \overset{def}{=} -\dfrac{i_y^2}{z_o} \end{array}}$$

5.4. Własności osi obojętnej



- ✶ oś obojętna zawsze przechodzi przez "ćwiartkę" układu współrzędnych, przeciwną do tej, w której działa siła ($y_o,z_o > 0 \;\Rightarrow\; a_y,a_z < 0$)
- ✶ zbliżaniu się punktu przyłożenia siły do środka ciężkości przekroju odpowiada oddalanie się odpowiadającej mu osi obojętnej (zmniejszaniu się współrzędnych punktu przyłożenia siły y_o, z_o odpowiada wzrost wartości współczynników a_y i a_z , a to z kolei oznacza oddalanie się osi obojętnej od środka ciężkości przekroju). **Musi zatem istnieć takie położenie siły P, któremu będzie odpowiadać oś obojętna o położeniu stycznym do konturu przekroju.**

5.5. Rdzeń przekroju



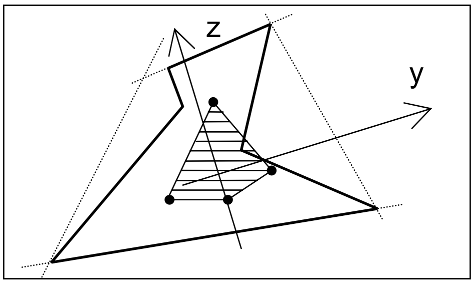
- ✶ Dowolnej osi obojętnej stycznej do konturu przekroju musi odpowiadać jeden punkt przyłożenia siły, któremu ta oś odpowiada (np. "styczna 1" odpowiada punktowi P_1). Kreśląc kolejne styczne uzyskuje się kolejne, odpowiadające im punkty przyłożenia sił P_i. Zbiór tych punktów tworzy kontur obszary nazywanego **rdzeniem przekroju.**
- ✶ Dowolnej osi obojętnej leżącej całkowicie poza obszarem przekroju (tzn. nie przecinającej go) musi odpowiadać punkt przyłożenia siły leżący w obszarze rdzenia.
- ✶ Położenie osi obojętnej styczne do konturu przekroju lub całkowicie poza jego obszarem oznacza, że naprężenia w całym przekroju muszą być tego samego znaku (skoro na osi obojętnej wynoszą one zero, to po jednej ze stron osi muszą być dodatnie, a po drugiej ujemne).

<u>**Definicja**</u> : **Rdzeń przekroju** to miejsce geometryczne położenia punktów, w których działająca siła powoduje powstanie w przekroju naprężeń jednakowego znaku.

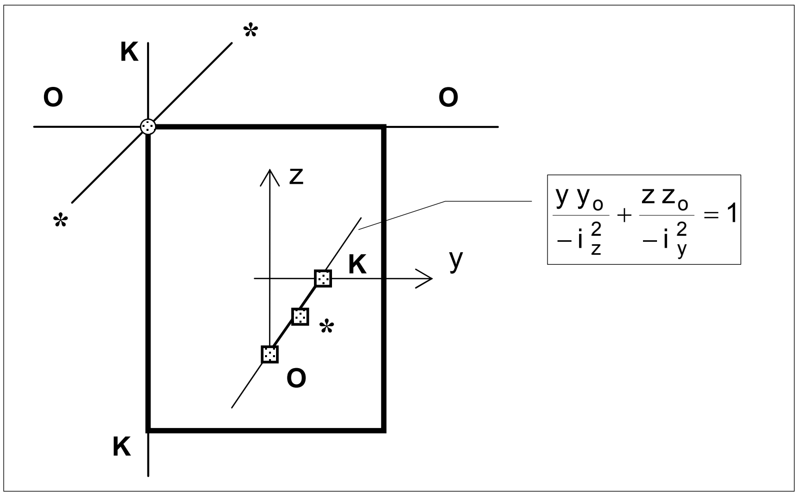
5.6. Własności rdzenia przekroju

✶ Rdzeń przekroju jest zawsze figurą wypukłą

✶ Rdzeń przekroju nie może wychodzić poza obrys przekroju, może natomiast wychodzić poza sam przekrój



✶ Obrotowi osi obojętnej wokół ustalonego punktu odpowiada przemieszczanie się punktu przyłożenia siły po prostej



$$\frac{y\,y_o}{-i_z^2}+\frac{z\,z_o}{-i_y^2}=1 \qquad (1)$$

y , z - współrzędne punktu na osi obojętnej

y_o , z_o - współrzędne punktu przyłożenia siły

Jeżeli y = const. oraz z = const. (ustalony jest punkt na osi, wokół którego zachodzi obrót osi) to równanie (1) ze względu na zmienne y_o i z_o jest również równaniem prostej.

5.7. Maksymalne naprężenie normalne

✶ **przekrój niebezpieczny** - przekrój poprzeczny pręta, w którym rozkład sił przekrojowych N, M_y i M_z jest najbardziej niekorzystny z punktu widzenia wielkości naprężenia normalnego

✶ **punkt niebezpieczny** - punkt przekroju niebezpiecznego, w którym naprężenie normalne jest największe; jest to zarazem punkt położony najdalej od osi obojętnej

$$\boxed{\sigma_x^{max}=\frac{N^{n-n}}{A}\pm\frac{M_y^{n-n}}{I_y}z^N\pm\frac{M_z^{n-n}}{I_z}y^N}$$

✶ **warunek wytrzymałościowy**

$$\boxed{\left|\sigma_x^{max}\right|\le R}$$