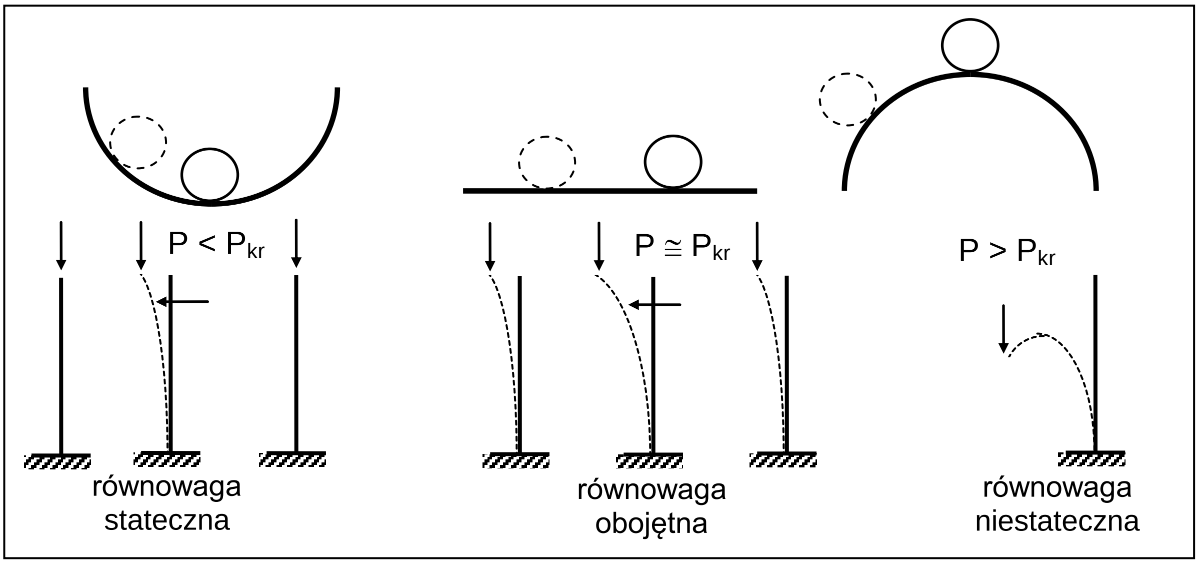
1. RÓWNOWAGA PRETA PRZY ŚCISKANIU



Tak długo, jak $P<P_{kr}$ pręt zachowuje się w sposób „stateczny”, tzn. znajduje się w stanie początkowej równowagi prostoliniowej. Wówczas, **gdy siła osiągnie wartość krytyczną P_{kr} pręt traci stateczność (ulega wyboczeniu),** a jego ugięcia mogą być dowolnie duże.

Wyboczenie jest to zatem **utrata** przez ściskany pręt **stanu równowagi statecznej na rzecz równowagi obojętnej lub niestatecznej**.

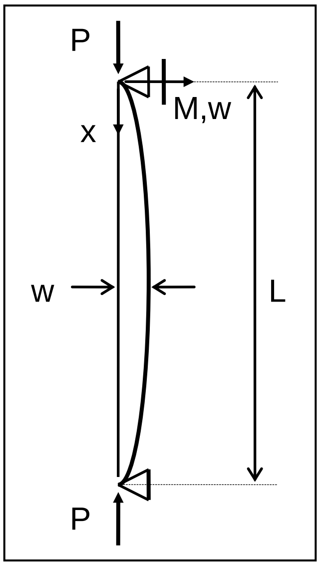
2. SIŁA KRYTYCZNA DLA SŁUPA

2.1. Zakres liniowo sprężysty

* **słup idealny**, tzn. idealnie prosty i obciążony centralnie przyłożoną siłą ściskającą P
* materiał słupa jest liniowo sprężysty (materiał Hooke'a)

2.2. Zakres liniowo sprężysty

* **Pręt swobodnie podparty (zadanie Eulera 1707-1783)**



$$M(x) = P_{kr}\, w(x)$$

$$E\,I\, w''(x) = -M(x) = -P_{kr}\, w(x)$$

$$k^2 \overset{def}{=} \frac{P_{kr}}{E\,I}$$

$$w''(x) + k^2\, w(x) = 0$$

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

$$w(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$w(x=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A \sin kL$$

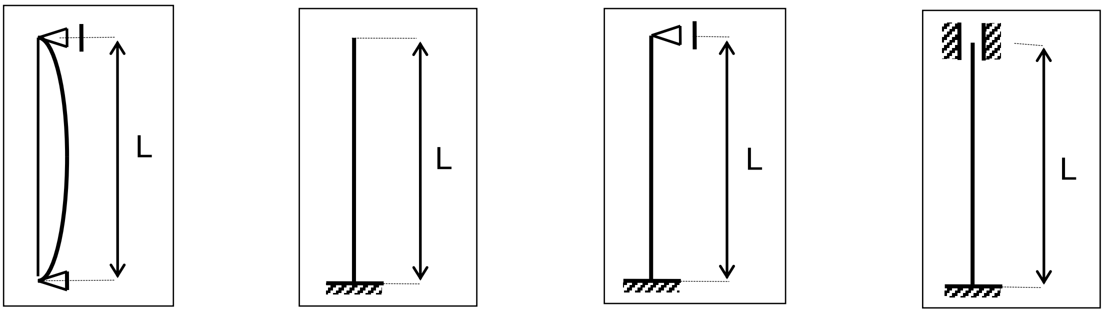
$$k\,L = n\,\pi \quad ; \quad n = 1,2,3.....$$

$$\boxed{w(x) = A \sin \frac{n \pi x}{L}}$$

$$\sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}} = \frac{n \pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

$$\boxed{\min P_{kr} = P_{kr}(n = 1) = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

2.3. Ogólna postać siły krytycznej (siły Eulera)



długości wyboczeniowe L_w

$L_w = L$ $\qquad$ $L_w = 2\,L$ $\qquad$ $L_w \cong \frac{1}{\sqrt{2}} L$ $\qquad$ $L_w = \frac{1}{2} L$

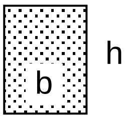
$$\boxed{P_{kr} = P_E = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_w^2}}$$

2.4. Podstawowe zasady kształtowania słupów

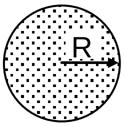
- **siła krytyczna**, jako obciążenie powodujące wyboczenie słupa (z reguły wyboczenie oznacza utratę przez konstrukcję zdolności do prawidłowej pracy), **powinna być jak największa**
- siła krytyczna jest proporcjonalna do sztywności giętnej słupa $E\,I_{min}$ i odwrotnie proporcjonalna do długości wyboczeniowej L_w - tak więc **zwiększenie siły P_{kr}** może nastąpić jedynie **w drodze odpowiedniego ukształtowania przekroju poprzecznego lub/i schematu statycznego** słupa. Nie zwiększa siły krytycznej zastosowanie materiału o bardzo wysokiej wytrzymałości !
- w przypadku słupów przez **odpowiednie ukształtowanie przekroju** rozumie się taki dobór jego geometrii, który **z określonej ilości materiału** pozwala **uzyskać przekrój o maksymalnej sztywności**, czyli maksymalnym momencie bezwładności. Można to osiągnąć poprzez rozmieszczenie materiału tak daleko od środka ciężkości przekroju, jak to tylko możliwe.

Przykład.

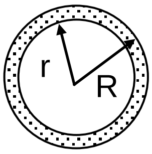
Pole przekroju słupa ma wynosić A=50 cm^2. Porównać siły krytyczne dla słupa o przekroju prostokątnym, kołowym i rurowym.



$$h/b = k \quad ; \quad k > 1 \quad ; \; A = k\,b^2 \quad ; \quad I_{min} = \frac{h\,b^3}{12} = \frac{A^2}{12\,k}$$



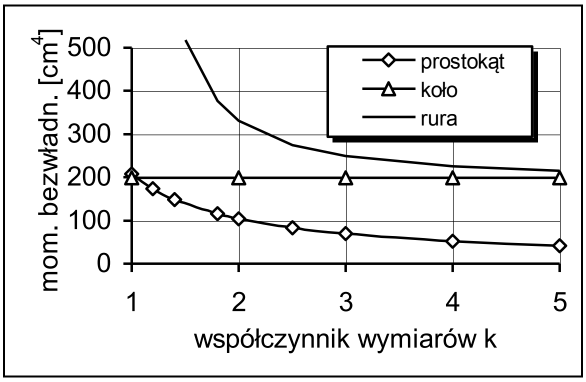
$$A = \pi R^2 \quad ; \quad I = \frac{\pi R^4}{4} \quad ; \; R = 3.989 \text{ cm} \quad ; \quad I = 198.944 \text{ cm}^4$$

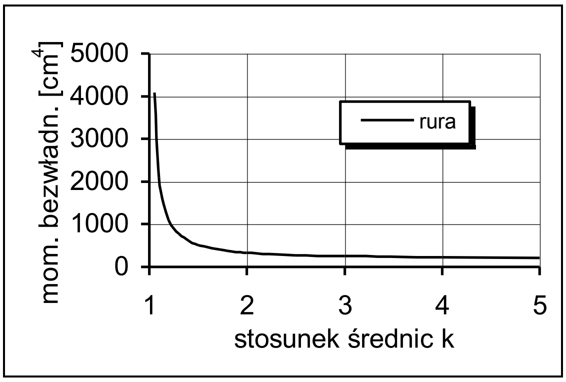


$$k = \frac{R}{r} \quad ; \quad A = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\,r^2\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) = \pi\,r^2\left(k^2 - 1\right)$$

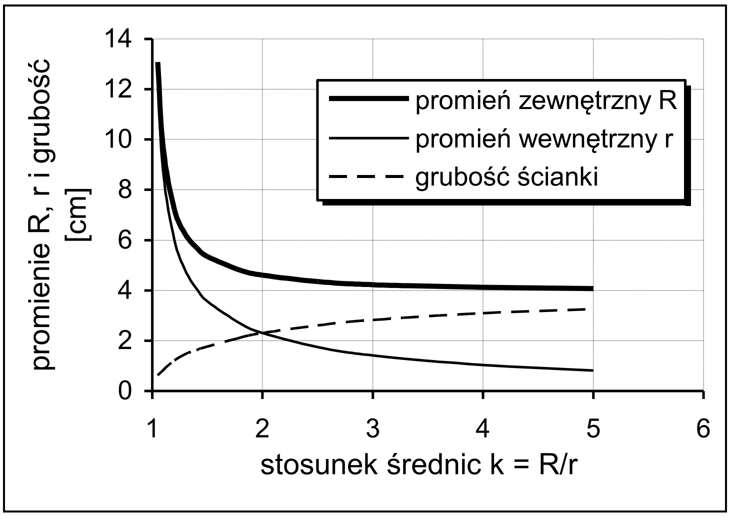
$$I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right) = \frac{\pi}{4}\,r^4\left(k^4 - 1\right)$$

- z wykresów widać, że **przekrój rury** jest zdecydowanie **bardziej ekonomiczny niż przekrój lity** o tym samym polu





- **czym stosunek promieni ścianki zewn. i wewn. jest mniejszy** (a zatem „cieńsza" jest ścianka rury) **tym korzyści** płynące z zastosowania przekroju rurowego **są większe**. Niestety, **jeżeli grubość jest zbyt mała** ścianka rury sama staje się niestateczna i **może dojść do lokalnego wyboczenia** w postaci „pofałdowania" powierzchni rury. Zamiast globalnego wyboczenia słupa mamy wówczas tzw. lokalną utratę stateczności (zapobiega się jej przez stosowanie użebrowania).

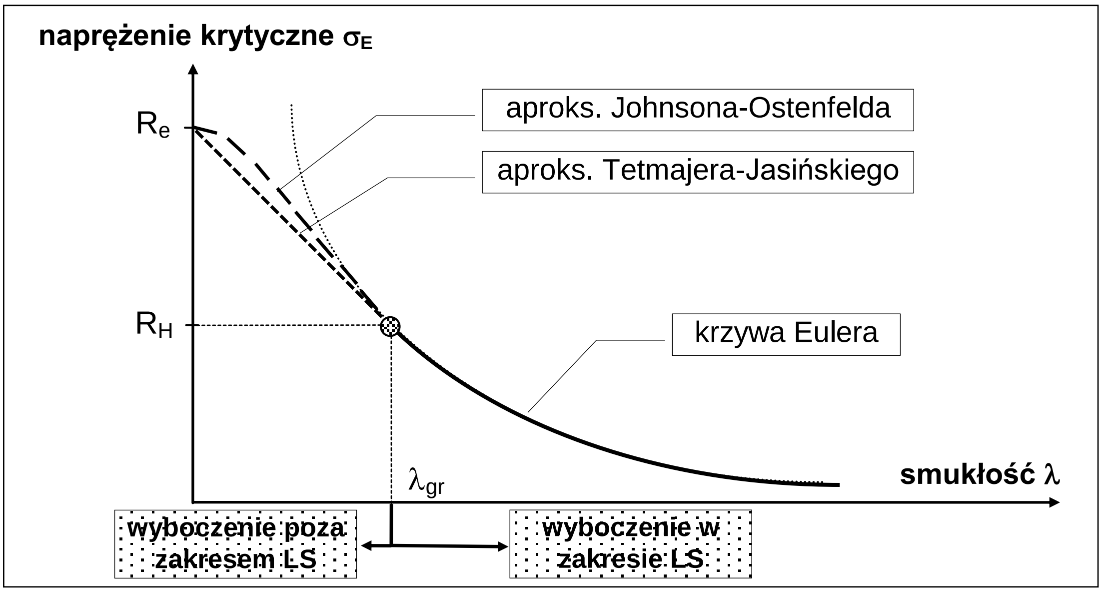


3. NAPRĘŻENIE NORMALNE W SŁUPIE

3.1. Średnie naprężenie ściskające

$$\sigma_{kr} = \sigma_E = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{A L_w^2} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{L_w^2}$$

$$\boxed{\lambda \underset{\text{smukłość}}{\overset{\text{def.}}{=}} \frac{L_w}{i_{min}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$



3.2. Zakres liniowo sprężystej (LS)pracy materiału

$$\boxed{\sigma_E < R_H \quad \Rightarrow \quad \lambda > \lambda_{gr} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_H}}}$$

3.3. Zakres pozaliniowo sprężystej pracy materiału

$$R_H < \sigma_E < R_e \quad \Rightarrow \quad \lambda < \lambda_{gr}$$

$$R_H < \sigma_E < R_e \quad \Rightarrow \quad \lambda < \lambda_{gr}$$

warunki „brzegowe”
$$\boxed{\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \sigma = R_e \quad ; \quad \lambda = \lambda_{gr} \;\Rightarrow\; \sigma = R_H}$$

aproksymacja liniowa T-J
$$\boxed{\sigma_{kr}^{T-J} = a - b\lambda \quad \Rightarrow \quad \sigma_{kr}^{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}}\,\lambda}$$

aproksymacja paraboliczna J-O
$$\boxed{\sigma_{kr}^{J-O} = A - B\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{kr}^{J-O} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi^2}\frac{R_H}{E}\lambda^2}$$

4. PROJEKTOWANIE PRĘTÓW ŚCISKANYCH

- warunek projektowania $P \le P_{kr} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{A} \le \sigma_{kr}$

- W przypadku dopuszczenia do wyboczenia w zakresie pozaliniowo sprężystym przyjmuje się, że zamiast granicy plastyczności R_e należy wziąć wytrzymałość obliczeniową na rozciąganie R_o.

$$\sigma_{kr} = \begin{cases} \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \dfrac{R_o}{R_o} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{gr}}\right)^{-2} \left(\dfrac{R_H}{R_o}\right) R_o & \text{dla } \lambda > \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\dfrac{E}{R_H}} \\ R_o - \dfrac{R_o - R_H}{\pi} \sqrt{\dfrac{R_H}{E}}\, \lambda = \left[1 - \dfrac{1}{\pi}\left(1 - \dfrac{R_H}{R_o}\right)\sqrt{\dfrac{R_H}{E}}\, \lambda\right] R_o & \text{dla } 0 < \lambda < \lambda_{gr} \end{cases}$$

- założenie $\sigma_{kr} = \varphi(\lambda)\, R_o$

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma_{kr}}{R_o} \qquad \text{współczynnik wyboczeniowy}$$

Normy uwzględniają we współczynniku wyboczeniowym takie czynniki jak losowość charakterystyk materiałowych, losowość obciążenia i odstępstwa od prostoliniowości pręta ściskanego (tzw. imperfekcje). Zgodnie z normą do projektowania konstrukcji stalowych

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_p} \qquad \text{smukłość względna}$$

$$\lambda_p = \frac{\pi}{1.15}\sqrt{\frac{E}{R_o}} \qquad \text{smukłość porównawcza}$$

$$\varphi(\bar{\lambda}) = \left(1 + \bar{\lambda}^{2n}\right)^{-\frac{1}{n}} \qquad \text{(n – współczynnik imperfekcji)}$$

4.1. Algorytm obliczeń

1. warunek wytrzymałościowy $\frac{P}{A} \le R_o \quad \Rightarrow \quad A$
2. przyjąć przekrój $A' \cong 3 \times A$
3. obliczyć smukłość pręta i smukłość porównawczą $\lambda = \frac{L_w}{i_{min}} \qquad \lambda_p = \frac{\pi}{1.15}\sqrt{\frac{E}{R_o}}$
4. z tablic wziąć wartość wsp. wyboczeniowego φ dla określonego stosunku λ / λ_p
5. sprawdzić warunek projektowania $\sigma \le \sigma_{kr} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{A\,\varphi(\lambda)} \le R_o$
6. jeżeli warunek projektowania jest spełniony, to proces projektowania jest zakończony. W przeciwnym wypadku należy zwiększyć przekrój A' i wrócić do punktu 3.