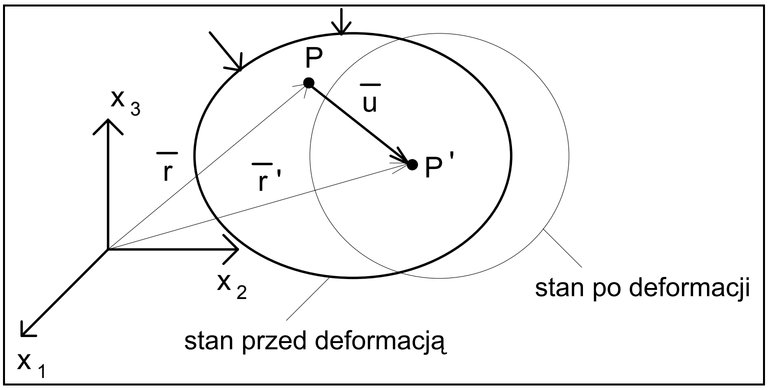
1. WEKTOR PRZEMIESZCZENIA



★ położenie pkt. P przed deformacją $P(\bar{r}) = P\left(x_1, x_2, x_3\right)$

★ położenie pkt. P po deformacji $P'(\bar{r}') = P'\left(x'_1, x'_2, x'_3\right)$

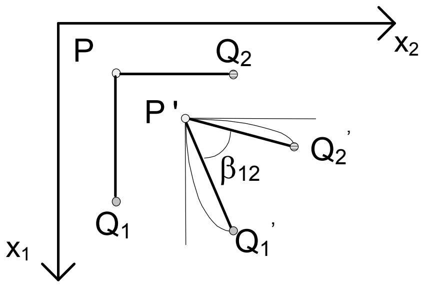
★ przemieszczenie punktu P $\overline{PP'} = \bar{u} = \bar{r}' - \bar{r}$

$$u_i = x'_i - x_i \qquad i = 1,2,3$$
$$u_i = u_i\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

★ wektorowe pole przemieszczeń $\bar{u} = \bar{u}(\bar{r})$

2. ODKSZTAŁCENIA LINIOWE I KĄTOWE

★ wybieramy 2 włókna : PQ_1 równoległe do osi x_1 i PQ_2 równoległe do x_2.



★ odkształcenia liniowe (względna zmiana długości włókna PQ_i)

$$\varepsilon_{11} = \lim_{dx_i \to 0} \frac{P'Q'_1 - PQ_1}{PQ_1}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ii} = \lim_{\substack{dx_i \to 0 \\ Q_i \to P}} \frac{P'Q'_i - PQ_i}{PQ_i}}$$

nie ma sumowania po "i"

★ odkształcenia kątowe

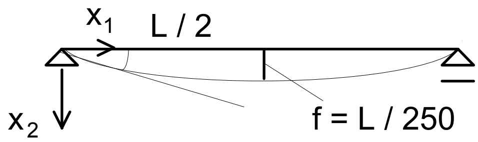
$$\boxed{\varepsilon_{12} = \lim_{\substack{dx_1 \to 0 \\ dx_2 \to 0}} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{12}\right)}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \lim_{\substack{Q_i \to P \\ Q_j \to P}} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{ij}\right) \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}}$$

3. RÓWNANIA GEOMETRYCZNE

★ związki między przemieszczeniami i odkształceniami

<u>założenie</u> : pochodne przemieszczeń są wielkościami małymi



$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1 = 0) \cong \frac{L/250}{L/2} = 0.008 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 << \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 \cong 0$$

★ liniowe równania geometryczne - równania Cauchy'ego

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)}$$

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \qquad \varepsilon_{22} = u_{2,2} \qquad \varepsilon_{33} = u_{3,3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$$

★ macierz (tensor) odkształcenia
$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

★ dla płaskiego stanu odkształcenia w płaszczyźnie (x_1, x_2)

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

4. TRANSFORMACJA ODKSZTAŁCEŃ PRZY OBROCIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, ODKSZTAŁCENIA I KIERUNKI GŁÓWNE

★ pełna analogia do płaskiego stanu naprężenia

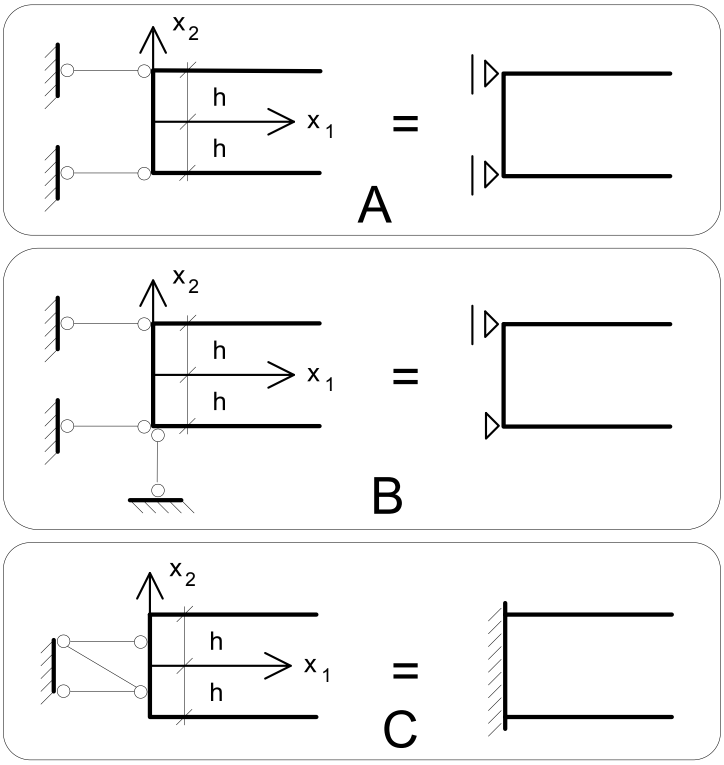
5. KINEMATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

★ liniowe równania geometryczne (rów. Cauchy'ego) - 6 równań różniczkowych cząstkowych wzg. 3 nieznanych funkcji przemieszczeń

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)$$

★ przemieszczenia musza spełniać warunki wynikające ze sposobu podparcia konstrukcji – są to tzw. **kinematycznych warunków brzegowych**

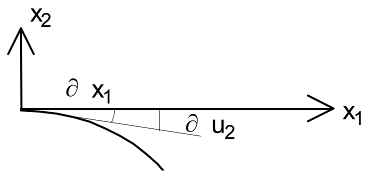
★ przykłady kinematycznych warunków brzegowych



A. $u_1(0,h)=0$ $u_1(0,-h)=0$

B. $u_1(0,h)=0$ $u_1(0,-h)=0$ $u_2(0,-h)=0$

C. $u_1(0,0)=0$ $u_2(0,0)=0$ $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}(0,0)=0$



6. RÓWNANIA NIEROZDZIELNOŚCI ODKSZTAŁCEŃ

- liniowe równania geometryczne (rów. Cauchy'ego)

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$$

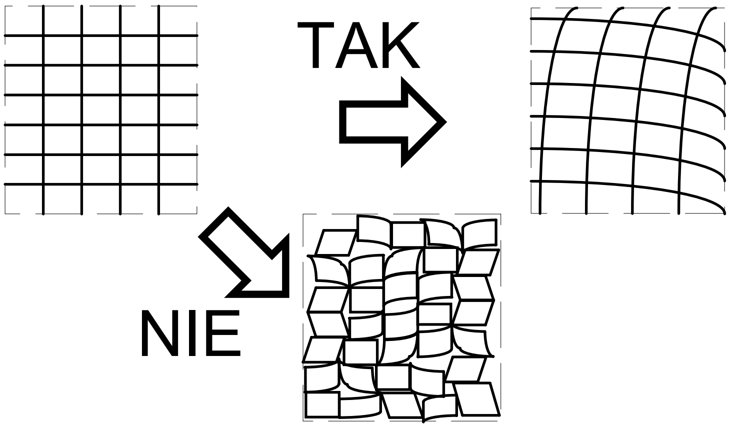
- 6 równań różniczkowych ze wzg. na niewiadome 3 funkcje przemieszczeń

- rozwiązanie istnieje tylko wówczas, gdy między odkształceniami zachodzą związki zwane **równaniami nierozdzielności.**

★ **liczba równań niezależnych wynosi 6**, zaś w płaskim stanie naprężenia istnieje tylko jedno równanie niezależne

$$\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}-2\varepsilon_{12,12}=0$$

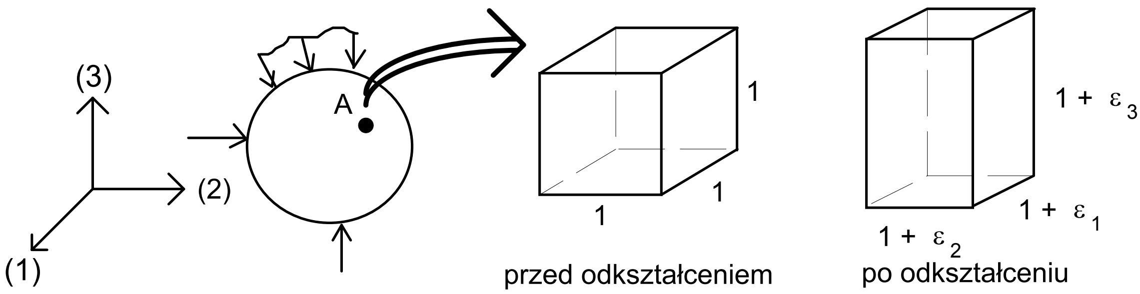
★ interpretacja geometryczna



7. DEFORMACJA SZEŚCIANU JEDNOSTKOWEGO

Problem : Określić zmianę objętości sześcianu o jednostkowych krawędziach ("obraz" punktu materialnego tzn. punktu o przypisanej masie).

A. W układzie współrzędnych określonym przez osie główne tensora odkształcenia



★ długości krawędzi sześcianu jednostkowego po odkształceniu

$$\varepsilon_i = \frac{L^i_k - L^i_o}{L^i_o} \qquad i = 1,2,3$$

$$L^i_o = 1 \qquad \Rightarrow \qquad L^i_k = 1 + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,3$$

★ zmiana objętości sześcianu

$$\Delta V = V_k - V_o = \left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_3\right) - 1 =$$

$$= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1 \quad \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_i$$