1. RÓWNANIA FIZYCZNE (KONSTYTUTYWNE)

Zadanie : Określić związek między odkształceniami i siłami wewnętrznymi, reprezentowanymi przez naprężenia.

★ zmienne stanu mechanicznego :czas " t ", temperatura " T " ....

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(x_k, t, T \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(x_k, t, T \right)$$

★ równania Naviera, równania Cauchy 'ego

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \qquad \text{dla} \qquad t = t^*,\ T = T^*$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \qquad \text{dla} \qquad t = t^*,\ T = T^*$$

★ równania konstytutywne

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, t, T \right)}$$

2. RÓWNANIA FIZYCZNE DLA IZOTROPOWEGO, JEDNORODNEGO MATERIAŁU LINIOWO SPRĘŻYSTEGO (R. HOOKE 'A)

★ założenia:

1. jawna zależność odkształceń wyłącznie od naprężeń $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij} \right)$
2. liniowy związek między odkształceniami i naprężeniami

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^{o} \qquad\qquad \sigma_{ij} = Q_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^{o}$$

S_{ijkl} - macierz podatności (macierz współczynników materiałowych)
Q_{ijkl} - macierz sztywności (macierz współczynników materiałowych)
ε_{ij}^{o}, σ_{ij}^{o} - macierze stałych

3. sprężystość - po zdjęciu obciążenia znikają odkształcenia : $\varepsilon_{ij}^{o} = 0$, $\sigma_{ij}^{o} = 0$
4. w każdym punkcie własności materiału są jednakowe w każdym kierunku (materiał **izotropowy i jednorodny**)

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}}$$

G, λ - stałe Lame 'go

$$\sigma_{11} = 2G\,\varepsilon_{11} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \right)$$

$$\sigma_{22} = 2G\,\varepsilon_{22} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \right)$$

$$\sigma_{33} = 2G\,\varepsilon_{33} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \right)$$

$$\sigma_{12} = 2G\,\varepsilon_{12} \qquad \sigma_{13} = 2G\,\varepsilon_{13} \qquad \sigma_{23} = 2G\,\varepsilon_{23}$$

- odwrotna postać prawa Hooke'a

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[\left(1+\nu \right)\sigma_{ij} - \nu\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \right]}$$

E (moduł Young'a , moduł sprężystości), ν (współczynnik Poisson'a)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \qquad \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13} \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}$$

★ wprowadźmy następujące definicje

$$\frac{1}{2G} \overset{def}{=} \frac{1+\nu}{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$ moduł ścinania, mod. odkszt. postaciowego

$$\frac{\lambda}{2G+3\lambda} \overset{def}{=} \frac{\nu}{1+\nu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

★ ograniczenia na stałe materiałowe

1) z termodynamiki wynika, że stałe G, λ, muszą być dodatnie
2) dodatnie wartości modułów ścinania i ściśliwości oznaczają, że zachodzą relacje:

$$1+\nu > 0 \qquad \nu > -1$$

$$1-2\nu > 0 \qquad \nu < 0.5$$

$$\boxed{-1 < \nu < 0.5}$$ ograniczenia na stałą ν

★ zmiana objętości $\quad \Delta V = \varepsilon_{ii} = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m$

- jeżeli $\nu \to 0.5$ to $\Delta V \to 0$ - materiał nieściśliwy (guma)
- materiały o $\nu < 0$ nie są znane
- maksymalna zmiana objętości dla $\nu = 0$ (~ korek)