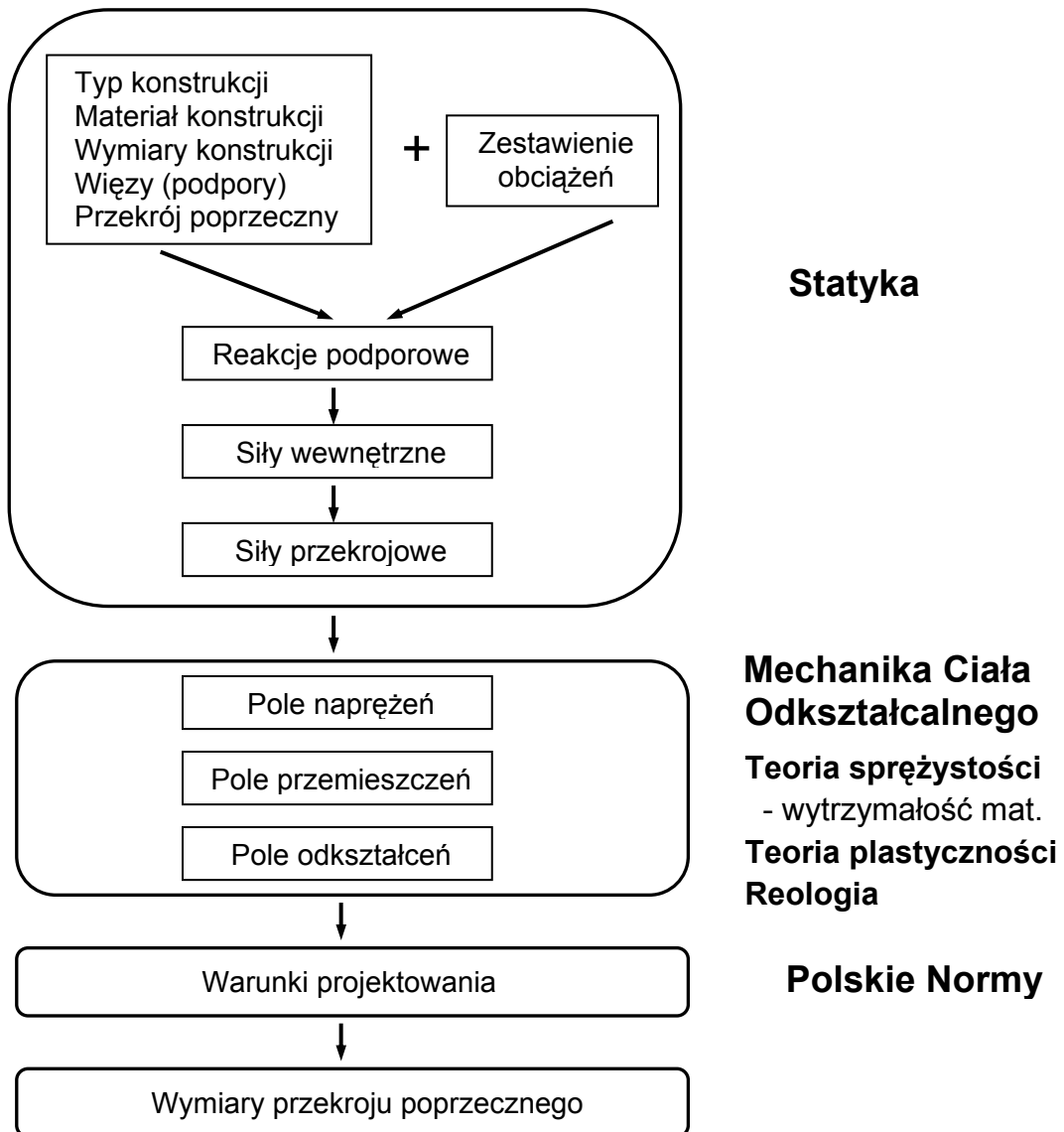


Wytrzymałość Materiałów - dział mechaniki stosowanej zajmujący się zachowaniem ciał stałych pod wpływem różnego typu obciążeń. Celem analizy tego zachowania jest wyznaczenie odpowiedzi ciała na działające obciążenie tzn. wyznaczenie naprężeń, odkształceń i przemieszczeń wszystkich punktów ciała.

1. Przedmiot i cel wytrzymałości materiałów

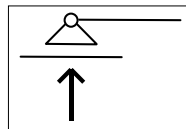


★ **Normy obciążeń:**

- PN-82/B-02000 Obciążenia budowli. Zasady ustalania wartości.
- PN-82/B-02001 Obciążenia budowli. Obciążenia stałe.
- PN-82/B-02003 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne.
Podstawowe obciążenia technologiczne i montażowe
- PN-82/B-02004 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne.
Obciążenia pojazdami.
- PN-80/B-02010 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie śniegiem.
- PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem.
- PN-88/B-02014 Obciążenia budowli. Obciążenie gruntem.
- PN-87/B-02013 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe.
Obciążenie oblodzeniem.
- PN-86/B-02015 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe.
Obciążenie temperaturą.
- PN-86/B-02005 Obciążenia budowli. Obciążenia suwnicami pomostowymi, wciągarkami i wciągnikami.

4. Wieży (podpory) i ich reakcje (siły bierne)

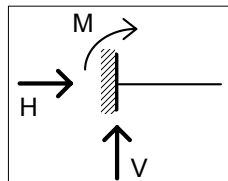
★ podpora przegubowo-przesuwna



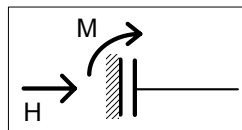
★ podpora przegubowo-nieprzesuwna



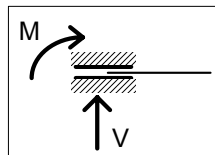
★ pełne utwierdzenie



★ utwierdzenie z przesuwem



★ utwierdzenie z przesuwem



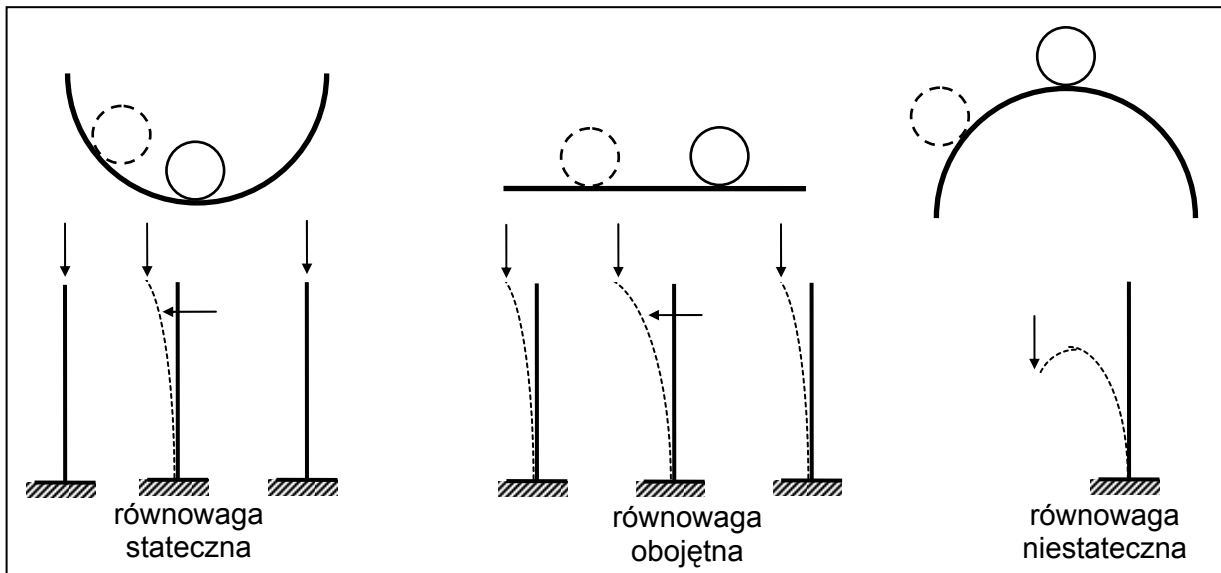
4.1. Obliczanie reakcji

- zasada zeszczywnienia
- równowaga ciała : równowaga układu sił
ciało w spoczynku

$$\bar{S} = \begin{cases} \sum X \\ \sum Y = \bar{0} \\ \sum Z \end{cases} \quad \bar{M}_o = \begin{cases} \sum M_{ox} \\ \sum M_{oy} = \bar{0} \\ \sum M_{oz} \end{cases}$$

5. Podstawowe założenia

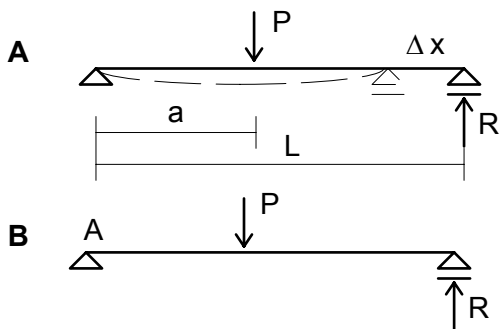
- ★ **Założenie o ośrodku ciągłym** - elementarne składniki ciała stałego (o budowie krystalicznej lub amorficznego) są nierozróżnialne. Przedmiotem obserwacji jest tzw. **punkt materialny** (tzn. punkt o niezerowej masie). Ciało (ośrodek) ciągły - *continuum materialne* - to takie ciało, które jest szczelnie wypełnione punktami materialnymi (ciało bez "dziur").
- ★ **Założenie o równowadze statecznej**



- ★ **Założenie o małych przemieszczeniach - zasada zeszywnienia**

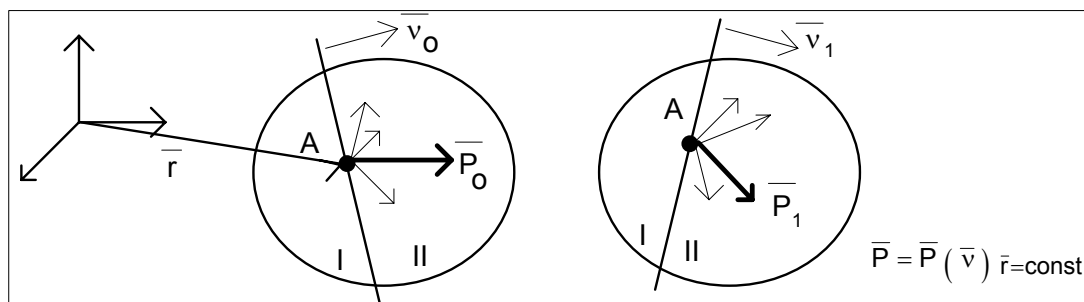
przemieszczenia punktów konstrukcji są małe w porównaniu z jej charakterystycznymi wymiarami (np. mniejsze od 1/250 długości belki, 1/4 grubości płyty itp.).

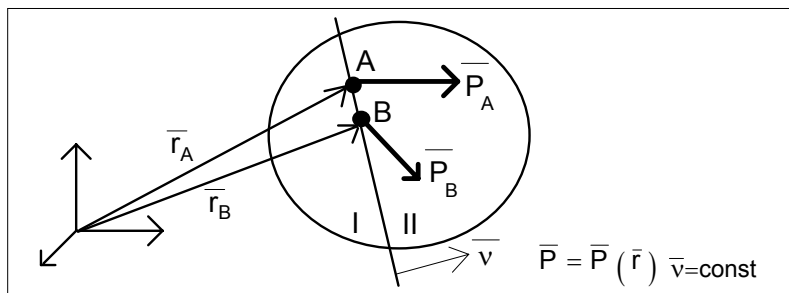
Zasada zeszywnienia : wpływ przemieszczeń konstrukcji na wartość sił biernych (reakcji podpór) i sił wewnętrznych (przekrojowych) jest pomijalnie mały. Oznacza to, że przy obliczaniu tych sił nie rozróżniamy konfiguracji aktualnej od wyjściowej.



$$\sum M_A = RL - Pa = 0$$

6. Siła wewnętrzna

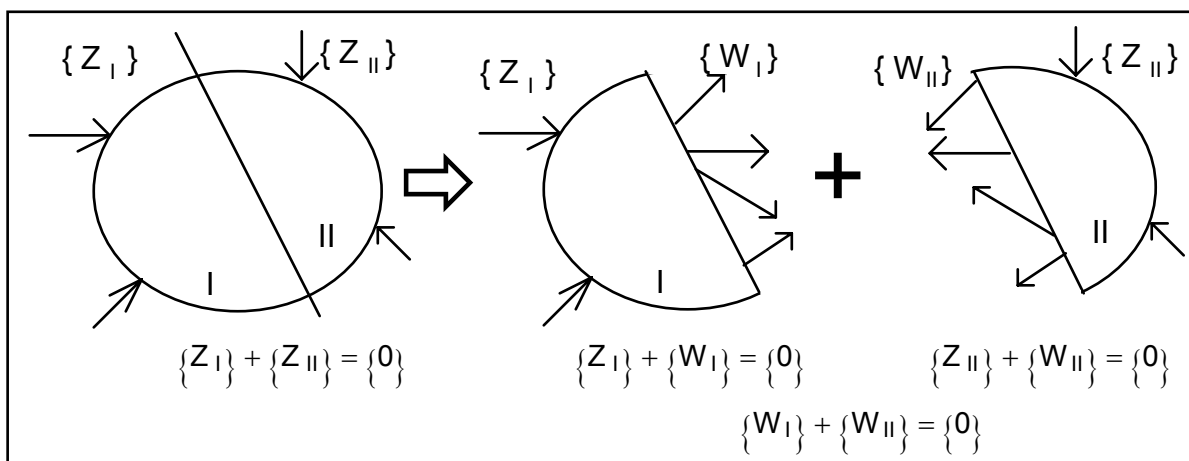




$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{r}, \bar{v})$$

Siłą wewnętrzną nazywamy **funkcję wektorową 2 wektorów - wektora wodzącego punktu A i wersora normalnego płaszczyzny**, określającą wypadkową sił międzycząsteczkowych działających między wszystkimi punktami części II, wyznaczonej przez tę płaszczyznę i dowolnym punktem materialnym A leżącym na płaszczyźnie i należącym do części I.

7. Twierdzenie o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych.



$$\begin{aligned} \{W_{II}\} = \{Z_I\} &\Rightarrow \mathbf{S}\{W_{II}\} = \mathbf{S}\{Z_I\} && ; && \mathbf{M}_O\{W_{II}\} = \mathbf{M}_O\{Z_I\} \\ \{W_I\} = \{Z_{II}\} &\Rightarrow \mathbf{S}\{W_I\} = \mathbf{S}\{Z_{II}\} && ; && \mathbf{M}_O\{W_I\} = \mathbf{M}_O\{Z_{II}\} \end{aligned}$$

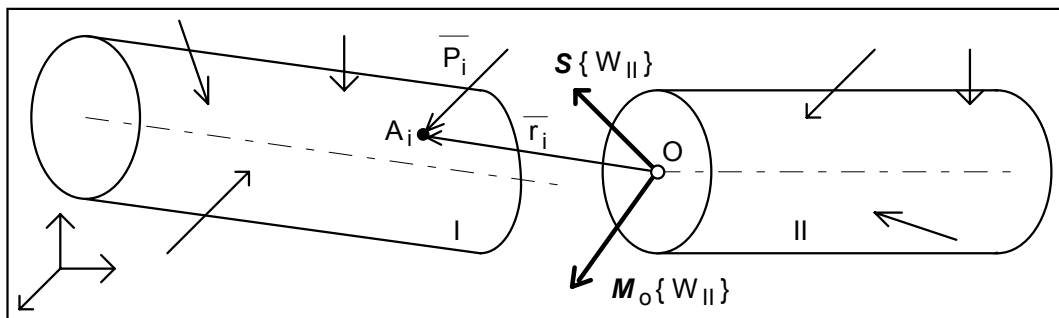
Równoważność układu sił zewnętrznych i wewnętrznych nie pozwala wyznaczyć układu sił wewnętrznych, gdyż układów równoważnych można znaleźć nieskończenie wiele. Oznacza ona jednak równość sum obu układów i momentów obu układów wzg. dowolnego punktu "O". Twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych pozwalają zatem w oparciu o znajomość układu sił zewnętrznych określić tzw. zredukowany (do punktu "O") układ sił wewnętrznych (tzn. sumę i moment ukł. sił wewnętrznych).

8. Siły przekrojowe w konstrukcjach prętowych

- ★ **Pręt** - bryła, której jeden wymiar (długość) jest nieporównywalnie duży w stosunku do dwu pozostałych (wymiary przekroju poprzecznego)
- ★ **Oś pręta** - miejsce położenia punktów będących środkami ciężkości przekrojów pręta płaszczyznami przecinającymi tworzące pręta
- ★ **Przekrój poprzeczny** - przekrój pręta płaszczyzną prostopadłą do osi pręta-

Zadanie : Wyznaczyć zredukowany układ sił wewnętrznych $\{W_{II}\}$, tzn. wyznaczyć wektor sumy $\mathbf{S}\{W_{II}\}$ i wektor momentu $\mathbf{M}_O\{W_{II}\}$.

Zredukowanego układu sił wewnętrznych, poszukujemy w przekroju poprzecznym pręta, a środkiem redukcji jest środek ciężkości przekroju "O"



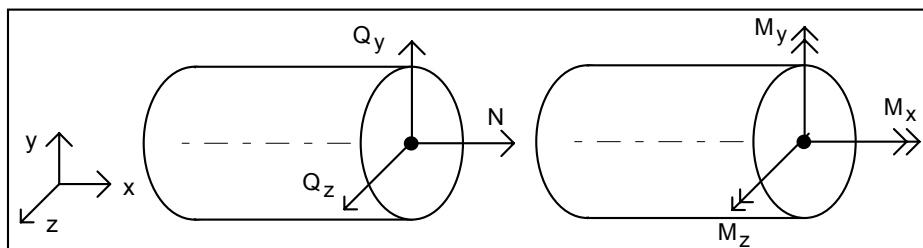
Rozwiązanie: Korzystając z twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych, a także uwzględniając zasadę zeszytnienia, możemy zapisać:

$$S\{W_{II}\} = \sum \bar{P}_i\{Z_I\} \qquad M_o\{W_{II}\} = \sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i\{Z_I\}$$

Składowe tak wyznaczonego wektora sumy i momentu nazywamy siłami przekrojowymi

$$S \equiv \bar{S}(N, Q_y, Q_z)$$

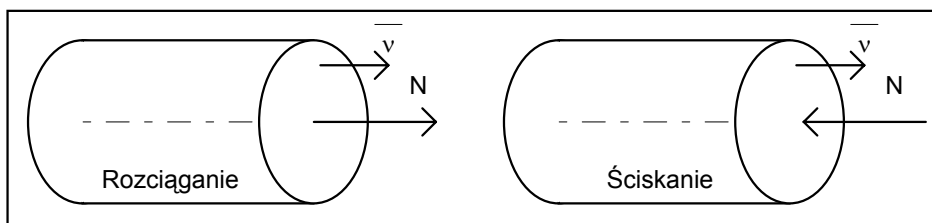
$$M_o \equiv \bar{M}(M_x, M_y, M_z)$$



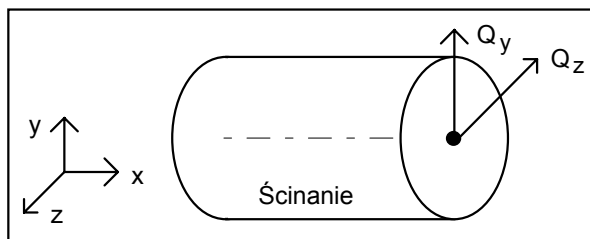
8.1. Podstawowe przypadki redukcji

Układ sił zewnętrznych $\{Z_I\} \equiv \{W_{II}\}$ może redukować się w środku ciężkości przekroju poprzecznego do:

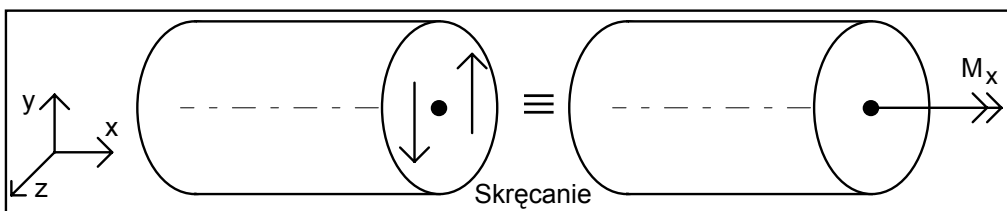
- ★ wypadkowej, prostopadłej do przekroju poprzecznego (siła **osiowa, normalna, podłużna**)



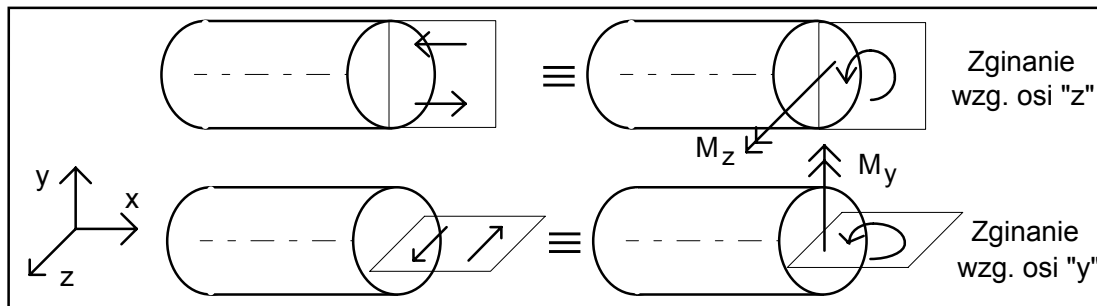
- ★ wypadkowej, leżącej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego (siła **poprzeczna, ścinająca, tnąca**)



- ★ pary sił leżącej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, a zatem pary o wektorze momentu normalnym do przekroju (**moment skręcający**)

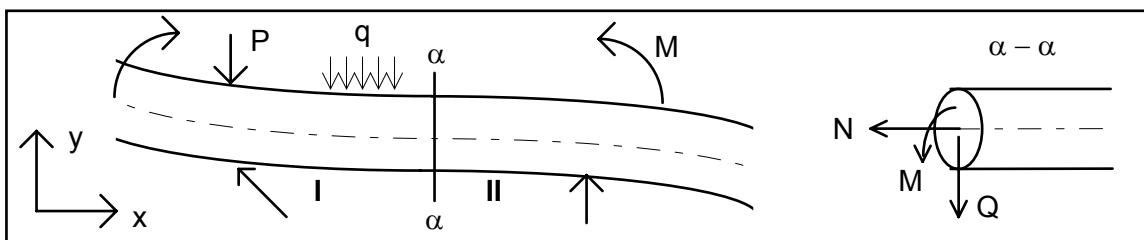


★ pary sił leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju poprzecznego, a zatem pary o wektorze momentu leżącym w płaszcz. przekroju (**moment zginający**)



9. Statycznie wyznaczalne płaskie konstrukcje prętowe

Definicja: konstrukcje składające się z prętów, których osie leżą w jednej płaszczyźnie, obciążone układem sił określonym w tej samej płaszczyźnie i tak połączone z podłożem, że reakcje podporowe można wyznaczyć na podstawie jedynie równań równowagi.



9.1. Reakcje

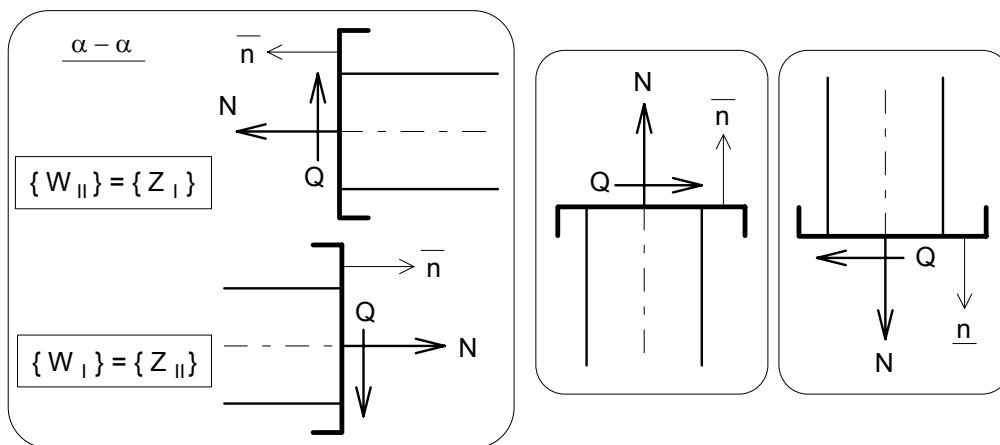
$$\begin{aligned} \sum Z &\equiv 0 & \sum M_{ox} &\equiv 0 & \sum M_{oy} &\equiv 0 \\ \sum X &= 0 & \sum Y &= 0 & \sum M_{oz} &= \sum M = 0 \end{aligned}$$

9.2. Siły przekrojowe

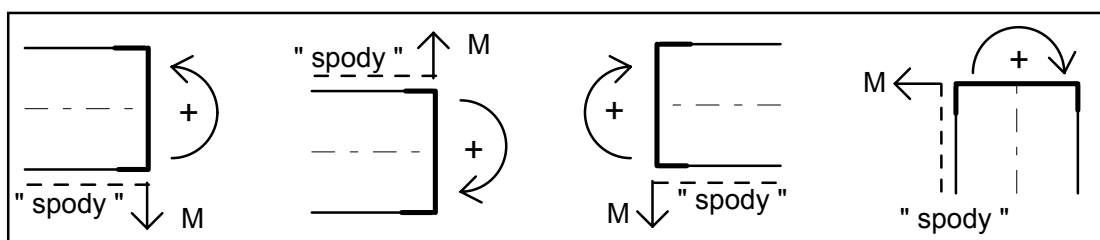
$$\bar{S}(N, Q \equiv Q_y, 0) = (N, Q) \quad \bar{M}(0, 0, M_z \equiv M) = (M)$$

9.3 Układ własny przekroju poprzecznego

Przy poszukiwaniu sił przekrojowych (poprzez redukcję obciążenia zewnętrznego) rezygnuje się z globalnego układu współrzędnych (x,y) na rzecz układu lokalnego związanego z przekrojem poprzecznym. Układ taki nosi nazwę **ukł. własnego** przekroju poprzecznego.



9.4. Konwencja znakowania momentu od pary sił, spody.

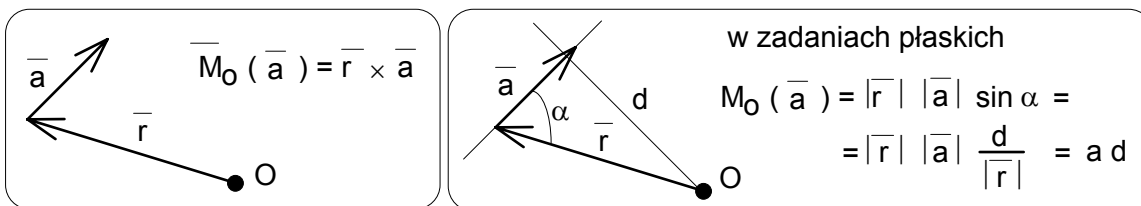


Umowa 1: graficznym reprezentatem momentu od pary sił będzie łuk skierowany. Za dodatni zwrot momentu przyjmujemy taki, który powoduje rozciąganie dowolnie wyróżnionych włókien pręta, zwanych **spodami**.

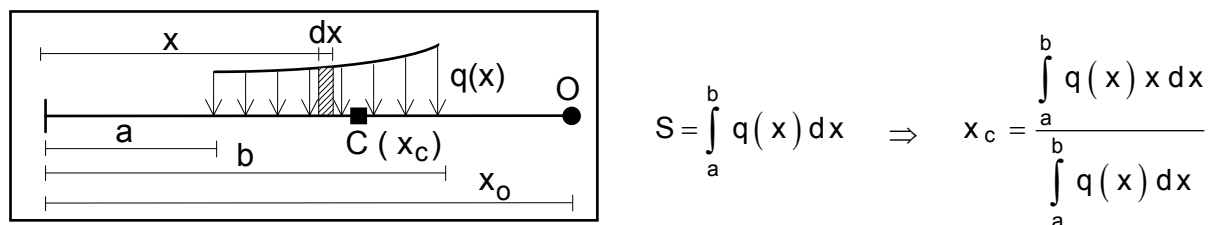
Umowa 2: Oś liczbową, na której będziemy odkładać wartości momentów przekrojowych przyjmujemy w ten sposób, że jest on prostopadła do przyjętych spodów, a jej dodatni zwrot "jest zgodny ze spodami".

9.5. Obliczanie momentu.

★ wektora \vec{a} względem punktu O



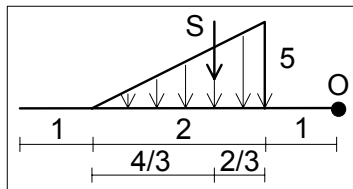
★ od obciążenia ciągłego wzg. pkt. O



$$M_o = \int_a^b q(x) dx (x_o - x) = \int_a^b q(x) x_o dx - \int_a^b q(x) x dx =$$

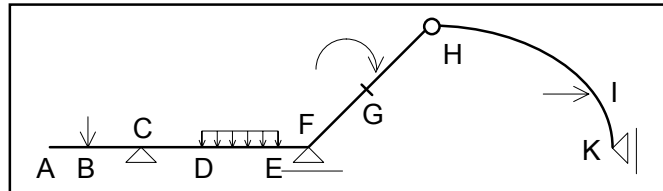
$$= x_o \int_a^b q(x) dx - x_c \int_a^b q(x) dx = S (x_o - x_c)$$

Przykład



$$M_o = 1/2 \times 5 \times 2 \times (1/3 \times 2 + 1) = 8.33$$

10. Punkty, przedziały charakterystyczne w konstrukcjach prętowych



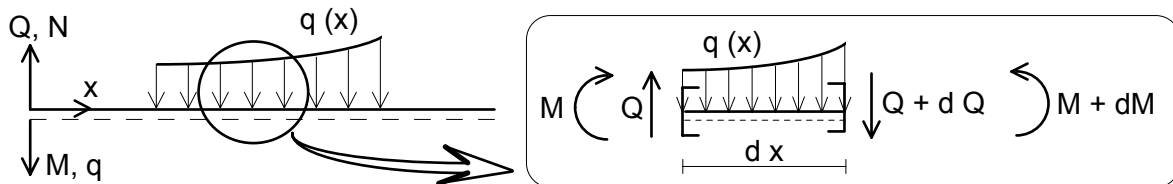
★ **Punkty charakterystyczne**

- początek, koniec pręta: A, K
- podpory: C, F, K
- punkty przyłożenia obciążenia: B, G, I
- początek i koniec obciążenia ciągłego: D, E
- miejsca zmiany geometrii pręta i punkty nieciągłości: H

★ **Przedziały charakterystyczne** - przedziały położone między pkt. charakteryst.

11. Zależności różniczkowe dla pręta prostego

Definicja: pręt prosty to pręt, którego oś jest linią prostą.



$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q - q(x) dx - Q - dQ = 0 \qquad \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow Q dx + M - q(x) dx \frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

$$(dx)^2 \cong 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)$$

Wnioski:

1. jeżeli $q=0$ to wykres funkcji $Q(x)$ jest stały, a funkcji $M(x)$ jest liniowy
2. jeżeli $q=const.$, to wykres funkcji $Q(x)$ jest liniowy, a funkcji $M(x)$ paraboliczny (2°)
3. między M i Q zachodzą wszystkie zależności, jakie wynikają z własności pochodnej