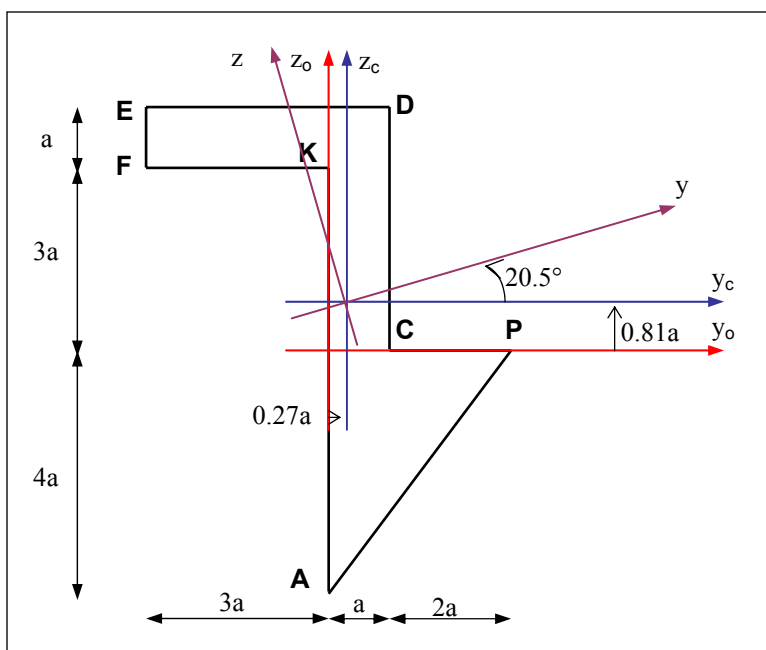


ZADANIE: Wyznaczyć wymiar „a” przekroju mimośrodkowo rozciąganego siłą $P=300$ kN. Wyznaczyć i narysować oś obojętną, rdzeń przekroju i bryłę naprężeń.



1. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI (w ukł. wyjściowym (y_o, z_o))

$$A = 4a^2 + 3a^2 + \frac{1}{2}3a \cdot 4a = 13a^2$$

$$S_{y_o} = 4a^2 \cdot 3.5a + 3a^2 \cdot 1.5a + 6a^2 \left(-\frac{1}{3}4a\right) = 10.5a^3$$

$$S_{z_o} = 4a^2(-a) + 3a^2 \cdot 0.5a + 6a^2 \cdot \frac{1}{3}3a = 3.5a^3$$

$$y_c = \frac{3.5a^3}{13a^2} = 0.27a$$

$$z_c = \frac{10.5a^3}{13a^2} = 0.81a$$

2. CENTRALNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI (w ukł. (y_c, z_c))

$$I_{y_c} = \frac{4a \times a^3}{12} + 4a^2 \times (3.5 - 0.81)^2 a^2 + \frac{a \times (3a)^3}{12} + 3a^2 \times (1.5 - 0.81)^2 a^2 + \frac{3a \times (4a)^3}{36} + 6a^2 \times \left(\frac{1}{3}4 + 0.81\right)^2 a^2 = 65.9a^4$$

$$I_{z_c} = \frac{(4a)^3 \times a}{12} + 4a^2 \times (1.27)^2 a^2 + \frac{a^3 \times 3a}{12} + 3a^2 \times (0.5 - 0.27)^2 a^2 + \frac{4a \times (3a)^3}{36} + 6a^2 \times \left(\frac{1}{3}3 - 0.27\right)^2 a^2 = 18.4a^4$$

$$I_{y_c z_c} = 4a^2 \times (3.5 - 0.81)^2 \times (-1.27)a^2 + 3a^2 \times (0.5 - 0.27)(1.5 - 0.81)a^2 + \frac{(4a)^2 \times (3a)^2}{72} + 6a^2 \times (1 - 0.27)a \times \left[-\left(\frac{4}{3} + 0.81\right)\right]a = -20.6a^4$$

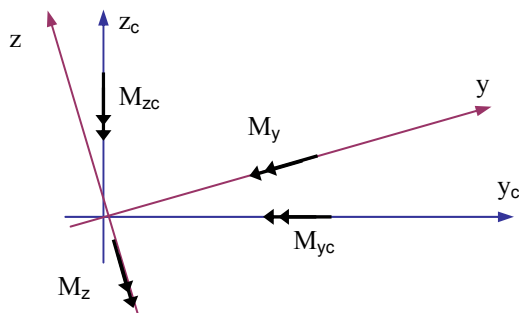
3. GŁÓWNE, CENTRALNE MOMENTY I OSIE BEZWŁADNOŚCI (ukł. (y, z))

$$I_{1,2} = \frac{65.9 + 18.4}{2} a^4 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(65.9 - 18.4)^2 + 4 \times (20.6)^2} a^4$$

$$I_1 = 73.6a^4 = I_y \quad \text{tg } \alpha_1 = \frac{-20.6}{18.4 - 73.6} \Rightarrow \alpha_1 = 20.5^\circ$$

$$I_2 = 10.7a^4 = I_z \quad \text{tg } \alpha_2 = \frac{-20.6}{18.4 - 10.7} \Rightarrow \alpha_2 = -69.5^\circ$$

4. WYMIAROWANIE PRZEKROJU



$$N = 300 \text{ kN}$$

$$M_{yc} = 300 \times 0.81 a = 243 a$$

$$M_{zc} = 300 \times (3a - 0.27a) = 243 a$$

$$M_y = 243a \times \cos 20.5^\circ + 819a \times \sin 20.5^\circ = 514.4 a$$

$$M_z = 819a \times \cos 20.5^\circ - 243a \times \sin 20.5^\circ = 682.0 a$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_x = \frac{300}{13a^2} - \frac{514.4 a}{73.6 a^4} z + \frac{682 a}{10.7 a^4} y$$

$$\sigma_x = \frac{23.08}{a^2} - \frac{6.99}{a^3} z + \frac{63.74}{a^3} y$$

4.1. Oś obojętna

$$\sigma_x = \frac{23.08}{a^2} - \frac{6.99}{a^3} z + \frac{63.74}{a^3} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{3.3a} + \frac{y}{-0.362a} = 1$$

4.2. Maksymalne naprężenie normalne, wymiarowanie przekroju

Punktem najdalej położonym od osi obojętnej jest punkt P. W tym punkcie naprężenie normalne jest zatem największe.

$$\sigma_x^{\max} = \frac{23.08}{a^2} - \frac{6.99}{a^3} z^P + \frac{63.74}{a^3} y^P$$

W celu wyznaczenia współrzędnych punktu P (i wszystkich innych) w ukł. głównym, centralnym najwygodniej jest dokonać transformacji współrzędnych z układu (y_c, z_c) .

$$a'_i = \alpha_{ik} a_k$$

$$\alpha_{ik} = \begin{bmatrix} 0.937 & 0.35 \\ -0.35 & 0.937 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y^P \\ z^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.937 & 0.35 \\ -0.35 & 0.937 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.73a \\ -0.81a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.27a \\ -1.71a \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_x^{\max} = \frac{179.7}{a^2} \leq R_o = 200 \times 10^3 \quad \Rightarrow \quad \text{przyjęto } a = 3 \text{ cm}$$

oś obojętna

$$\frac{z}{9.9} + \frac{y}{-1.09} = 1 \quad [\text{cm}]$$

5. BRYŁA NAPRĘŻEŃ

$$\sigma_x = 25.6 + 2361 y - 259 z$$

Punkt	A	P	C	D	E	F	K
y [m]	-0.058	0.068	0.012	0.054	-0.058	-0.069	0.015
z [m]	-0.144	-0.051	-0.030	0.082	0.124	0.096	0.064
σ_x [MPa]	-77.3	200.0	61.9	131.9	-144.5	-162.0	45.3

6. RDZEŃ PRZEKROJU

6.1. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty (ukł. (y, z)) $P_1(y_1, z_1)$ i $P_2(y_2, z_2)$

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} (y - y_1)$$

6.2. Równanie osi obojętnej (ukł. (y, z))

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1 \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_o} \quad ; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_o}$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{5962}{117} = 50.96 \text{ cm}^2 \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{867}{117} = 7.41 \text{ cm}^2$$

prosta AP

$$z + 14.4 = \frac{-5.1 + 14.4}{6.8 + 5.8} (y + 5.8) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{13.71} + \frac{z}{-10.12} = 1$$

$$a_y = 13.71 = -\frac{7.41}{y_o} \quad \Rightarrow \quad y_o = -0.54 \text{ cm}$$

$$a_z = -10.12 = -\frac{50.96}{z_o} \quad \Rightarrow \quad z_o = 5.04 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1 (-0.54 ; 5.04)}$$

prosta PD

$$z + 5.1 = \frac{8.2 + 5.1}{5.4 - 6.8} (y - 6.8) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{6.26} + \frac{z}{59.5} = 1$$

$$a_y = 6.26 = -\frac{7.41}{y_o} \quad \Rightarrow \quad y_o = -1.18 \text{ cm}$$

$$a_z = 59.52 = -\frac{50.96}{z_o} \quad \Rightarrow \quad z_o = -0.86 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2 (-1.18 ; -0.86)}$$

prosta DE

$$z - 8.2 = \frac{12.4 - 8.2}{-5.8 - 5.4} (y - 5.4) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{27.27} + \frac{z}{10.23} = 1$$

$$a_y = 27.27 = -\frac{7.41}{y_o} \quad \Rightarrow \quad y_o = -0.27 \text{ cm}$$

$$a_z = 10.23 = -\frac{50.96}{z_o} \quad \Rightarrow \quad z_o = -4.98 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_3 (-0.27 ; -4.98)}$$

prosta EF

$$z - 12.4 = \frac{9.6 - 12.4}{-6.9 + 5.8} (y + 5.8) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{-10.67} + \frac{z}{27.16} = 1$$

$$a_y = -10.67 = -\frac{7.41}{y_o} \quad \Rightarrow \quad y_o = 0.69 \text{ cm}$$

$$a_z = 27.16 = -\frac{50.96}{z_o} \quad \Rightarrow \quad z_o = -1.88 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_4 (0.69 ; -1.88)}$$

prosta FA

$$z - 9.6 = \frac{-14.4 - 9.6}{-5.8 + 6.9} (y + 6.9) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{-6.46} + \frac{z}{-140.95} = 1$$

$$a_y = -6.46 = -\frac{7.41}{y_o} \quad \Rightarrow \quad y_o = 1.15 \text{ cm}$$

$$a_z = -140.95 = -\frac{50.96}{z_o} \quad \Rightarrow \quad z_o = 0.36 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_5 (1.15 ; 0.36)}$$

