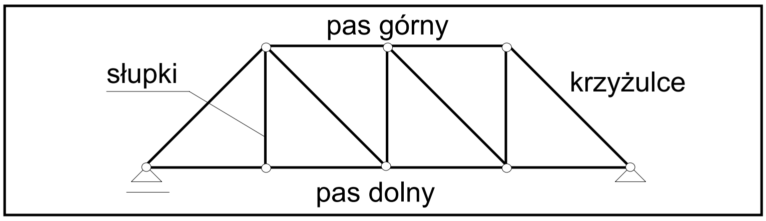
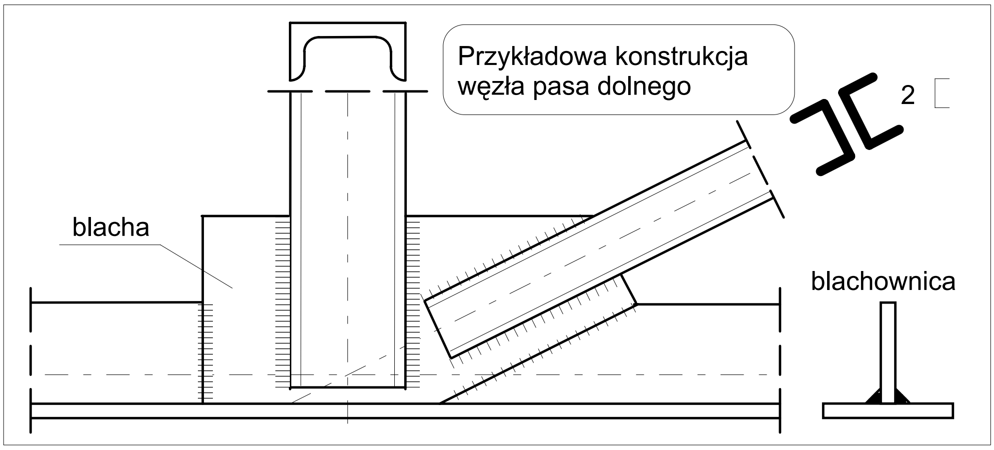
Definicja: konstrukcja prętowa, skladająca sie z prętów prostych połaczonych ze sobą przegubami



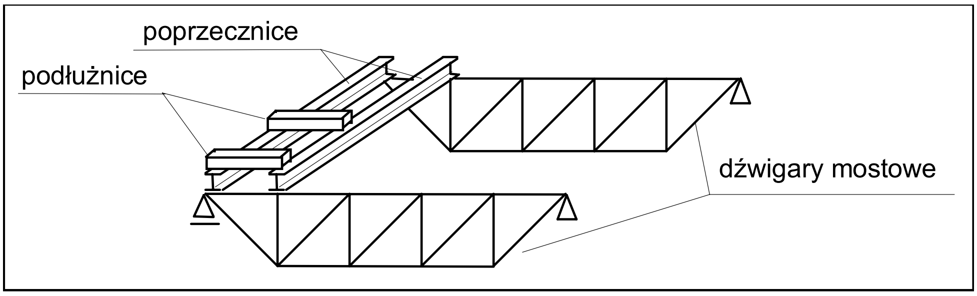
Założenia:

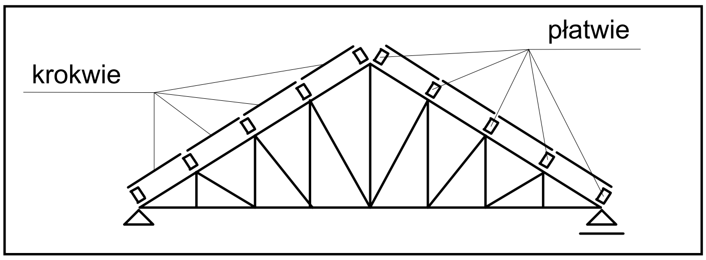
✶ pręty są połączone w węzłach przegubami idealnymi (brak tarcia)



✶ osie prętów przecinają się w węźle w jednym punkcie

✶ obciążenie zewnętrzne przyłożone jest tylko w węzłach kratownicy



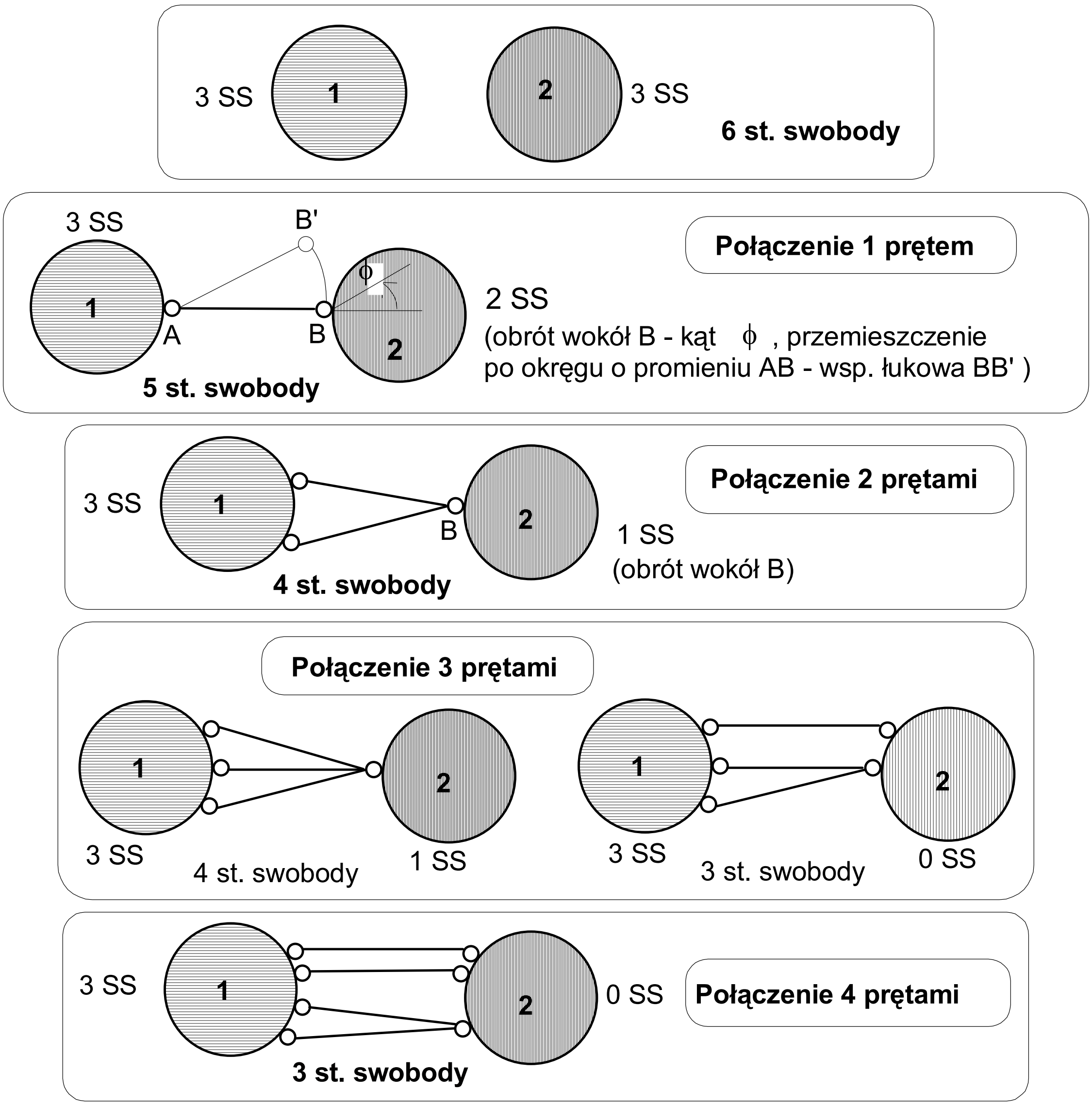


Podstawowe informacje nt. geometrycznej niezmienności ciał płaskich

✶ **stopień swobody** - niezależny parametr określający położenie ciała na płaszczyźnie

✶ **pojedyncza tarcza** - 3 stopnie swobody: dwa przemieszczenia i jeden obrót. "T" niezależnych tarcz ma razem 3 T stopni swobody

✶ **dwie tarcze**



Wniosek : dodatkowy pręt łączący dwie tarcze nie zawsze musi odbierać jeden stopień swobody. Zawsze prawdziwy jest natomiast warunek, mówiący, że:

jeżeli 2 tarcze połączone są tak, że tworzą układ o 3 stopniach swobody (geometrycznie niezmienny) , to prawdziwy jest związek $3 \times 2 - p \le 3$ (p - liczba prętów)

W przypadku połączonych T tarcz tworzących układ o 3 stopniach swobody

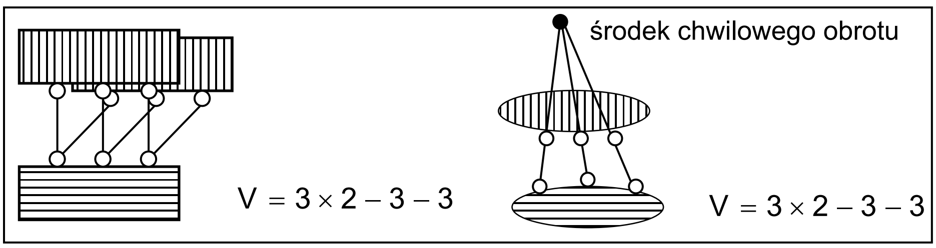
$$3 \times T - p \le 3$$

Stopień geometrycznej niezmienności V $V = 3 \times T - p - 3$

Warunek konieczny (ale nie wystarczający) geometrycznej niezmienności układu

$$V \begin{cases} = 0 & \text{układ sztywny} \\ < 0 & \text{układ przesztywniony} \\ > 0 & \text{układ geometrycznie zmienny} \end{cases}$$

UKŁAD GEOMETRYCZNIE NIEZMIENNY (dotyczy $V = 0$ i $V < 0$)



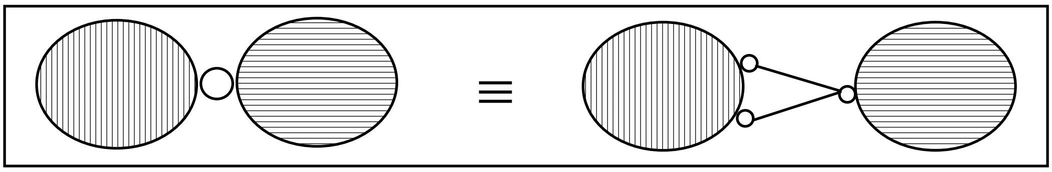
Twierdzenia o geometrycznie niezmiennym połączeniu 2 i 3 tarcz

✶ warunkiem koniecznym i wystarczającym połączenia 2 tarcz w sposób geometrycznie niezmienny jest połączenie ich co najmniej trzema prętami ($V \le 0$), które nie są równoległe, ani ich kierunki nie przecinają się w jednym punkcie (środek chwilowego obrotu)

✶ warunkiem koniecznym i wystarczającym połączenia 3 tarcz w sposób geometrycznie niezmienny jest połączenie każdych dwóch co najmniej dwoma prętami ($V \le 0$) w taki sposób, aby pręty te nie były równoległe, ani też punkty przecięcia się kierunków prętów łączących każde dwoe tarcze nie leżały na jednej prostej, oraz aby nie schodziły się w jednym punkcie.

<u>Kratownice</u>

W kratownicach - tarcze (każdy pręt kratownicy stanowi jedną tarczę) połączone są przegubami, co odpowiada połączeniu 2 prętami

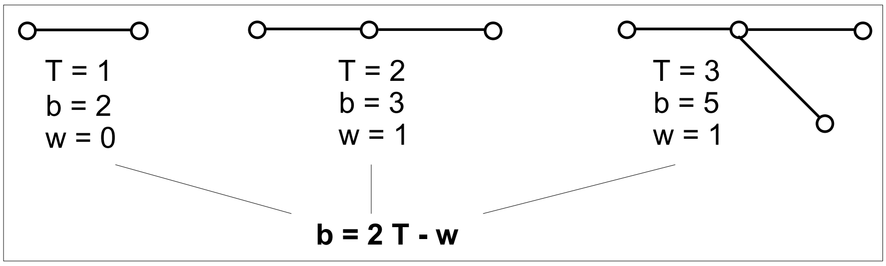


w - liczba węzłów (punktów, w których schodzą się co najmniej 2 tarcze, tzn. pręty kratownicy

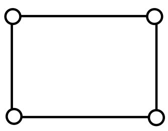
T - liczba tarcz (prętów kratownicy)

b - liczba biegunów prostych

$$V = 3 \times T - p - 3 \quad \Rightarrow \quad V = 3 \times T - 2 \times b - 3$$

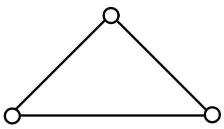


$$\boxed{V = 2\,w - T - 3}$$



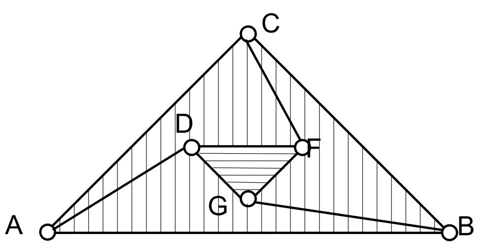
w = 4
T = 4
V = 2 × 4 - 4 -3 = 1

ukł. geometrycznie zmienny



w = 3
T = 3
V = 2 × 3 - 3 -3 = 1
+ tw. o geom. niezmienności 3 tarcz

ukł. geometrycznie niezmienny



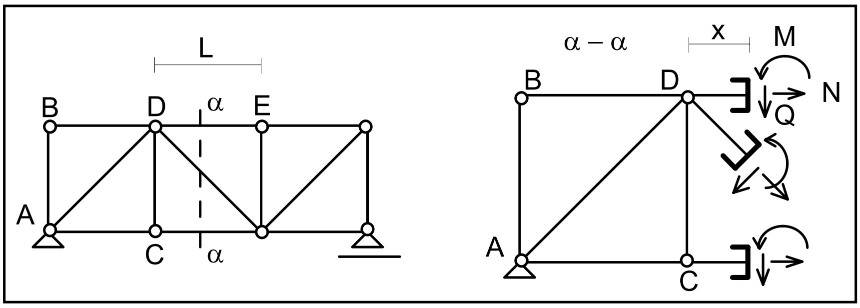
ukł. geometrycznie niezmienny

w = 6
T = 9
V = 2 × 6 - 9 -3 = 0
+ tw. o geom. niezmienności 2 tarcz

✶ **wewnętrzna geometryczna niezmienność kratownicy** - niezmienność kratownicy bez uwzględniania sposobu jej połączenia z podłożem

✶ **zewnętrzna geometryczna niezmienność kratownicy** - geometryczna niezmienność połączenia kratownicy z podłożem

Zredukowany układ sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym pręta kratownicy



na długości pręta DE $\qquad q(x) = 0$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M(x) = ax + b$$

$$M(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0$$

$$M(L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0$$

$$M \equiv 0 \quad , \quad Q \equiv 0$$

WNIOSEK: układ sił wewnętrznych redukuje się w przekroju poprzecznym każdego pręta kratownicy do siły podłużnej N.

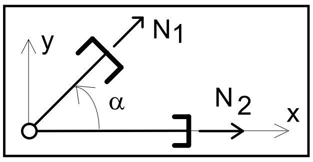
Twierdzenia o prętach zerowych

Definicja : pręt zerowy to pręt, w którym siła N=0

Twierdzenie : jeżeli kratownica obciążona dowolnym układem sił zewnętrznych pozostaje w równowadze, to w równowadze pozostaje również każdy węzeł obciążony siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi występującymi w przekrojach prętów schodzących się w tym węźle.

✶ **twierdzenie 1**

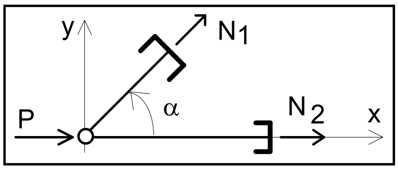
Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 2 pręty i węzeł jest nieobciążony, to siły wewnętrzne w obu prętach są równe zeru



$$\sum X = N_1 \cos\alpha + N_2 = 0 \qquad \sum Y = N_1 \sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \quad N_1, N_2 = 0$$

✶ **twierdzenie 2**

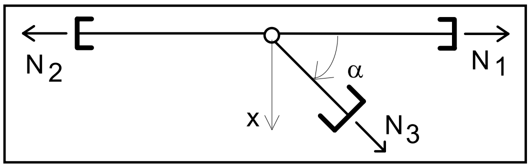
Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 2 pręty i węzeł jest obciążony siłą leżącą na kierunku jednego z nich, to siła wewnętrzne w drugim pręcie jest równa zeru



$$\sum Y = N_1 \sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \quad N_1 = 0$$

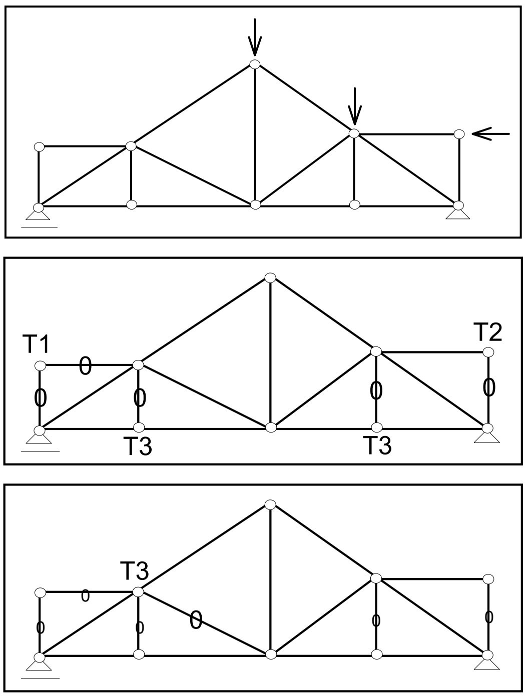
✶ **twierdzenie 3**

Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 3 pręty, z których dwa leżą na tej samej prostej i węzeł jest nieobciążony, to siła w trzecim pręcie jest równa zeru



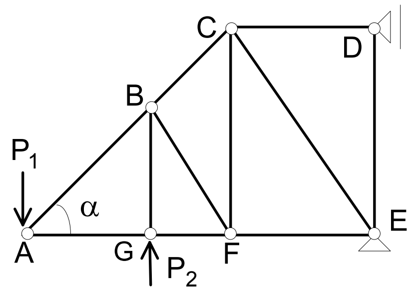
$$\sum X = N_3 \sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \quad N_3 = 0$$

✶ **ilustracja zastosowania twierdzeń o prętach zerowych**

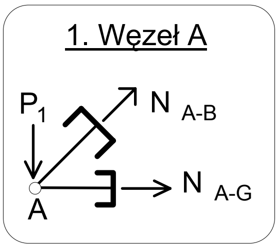


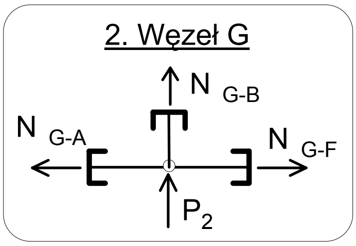
Metody rozwiązywania kratownic

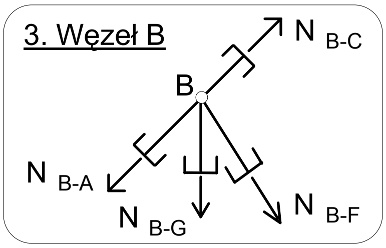
✶ **metoda równoważenia prętów**



w = 7
T = 11
r = 3
ilość niewiadomych : T + r
ilość równań : 2 w
V = 2 × 7 - 11 - 3





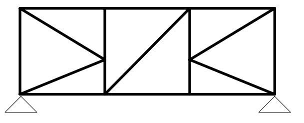


rów. równowagi węzła A

$$\sum Y = N_{A-B}\ \sin\alpha - P_1 = 0$$
$$\sum X = N_{A-B}\ \cos\alpha + N_{A-G} = 0$$

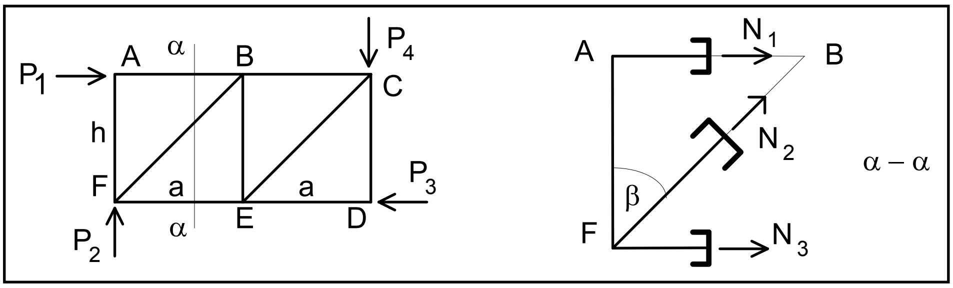
itd.

wady metody:
1. kolejność rozwiązywania jest zdeterminowana układem prętów,
2. duża liczba "rachunków"
3. kratownica bez węzła o 2 prętach nie może być "ręcznie" rozwiązana



w = 10 T = 17 r = 3
V = 2 × 10 - 17 - 3

✶ **metoda Rittera** - przekrój kraty przez 3 pręty nie schodzące się w jednym węźle



$$\sum M_F = N_1\,h + P_1\,h = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \ldots$$
$$\sum M_B = -N_3\,h + P_2\,a = 0 \quad \Rightarrow \quad N_3 = \ldots$$
$$\sum X = 0 \quad \text{lub} \quad \sum Y = 0 \quad ; \quad \sum Y = P_2 + N_2\cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \ldots$$

✶ **metoda Cremony** (graficzny odpowiednik metody równoważenia węzłów)