

1. CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

Oznaczenia:

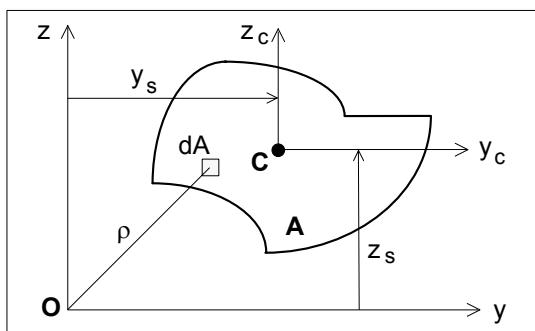
(y, z) - dowolny układ współrzędnych

(y_c, z_c) - centralny układ współrzędnych, "równoległy" do układu (y, z)

A - pole powierzchni figury

C - środek ciężkości figury

y_s, z_s - współrzędne środka ciężkości figury C w dowolnym ukł. współrzędnych (y, z)



1.1. Momenty statyczne

$$S_y = \iint_A z \, dA$$

$$S_z = \iint_A y \, dA$$

1.2. Położenie środka ciężkości C

$$z_s = S_y / A$$

$$y_s = S_z / A$$

1.3. Momenty bezwładności, moment dewiacji

$$I_y = \iint_A z^2 \, dA \quad (> 0)$$

$$I_z = \iint_A y^2 \, dA \quad (> 0)$$

$$I_o = \iint_A \rho^2 \, dA = \iint_A (y^2 + z^2) \, dA = I_z + I_y \quad (> 0)$$

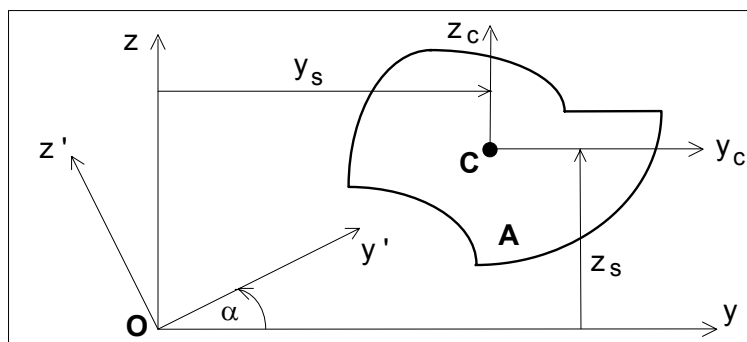
$$I_{yz} = \iint_A yz \, dA \quad (<=> 0)$$

1.4. Promienie bezwładności

$$i_y = \sqrt{I_y / A}$$

$$i_z = \sqrt{I_z / A}$$

2. Translacja układu współrzędnych - twierdzenie Steinera

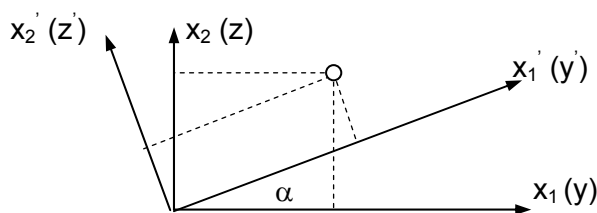


$$I_y = I_{y_c} + Az_s^2$$

$$I_z = I_{z_c} + Ay_s^2$$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + Ay_s z_s$$

3. Transformacja momentów bezwładności przy obrocie układu współrzędnych



$$x_1' = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$$

$$x_2' = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_i' = \alpha_{ik} x_k$$

$$I_y' = \iint_A z'^2 dA = \cos^2 \alpha \iint_A z^2 dA + \sin^2 \alpha \iint_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint_A y z dA$$

$$I_z' = \iint_A y'^2 dA = \cos^2 \alpha \iint_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \iint_A z^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint_A y z dA$$

$$I_{yz}' = \iint_A y' z' dA = \iint_A (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(-y \sin \alpha + z \cos \alpha) dA =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha (I_y - I_z) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) I_{yz}$$

$$I_y' = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_z' = I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y'z'} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

4. Główne osie i momenty bezwładności

Poszukiwany jest taki kąt, przy którym moment bezwładności I_y' jest maksymalny

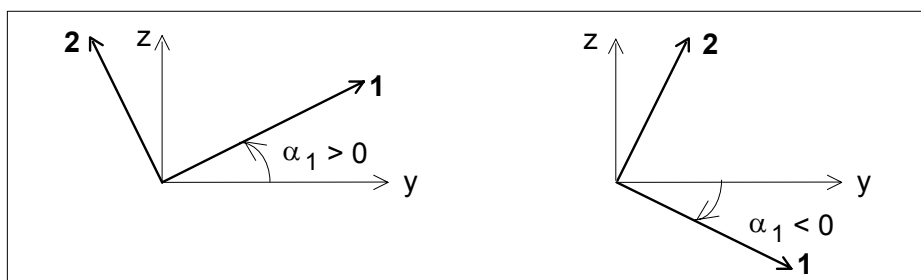
- war. konieczny istnienia ekstremum

$$\frac{dI_y'}{d\alpha} = -2 \cos \alpha \sin \alpha I_y + 2 \sin \alpha \cos \alpha I_z - 2 \cos 2\alpha I_{yz}$$

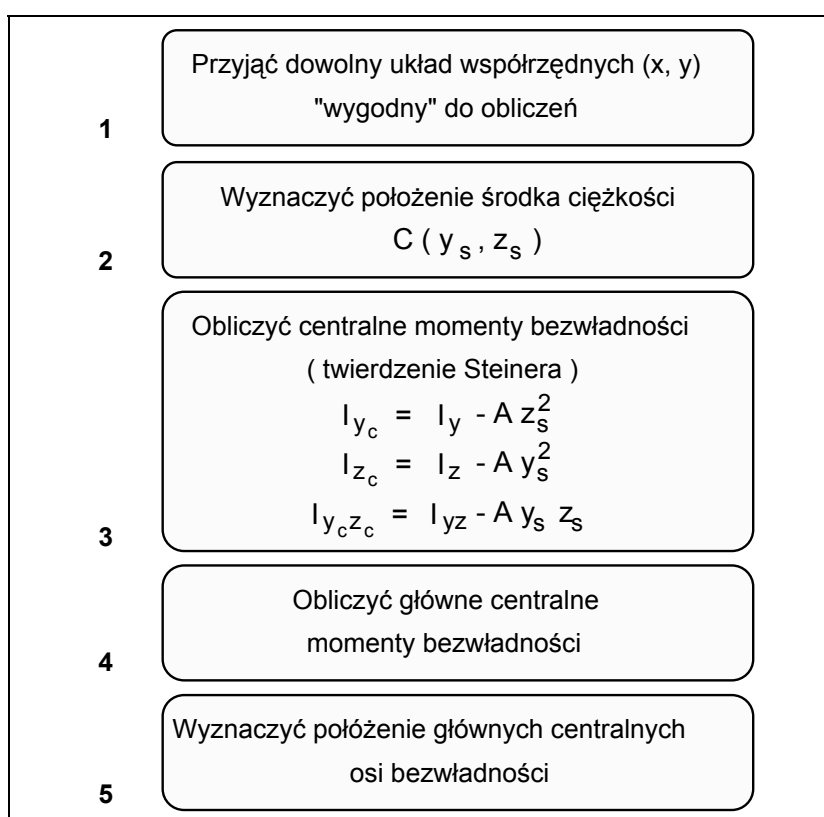
$$= -(I_y - I_z) \sin 2\alpha - 2 I_{yz} \cos 2\alpha = -2 I_{y'z'} = 0$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 I_{yz}^2}$$

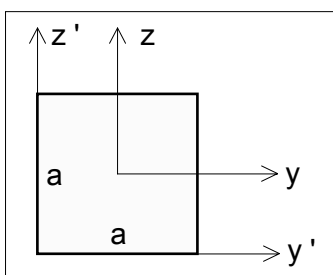
$$\tan \alpha_{1,2} = \frac{I_{yz}}{I_z - I_{1,2}}$$



5. Algorytm wyznaczania położenia głównych, centralnych osi bezwładności i obliczania głównych, centralnych momentów bezwładności

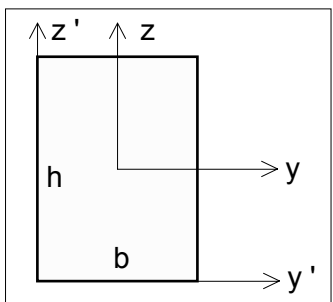


6. Charakterystyki wybranych przekrojów



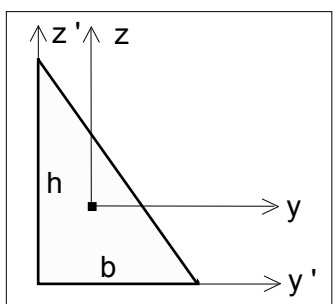
$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{y'} = I_{z'} = \frac{a^4}{3} ; I_{y'z'} = \frac{a^4}{4}$$



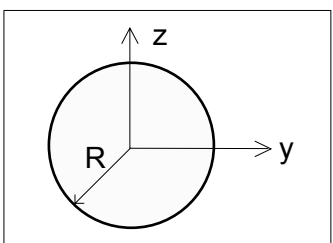
$$I_y = \frac{bh^3}{12} ; I_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{y'} = \frac{bh^3}{3} ; I_{z'} = \frac{hb^3}{3} ; I_{y'z'} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

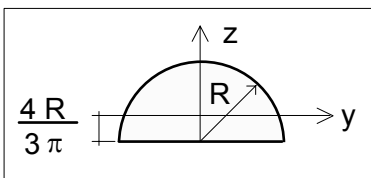


$$I_y = \frac{bh^3}{36} ; I_z = \frac{hb^3}{36} ; I_{yz} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

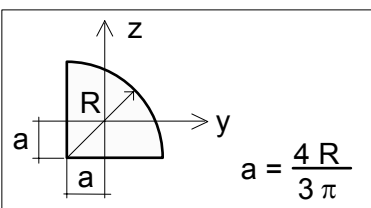
$$I_{y'} = \frac{bh^3}{12} ; I_{z'} = \frac{hb^3}{12} ; I_{y'z'} = \frac{b^2 h^2}{24}$$



$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$



$$I_y = 0.11R^4 ; I_z = \frac{\pi R^4}{8}$$



$$I_y = I_z = 0.055 R^4$$

$$I_{yz} = -0.0165 R^4$$