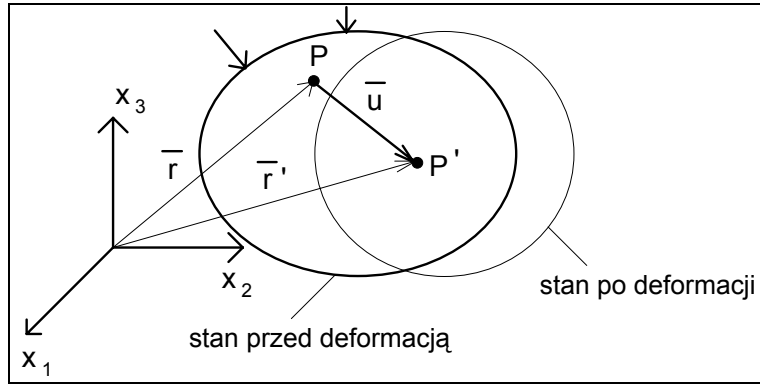


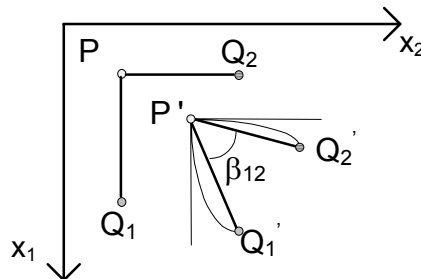
1. WEKTOR PRZEMIESZCZENIA



- ★ położenie pkt. P przed deformacją $P(\vec{r}) = P(x_1, x_2, x_3)$
- ★ położenie pkt. P po deformacji $P'(\vec{r}') = P'(x'_1, x'_2, x'_3)$
- ★ przemieszczenie punktu P $\overline{PP'} = \vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$
 $u_i = x'_i - x_i \quad i = 1, 2, 3$
 $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$
- ★ wektorowe pole przemieszczeń $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$

2. ODKSZTAŁCENIA LINIOWE I KĄTOWE

- ★ wybieramy 2 włókna : PQ_1 równoległe do osi x_1 i PQ_2 równoległe do x_2 .



- ★ odkształcenia liniowe (względna zmiana długości włókna PQ_i)

$$\epsilon_{11} = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{P'Q'_1 - PQ_1}{PQ_1}$$

$$\epsilon_{ij} = \lim_{\substack{dx_i \rightarrow 0 \\ Q_i \rightarrow P}} \frac{P'Q'_i - PQ_i}{PQ_i}$$

nie ma sumowania po "i"

- ★ odkształcenia kątowe

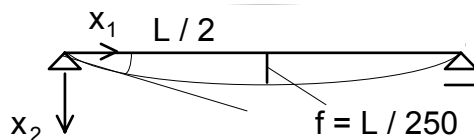
$$\epsilon_{12} = \lim_{\substack{dx_1 \rightarrow 0 \\ dx_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{12} \right)$$

$$\epsilon_{ij} = \lim_{\substack{Q_i \rightarrow P \\ Q_j \rightarrow P}} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{ij} \right) \Rightarrow 2\epsilon_{ij} = \gamma_{ij}$$

3. RÓWNANIA GEOMETRYCZNE

- ★ związki między przemieszczeniami i odkształceniami

założenie : pochodne przemieszczeń są wielkościami małymi



$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1 = 0) \cong \frac{L/250}{L/2} = 0.008 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \ll \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \cong 0$$

- ★ liniowe równania geometryczne - równania Cauchy'ego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$$

- ★ macierz (tensor) odkształcenia

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

- ★ dla płaskiego stanu odkształcenia w płaszczyźnie (x_1, x_2)

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

4. TRANSFORMACJA ODKSZTAŁCENI PRZY OBROCIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, ODKSZTAŁCENIA I KIERUNKI GŁÓWNE

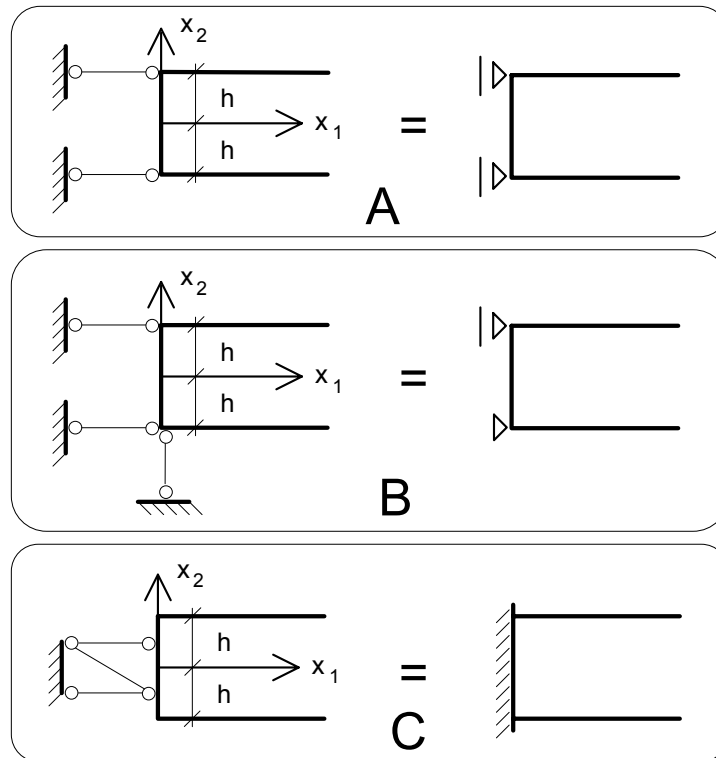
- ★ pełna analogia do płaskiego stanu naprężenia

5. KINEMATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

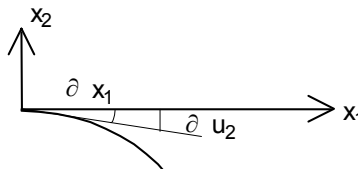
- ★ liniowe równania geometryczne (rów. Cauchy'ego) - 6 równań różniczkowych cząstkowych wzg. 3 nieznanymi funkcjami przemieszczeń

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

- ★ przemieszczenia muszą spełniać warunki wynikające ze sposobu podparcia konstrukcji – są to tzw. **kinematycznych warunków brzegowych**
- ★ przykłady kinematycznych warunków brzegowych



- A. $u_1(0, h) = 0$ $u_1(0, -h) = 0$
- B. $u_1(0, h) = 0$ $u_1(0, -h) = 0$ $u_2(0, -h) = 0$
- C. $u_1(0, 0) = 0$ $u_2(0, 0) = 0$ $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0, 0) = 0$



6. RÓWNANIA NIEROZDZIELNOŚCI ODKSZTAŁCENÍ

- liniowe równania geometryczne (rów. Cauchy'ego)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

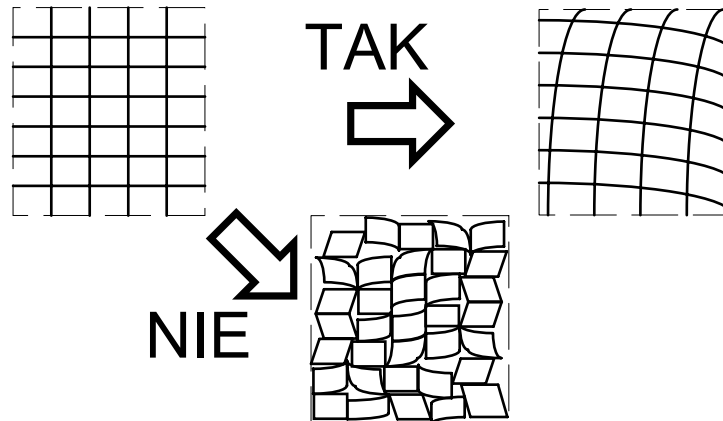
- 6 równań różniczkowych ze wzg. na niewiadome 3 funkcje przemieszczeń

- rozwiązanie istnieje tylko wówczas, gdy między odkształceniami zachodzą związki zwane **równaniami nierozdzielności**.

★ **liczba równań niezależnych wynosi 6**, zaś w płaskim stanie naprężenia istnieje tylko jedno równanie niezależne

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,12} = 0$$

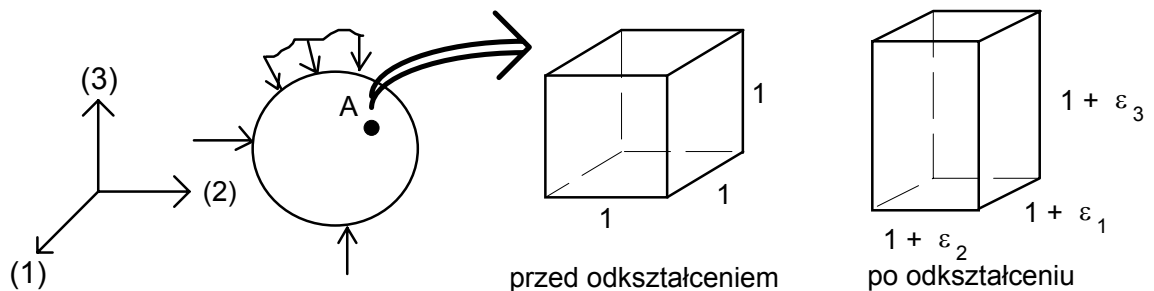
★ interpretacja geometryczna



7. DEFORMACJA SZEŚCIANU JEDNOSTKOWEGO

Problem : Określić zmianę objętości sześcianu o jednostkowych krawędziach ("obraz" punktu materialnego tzn. punktu o przypisanej masie).

A. W układzie współrzędnych określonym przez osie główne tensora odkształcenia



★ długości krawędzi sześcianu jednostkowego po odkształceniu

$$\epsilon_i = \frac{L_k^i - L_o^i}{L_o^i} \quad i = 1, 2, 3$$

$$L_o^i = 1 \quad \Rightarrow \quad L_k^i = 1 + \epsilon_i \quad i = 1, 2, 3$$

★ zmiana objętości sześcianu

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_k - V_o = (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) - 1 = \\ &= 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 - 1 \approx \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_i \end{aligned}$$

1. RÓWNANIA FIZYCZNE (KONSTYTUTYWNE)

Zadanie : Określić związek między odkształceniami i siłami wewnętrznymi, reprezentowanymi przez naprężenia.

- ★ zmienne stanu mechanicznego : czas " t ", temperatura " T "

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t, T)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k, t, T)$$

- ★ równania Naviera, równania Cauchy 'ego

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= 0 & \text{dla} & \quad t = t^*, T = T^* \\ \varepsilon_{ij} &= 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{dla} & \quad t = t^*, T = T^* \end{aligned}$$

- ★ równania konstytutywne

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, t, T)$$

2. RÓWNANIA FIZYCZNE DLA IZOTROPOWEGO, JEDNORODNEGO MATERIAŁU LINIOWO SPRĘŻYSTEGO (R. HOOKE 'A)

- ★ założenia:

1. jawna zależność odkształceń wyłącznie od naprężeń $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})$

2. liniowy związek między odkształceniami i naprężeniami

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^0 \quad \sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0$$

S_{ijkl} - macierz podatności (macierz współczynników materiałowych)

Q_{ijkl} - macierz sztywności (macierz współczynników materiałowych)

$\varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$ - macierze stałych

3. sprężystość - po zdjęciu obciążenia znikają odkształcenia : $\varepsilon_{ij}^0 = 0, \sigma_{ij}^0 = 0$

4. w każdym punkcie własności materiału są jednakowe w każdym kierunku (materiał **izotropowy i jednorodny**)

$$\sigma_{ij} = 2 G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

G, λ - stałe Lamé 'go

$$\sigma_{11} = 2 G \varepsilon_{11} + \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{22} = 2 G \varepsilon_{22} + \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{33} = 2 G \varepsilon_{33} + \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{12} = 2 G \varepsilon_{12} \quad \sigma_{13} = 2 G \varepsilon_{13} \quad \sigma_{23} = 2 G \varepsilon_{23}$$

- odwrotna postać prawa Hooke'a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

E (moduł Young'a , moduł sprężystości), ν (współczynnik Poisson'a)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \quad \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}$$

★ wprowadźmy następujące definicje

$$\frac{1}{2G} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+\nu}{E} \Rightarrow \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad \text{moduł ścinania, mod. odksz. postaciowego}$$

$$\frac{\lambda}{2G+3\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\nu}{1+\nu} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

★ ograniczenia na stałe materiałowe

1) z termodynamiki wynika, że stałe G , λ , muszą być dodatnie

2) dodatnie wartości modułów ścinania i ściśliwości oznaczają, że zachodzą relacje:

$$\begin{aligned} 1+\nu > 0 & \quad \nu > -1 \\ 1-2\nu > 0 & \quad \nu < 0.5 \end{aligned}$$

$$\boxed{-1 < \nu < 0.5} \quad \text{ograniczenia na stałą } \nu$$

★ zmiana objętości $\Delta V = \varepsilon_{ii} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m$

- jeżeli $\nu \rightarrow 0.5$ to $\Delta V \rightarrow 0$ - materiał nieściśliwy (guma)

- materiały o $\nu < 0$ nie są znane

- maksymalna zmiana objętości dla $\nu = 0$ (~ korek)