## 1. CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

**Oznaczenia:**

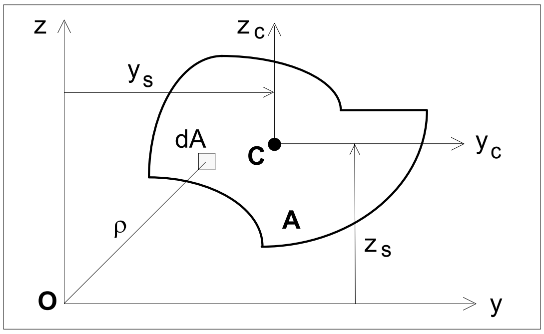
(y, z) - dowolny układ współrzędnych

($y_c$, $z_c$) - centralny układ współrzędnych, "równoległy" do układu (y, z)

A - pole powierzchni figury

C - środek ciężkości figury

$y_s$, $z_s$ - współrzędne środka ciężkości figury C w dowolnym ukł. współrzędnych (y, z)




1.1. Momenty statyczne $S_y = \iint_A z\,dA$ $\quad S_z = \iint_A y\,dA$

1.2. Położenie środka ciężkości C $z_s = S_y/A$ $\quad y_s = S_z/A$

1.3. Momenty bezwładności, moment dewiacji

$$I_y = \iint_A z^2\,dA \quad (>0) \qquad I_z = \iint_A y^2\,dA \quad (>0)$$

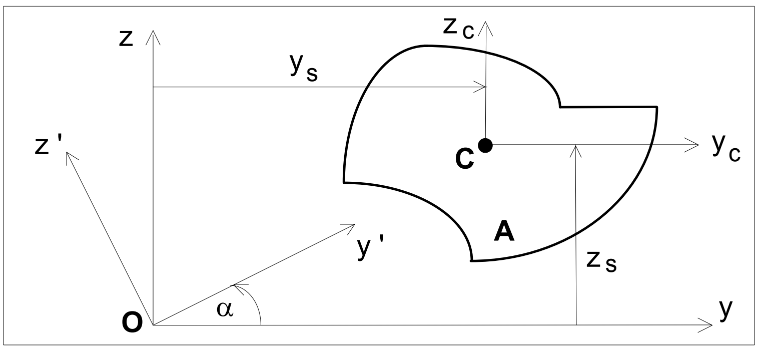
$$I_o = \iint_A \rho^2\,dA = \iint_A \left(y^2 + z^2\right) dA = I_z + I_y \quad (>0)$$

$$I_{yz} = \iint_A yz\,dA \quad (<=>0)$$

1.4. Promienie bezwładności

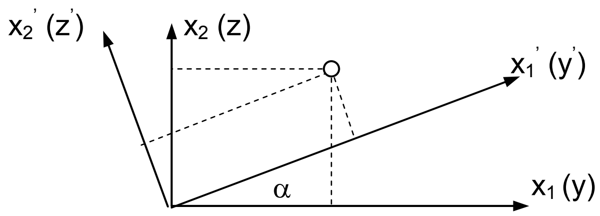
$$i_y = \sqrt{I_y/A} \qquad i_z = \sqrt{I_z/A}$$

## 2. Translacja układu współrzędnych - twierdzenie Steinera




$$I_y = I_{y_c} + A z_s^2 \qquad I_z = I_{z_c} + A y_s^2 \qquad I_{yz} = I_{y_c z_c} + A y_s z_s$$

## 3. Transformacja momentów bezwładności przy obrocie układu współrzędnych




$$x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$$

$$x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_i' = \alpha_{ik} x_k$$

$$I_y' = \iint_A z'^2 dA = \cos^2\alpha \iint_A z^2 dA + \sin^2\alpha \iint_A y^2 dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \iint_A y\,z\,dA$$

$$I_z' = \iint_A y'^2 dA = \cos^2\alpha \iint_A y^2 dA + \sin^2\alpha \iint_A z^2 dA + 2\sin\alpha\cos\alpha \iint_A y\,z\,dA$$

$$I_{yz}' = \iint_A y'\,z'\,dA = \iint_A (y\cos\alpha + z\sin\alpha)(-y\sin\alpha + z\cos\alpha)dA =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\,(I_y - I_z) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)I_{yz}$$

$$I_y' = I_y \cos^2\alpha + I_z \sin^2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_z' = I_y \sin^2\alpha + I_z \cos^2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{y'z'} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha$$

## 4. Główne osie i momenty bezwładności

Poszukiwany jest taki kąt, przy którym moment bezwładności $I_y'$ jest maksymalny

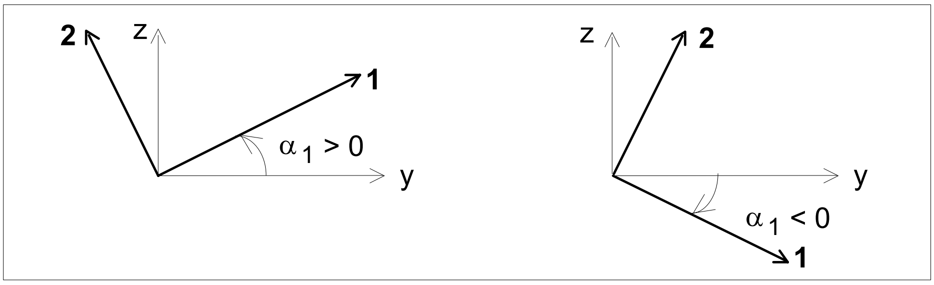
- war. konieczny istnienia ekstremum

$$\frac{dI_y'}{d\alpha} = -2\cos\alpha\sin\alpha\, I_y + 2\sin\alpha\cos\alpha\, I_z - 2\cos 2\alpha\, I_{yz}$$

$$= -(I_y - I_z)\sin 2\alpha - 2 I_{yz}\cos 2\alpha = -2 I_{y'z'} = 0$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 I_{yz}^2}$$

$$\tan\alpha_{1,2} = \frac{I_{yz}}{I_z - I_{1,2}}$$



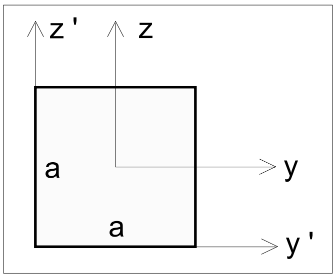

## 5. Algorytm wyznaczania położenia głównych, centralnych osi bezwładności i obliczania głównych, centralnych momentów bezwładności

1. Przyjąć dowolny układ współrzędnych (x, y) "wygodny" do obliczeń
2. Wyznaczyć położenie środka ciężkości $C(y_s, z_s)$
3. Obliczyć centralne momenty bezwładności (twierdzenie Steinera)

$$I_{y_c} = I_y - A z_s^2$$
$$I_{z_c} = I_z - A y_s^2$$
$$I_{y_c z_c} = I_{yz} - A y_s z_s$$

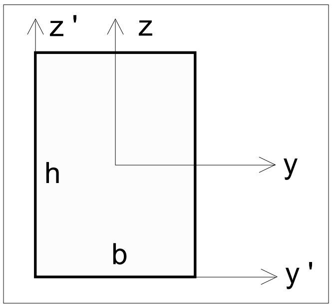
4. Obliczyć główne centralne momenty bezwładności
5. Wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności

## 6. Charakterystyki wybranych przekrojów



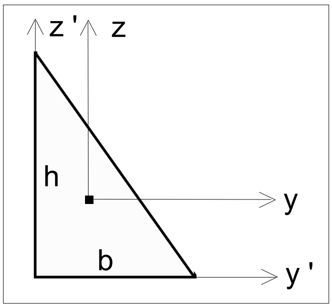

$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{y'} = I_{z'} = \frac{a^4}{3} \quad ; \quad I_{y'z'} = \frac{a^4}{4}$$



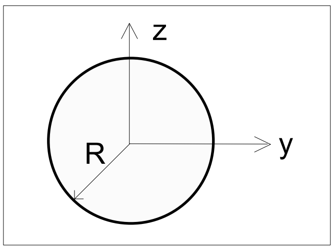

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{y'} = \frac{bh^3}{3} \quad ; \quad I_{z'} = \frac{hb^3}{3} \quad ; \quad I_{y'z'} = \frac{b^2h^2}{4}$$

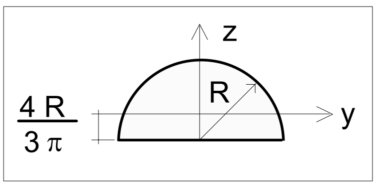



$$I_y = \frac{bh^3}{36} \quad ; \quad I_z = \frac{hb^3}{36} \quad ; \quad I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

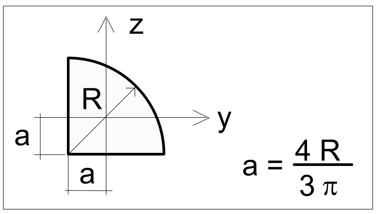
$$I_{y'} = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_{z'} = \frac{hb^3}{12} \quad ; \quad I_{y'z'} = \frac{b^2h^2}{24}$$




$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$




$$I_y = 0.11R^4 \quad ; \quad I_z = \frac{\pi R^4}{8}$$




$$I_y = I_z = 0.055\,R^4$$

$$I_{yz} = -0.0165\,R^4$$