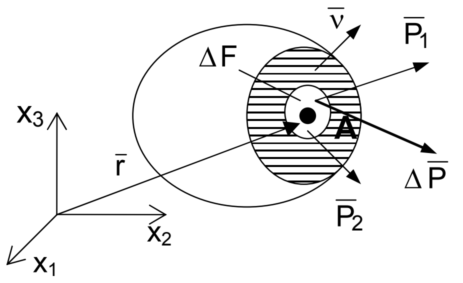
1. WEKTOR NAPRĘŻENIA



$\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ - wektory sił wewnętrznych w punktach powierzchni ΔF wokół punktu A

$$\overline{P}_i = \overline{P}_i\left(\bar{r}_i\,,\,\nu\right)$$

$\Delta\overline{P}$ - suma sił wewnętrznych na powierzchni ΔF

$$\Delta\overline{P} = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{P}_i = \sum_{\Delta F}\overline{P}_i$$

★ średnia gęstość sił wewnętrznych na powierzchni ΔF $\qquad \dfrac{\Delta\overline{P}}{\Delta F}$

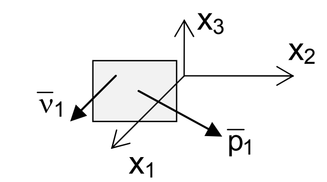
★ naprężenie w punkcie A : $\qquad \bar{p} = \lim\limits_{\Delta F \to 0}\dfrac{\Delta\overline{P}}{\Delta F} \qquad \bar{p} = \bar{p}\left(\bar{r}, \bar{\nu}\right)$ $\qquad$ funkcja wektorowa

2. STAN NAPRĘŻENIA W PUNKCIE

★ zbiór wektorów naprężenia w ustalonym punkcie przy dowolnej płaszczyźnie przekroju

$$\bar{r} = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{p} = \bar{p}\left(\bar{\nu}\right)$$

★ wybieramy 3 szczególne płaszczyzny przekroju - prostopadłe do osi układu współrzędnych



$\bar{p}_i = \bar{p}_i\left(\nu_i\right)$ wektor naprężenia przynależny płaszczyźnie prostopadłej do osi x_i

$\bar{\nu}_i$ wersory normalne płaszczyzn prostopadłych do osi x_i

$$\bar{p}_i = \bar{p}_i\left(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}\right) \qquad i = 1,2,3$$

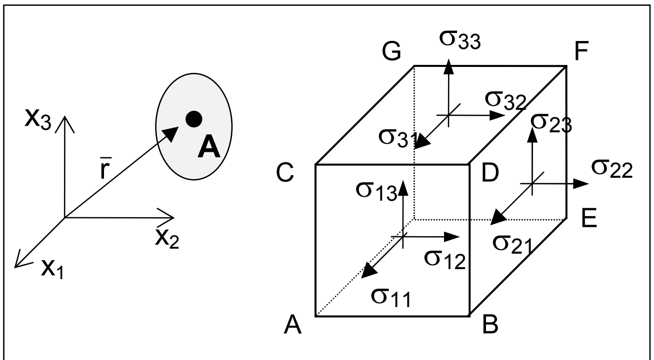
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(x_1\, x_2\, x_3,\right) \qquad i, j = 1,2,3 \qquad \text{funkcja skalarna 3 skalarów}$$

★ macierz naprężenia

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} - naprężenia normalne, pozostałe to napr. styczne

3. KONWENCJA ZNAKOWANIA NAPRĘŻEŃ



★ **napręż. normalne** jest dodatnie, jeżeli jest zgodnie skierowane z normalną zewnętrzną płaszczyzny

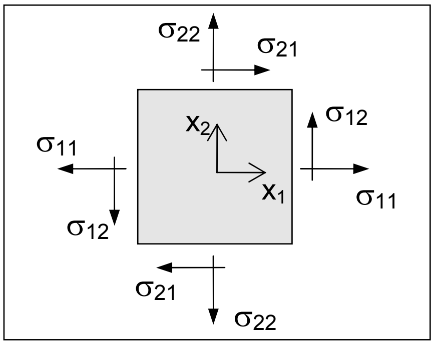
★ **napr. styczne** jest dodatnie, jeżeli:

1) normalna zewnętrzna płaszczyzny jest zgodnie skierowana z osią układu, do której jest ona równoległa

2) naprężenie styczne jest zgodnie skierowane z osią układu, do której jest ono równoległe lub gdy oba warunki są jednocześnie niespełnione.

4. PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA

★ stan naprężenia, dla którego wszystkie składowe leżą w jednej płaszczyźnie, np. (x_1, x_2).



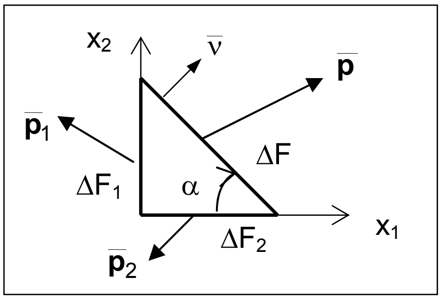
★ tensor naprężenia

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

4.1 Wektor naprężenia w dowolnej płaszczyźnie

Wyznaczyć współrzędne wektora naprężenia $\overline{\mathbf{p}}$ w pkt. A płaszczyzny o wersorze normalnym $\overline{\nu}$ znając macierz naprężenia w tym punkcie.

Wycinamy z ciała element trójkątny (o grubości=1), o polu ścianki ukośnej ΔF oraz polach ścianek prostopadlych do osi x_1 i x_2 odpowiednio ΔF_1, ΔF_2.



$\overline{\mathbf{p}}\left(p_{\nu 1}, p_{\nu 2}\right)$ $\quad\overline{\mathbf{p}}_1\left(\sigma_{11}, \sigma_{12}\right)$ $\quad\overline{\mathbf{p}}_2\left(\sigma_{21}, \sigma_{22}\right)$

$\overline{\nu}\left(\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}\right)$

$$\alpha_{\nu 1} = \cos\left(\overline{\nu}, x_1\right) = \frac{\Delta F_1}{\Delta F} \qquad \alpha_{\nu 2} = \cos\left(\overline{\nu}, x_2\right) = \frac{\Delta F_2}{\Delta F}$$

$$\alpha_{\nu 1} = \sin\alpha \qquad \alpha_{\nu 2} = \cos\alpha$$

★ siły działające na ściankach ΔF_i $\qquad \Delta\overline{P}_i = \overline{p}_i\,\Delta F_i$

★ siła działająca na ściance ΔF $\qquad \Delta\overline{P} = \overline{p}\,\Delta F$

★ warunek równowagi sił (zamknięty przestrzenny wielobok sił)

$$\Delta\overline{P} = \Delta\overline{P}_1 + \Delta\overline{P}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{p}\Delta F = \overline{p}_1\Delta F_1 + \overline{p}_2\Delta F_2$$

$$\overline{p} = \overline{p}_1\frac{\Delta F_1}{\Delta F} + \overline{p}_2\frac{\Delta F_2}{\Delta F} = \overline{p}_1\alpha_{\nu 1} + \overline{p}_2\alpha_{\nu 2}$$

$$\begin{cases} p_{\nu 1} = \sigma_{11}\alpha_{\nu 1} + \sigma_{21}\alpha_{\nu 2} \\ p_{\nu 2} = \sigma_{12}\alpha_{\nu 1} + \sigma_{22}\alpha_{\nu 2} \end{cases}$$

★ symetria macierzy naprężeń $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (wynika ona ze sprawdzenia, że moment układu sił powierzchniowych i masowych działających na ciało jest równa zero)

$$\begin{cases} p_{\nu 1} = \sigma_{11}\alpha_{\nu 1} + \sigma_{12}\alpha_{\nu 2} \\ p_{\nu 2} = \sigma_{21}\alpha_{\nu 1} + \sigma_{22}\alpha_{\nu 2} \end{cases}$$

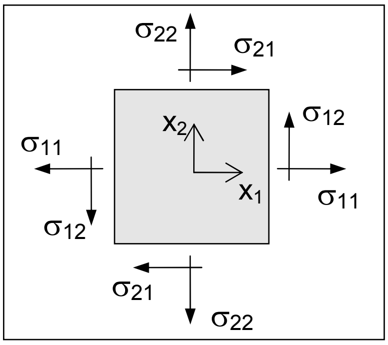
★ współrzędne wektora naprężenia na ściance o normalnej $\overline{\nu}$ (konwencja sumacyjna)

$$p_{\nu i} = \sigma_{ij}\alpha_{\nu j} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} p_{\nu 1} \\ p_{\nu 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \end{bmatrix}$$

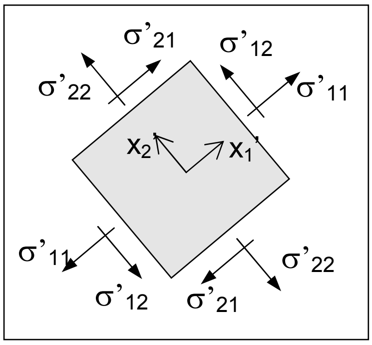
Macierz naprężenia pozwala wyznaczyć wektor naprężenia odpowiadający dowolnej płaszczyźnie – niesie zatem pełną informację o stanie naprężenia w punkcie.

4.2. Transformacja składowych macierzy naprężenia

Jaką postać mają składowe macierzy naprężenia T_σ określonej w ukł. współrzędnych (x_1, x_2) w nowym układzie (x_1', x_2') obróconym o kąt α względem ukł. pierwotnego

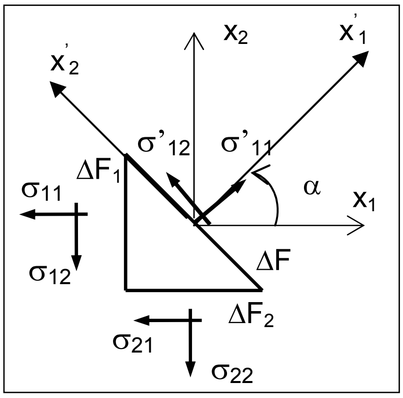


$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{T}'_\sigma \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix}$$

Wycinamy z ciała element trójkatny, którego 2 ściany są równoległe do osi układu pierwotnego, a ścianka ukośna jest prostopadła do pierwszej osi układu nowego. poszukujemy zatem związku naprężeń σ'_{11} i σ'_{12} z naprężeniami σ_{11}, σ_{12} i σ_{22}. Sprawdzamy równowagę sił:



$$\sum P_1' = 0$$

$$\sigma'_{11}\,\Delta F = \sigma_{22}\,\Delta F_2 \sin\alpha + \sigma_{11}\,\Delta F_1 \cos\alpha + \sigma_{12}\,\Delta F_1 \sin\alpha + \sigma_{21}\,\Delta F_2 \cos\alpha$$

$$\sigma'_{11} = \sigma_{22}\sin^2\alpha + \sigma_{11}\cos^2\alpha + \sigma_{12}\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_{21}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11}\cos^2\alpha + \sigma_{22}\sin^2\alpha + \sigma_{12}\sin 2\alpha$$

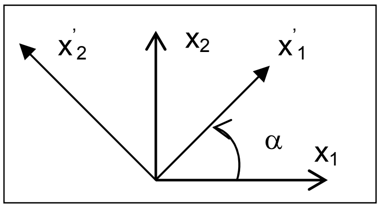
$$\sum P_2' = 0$$

$$\sigma'_{12}\,\Delta F = \sigma_{22}\,\Delta F_2 \cos\alpha - \sigma_{11}\,\Delta F_1 \sin\alpha + \sigma_{12}\,\Delta F_1 \cos\alpha - \sigma_{21}\,\Delta F_2 \sin\alpha$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{11}\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_{12}\cos^2\alpha - \sigma_{21}\sin^2\alpha$$

$$\sigma'_{12} = -\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos\alpha\sin\alpha - \sigma_{12}\cos 2\alpha\right]$$

Dokonując analogicznego przekroju, ale płaszczyzną ukośną, prostopadłą do drugiej osi układu nowego otrzymamy naprężenia σ'_{22} i σ'_{21} Ostatecznie wzory transformacyjne dla macierzy naprężeń przy obrocie układu współrzędnych o kąt α maja postać:



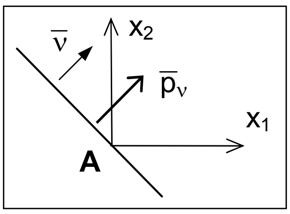
$$\sigma'_{11} = \sigma_{11}\cos^2\alpha + \sigma_{22}\sin^2\alpha + \sigma_{12}\sin 2\alpha$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11}\sin^2\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha - \sigma_{12}\sin 2\alpha$$

$$\sigma'_{12} = \pm\left[(\sigma_{22} - \sigma_{11})\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_{12}\cos 2\alpha\right]$$

4.3. Naprężenia główne

Poszukujemy takiej płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt, aby odpowiadający jej wektor naprężenia $\overline{p}_\nu$ miał taki sam kierunek jak wersor normalny płaszczyzny $\overline{\nu}$.



$$\overline{p}_\nu = (p_{\nu 1}\,;\,p_{\nu 2})$$

$$\overline{\nu} = (\alpha_{\nu 1}\,;\,\alpha_{\nu 2})$$

σ - miara wektora $\overline{p}_\nu$

Zauważmy, że utożsamiając kierunek wersora normalnego płaszczyzny z kierunkiem np. "1" osi nowego układu, wektor naprężenia tworzący pierwszy wiersz 'nowego" tensora naprężenia miałby niezerową tylko pierwszą składową - składową normalną. Byłaby ona największa spośród wszystkich możliwych. Takie naprężenie **normalne** nosi nazwę naprężenia **głównego**, a odpowiadająca mu płaszczyzna to płaszczyzna **główna**.

✶ warunek kolinearności $\bar{p}_\nu = \sigma\,\bar{\nu} \quad \Rightarrow \quad p_{\nu i} = \sigma\,\alpha_{\nu i}$

✶ wektor naprężenia $\bar{p}_\nu = T_\sigma\,\bar{\nu} \quad \Rightarrow \quad p_{\nu i} = \sigma_{ij}\,\alpha_{\nu j}$

✶ zagadnienie własne $T_\sigma\,\nu = \sigma\,\nu \quad \Rightarrow \sigma_{ij}\,\alpha_{\nu j} = \sigma\,\alpha_{\nu i}$

$$\boxed{\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\sigma\right)\alpha_{\nu j} = 0 \quad + \quad \alpha_{\nu j}\,\alpha_{\nu j} = 1 \text{ (war. jednostkowej dług. wersora)}}$$

Warunek konieczny istnienia rozwiązania ze wzg. na elementy macierzy przejścia

$$\det\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\sigma\right| = 0 \qquad \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^2 - I_1\sigma + I_2\,\sigma = 0 \qquad \text{(równ. charakterystyczne)}$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad , \quad I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix}$$

★ każdej z wartości głównych odpowiada płaszczyzna główna, określona wersorem normalnym

$$\sigma_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\nu}_1\left(\alpha_{11}, \alpha_{12}\right)$$

$$\sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\nu}_2\left(\alpha_{21}, \alpha_{22}\right)$$

★ wersory określające płaszczyzny główne są ortonormalne, tzn.

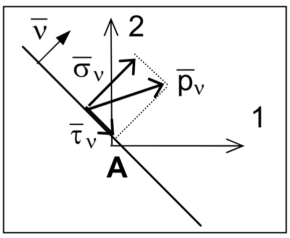
$$\bar{\nu}_i \circ \bar{\nu}_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + 4\sigma_{12}^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha_{1,2} = -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22} - \sigma_{1,2}}$$

★ pseudopłaski stan naprężenia - jak wyżej, ale $\sigma_{33} \neq 0$. Rezultaty jak dla PSN, a trzecie naprężenie główne $\sigma_3 = \sigma_{33}$

4.4. Ekstremalne naprężenia styczne

Problem : W punkcie A znany jest tensor naprężenia w osiach głównych. Jaką płaszczyzną należy przekroić ciało w pkt. A, aby miara rzutu wektora naprężenia odpowiadającego tej płaszczyźnie na nią samą była maksymalna?



$\bar{p}_\nu = \left(p_{\nu 1}\,;\,p_{\nu 2}\right)$ wektor naprężenia

$\bar{\nu} = \left(\alpha_{\nu 1}\,;\,\alpha_{\nu 2}\right)$ wersor normalny

σ_ν - miara rzutu wektora naprężenia $\bar{p}_\nu$ na normalną $\bar{\nu}$

τ_ν - miara rzutu wektora naprężenia $\bar{p}_\nu$ na płaszczyznę

$$\sigma_\nu = \bar{p}_\nu \circ \bar{\nu} = p_{\nu 1}\,\alpha_{\nu 1} + p_{\nu 2}\,\alpha_{\nu 2}$$

$$p_{\nu i} = \sigma_{ij}\,\alpha_{\nu j} \quad \Rightarrow \quad p_{\nu 1} = \sigma_1\,\alpha_{\nu 1} \quad p_{\nu 2} = \sigma_2\,\alpha_{\nu 2}$$

★ Procedura rozwiązania $\sigma_\nu = \sigma_1\,\alpha_{\nu 1}^2 + \sigma_2\,\alpha_{\nu 2}^2$ (1)

$$\left|\overline{p}_\nu\right|^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_\nu^2 = \left|\overline{p}_\nu\right|^2 - \sigma_\nu^2$$

$$\tau_\nu^2 = \sigma_1^2\alpha_{\nu1}^2 + \sigma_2^2\alpha_{\nu2}^2 - \left(\sigma_1\alpha_{\nu1}^2 + \sigma_2\alpha_{\nu2}^2\right)^2 \qquad (2)$$

\+ warunek $$\alpha_{\nu1}^2 + \alpha_{\nu2}^2 = 1 \qquad (3)$$

<u>Zadanie sprowadza się do znalezienia ekstremum funkcji (2) z warunkiem pobocznym (3)</u>

1) z war. (3) wyeliminować $\alpha_{\nu2}^2$ i wstawić do funkcji (2)

$$\tau_\nu^2 = \left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)\alpha_{\nu1}^2 + \sigma_2^2 - \left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\alpha_{\nu1}^2 + \sigma_2\right]^2$$

2) warunek konieczny istnienia ekstremum $\dfrac{\partial\tau_\nu^2}{\partial\alpha_{\nu1}} = 0$ + elementarne obliczenia

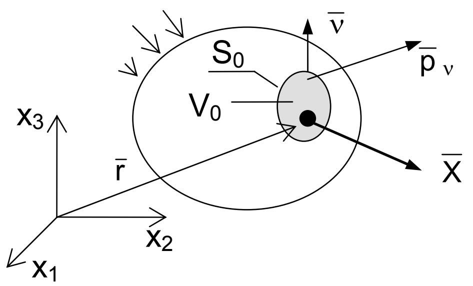
$$\overline{\nu}\ \left(\pm 0.707\,;\ \pm 0.707\right)$$

$$\tau_\nu\left(\pm 0.707\,;\ \pm 0.707\right) = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

<u>Rozwiązanie :</u> Naprężenia styczne osiągają swoje ekstrema na płaszczyznach nachylonych pod kątami 45° do płaszczyzn głównych.

5. RÓWNANIA RÓWNOWAGI (RÓWNANIA NAVIERA)

<u>Sformułowanie zagadnienia:</u> Dowolne ciało obciążone ukł. sił zewnętrznych (Z) $\equiv 0$ pozostaje w równowadze. Z wnętrza ciała wycinamy element o objętości V_o i powierzchni S_o. Określić warunki równowagi wyciętego elementu.



$X = (X_1, X_2, X_3)$ - wektor sił masowych w dowolnym punkcie wewnątrz objętości V_0

$\overline{p}_\nu = \left(p_{\nu1}\,;\ p_{\nu2}\,;\ p_{\nu3}\right)$ - wektor naprężenia w dowolnym punkcie na powierzchni S_0 o normalnej $\overline{\nu} = \left(\alpha_{\nu1}\,;\ \alpha_{\nu2}\,;\ \alpha_{\nu3}\right)$

★ tw. o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych

ukł. sił działających na wycięty element jest układem zerowym

$$\overline{S} = \iint\limits_{S_0} \overline{p}_\nu\, dS_0 + \iiint\limits_{V_0} \overline{X}\, dV_0 = \overline{0}$$

$$\overline{M} = \iint\limits_{S_0} \overline{r}\times\overline{p}_\nu\, dS_0 + \iiint\limits_{V_0} \overline{r}\times\overline{X}\, dV_0 = \overline{0}$$

★ warunek równowagi sił

$$S_i = \iint\limits_{S_0} p_{\nu i}\, dS_0 + \iiint\limits_{V_0} X_i\, dV_0 = 0$$

$$S_i = \iint\limits_{S_0} \sigma_{ij}\alpha_{\nu j}\, dS_0 + \iiint\limits_{V_0} X_i\, dV_0 = 0$$

$$\iint_{S_0} \sigma_{ij}\alpha_{\nu j} dS_0 = \iint_{S_0} \sigma_{ij}\cos\left(\overline{\nu}, x_j\right) dS_0 \overset{\text{tw. Greena-Gaussa-Ostrogradskiego}}{=} \iiint_{V_0} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV_0$$

$$S_i = \iiint_{V_0} \sigma_{ij,j}\, dV_0 + \iiint_{V_0} X_i\, dV_0 = \iiint_{V_0} \left(\sigma_{ij,j} + X_i\right) dV_0 = 0$$

Równania równowagi - równania Naviera

$$\boxed{\sigma_{ij,j} + X_i = 0}$$

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + X_1 = 0$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + X_2 = 0$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + X_3 = 0$$

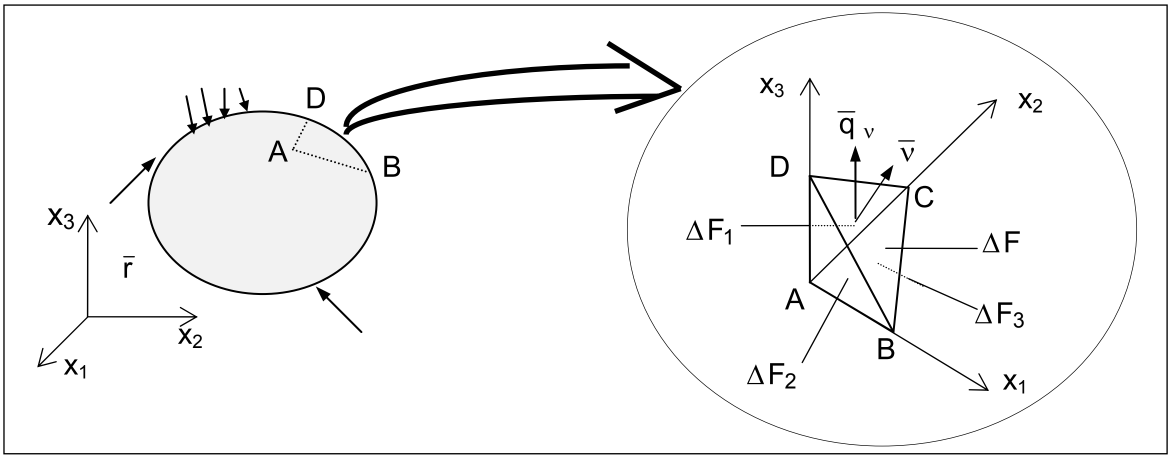
★ warunek równowagi momentów prowadzi do symetrii macierzy naprężenia $\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$

★ WNIOSKI

1) Macierz naprężenia zawiera 6 nieznanych składowych, których **nie można** wyznaczyć korzystając tylko z równań Naviera, których jest jedynie 3.
2) Równania Naviera są równaniami różniczkowymi, przy ich całkowaniu pojawią się zatem stałe całkowania. Wyznacza się je na podstawie analizy elementu ciała zawierającego część jego powierzchni zewnętrznej. Dzięki temu możliwe jest powiązanie naprężeń w punktach na powierzchni z obciążeniem zewnętrznym. **Relacje wiążące naprężenia z obciążeniem zewnętrznym ciała noszą nazwę statycznych warunków brzegowych.**

6. STATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

W celu **powiązania naprężeń z obciążeniem zewnętrznym** wycinamy z ciała element objętościowy w kształcie czworościanu, którego 3 ścianki są równoległe do płaszczyzn układu współrzędnych, a ścianka ukośna aproksymuje część powierzchni zewnętrznej ciała.



★ $\overline{q}_\nu$ - uśredniona gęstość obciążenia zewnętrznego na ściance Δ F o zewnętrznym wersorze normalnym $\overline{\nu}$

$$\overline{q}_\nu = \left(q_{\nu 1}, q_{\nu 2}, q_{\nu 3}\right)$$

$$\overline{\nu} = \left(\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \alpha_{\nu 3}\right)$$

★ $\overline{p}_i$ - uśrednione wektory naprężenia na ściankach ΔF_i

$$\overline{p}_i = \left(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3} \right)$$

★ warunek równowagi sił działających na czworościan $\overline{S} = \overline{0}$

Zauważmy, że poszukiwanie związku wektora $\overline{q}_\nu$ z wektorami naprężenia $\overline{p}_i$ jest formalnie identyczne z zadaniem wyznaczania wektora naprężenia na ściance Δ F jako funkcji wektorów naprężenia na ściankach ΔF_i (czyli składowymi tensora narężenia). Mamy zatem:

$$q_{\nu i} = \sigma_{ij}\,\alpha_{\nu j}$$

$$q_{\nu 1} = \sigma_{11}\,\alpha_{\nu 1} + \sigma_{12}\,\alpha_{\nu 2} + \sigma_{13}\,\alpha_{\nu 3}$$

$$q_{\nu 2} = \sigma_{21}\,\alpha_{\nu 1} + \sigma_{22}\,\alpha_{\nu 2} + \sigma_{23}\,\alpha_{\nu 3}$$

$$q_{\nu 3} = \sigma_{31}\,\alpha_{\nu 1} + \sigma_{32}\,\alpha_{\nu 2} + \sigma_{33}\,\alpha_{\nu 3}$$

★ WARUNKI KONIECZNE tego, aby dowolna macierz symetryczna II rzędu był macierzą naprężenia :

1) składowe macierzy muszą spełniać równania Naviera,

2) składowe macierzy muszą spełniać statyczne warunki brzegowe.