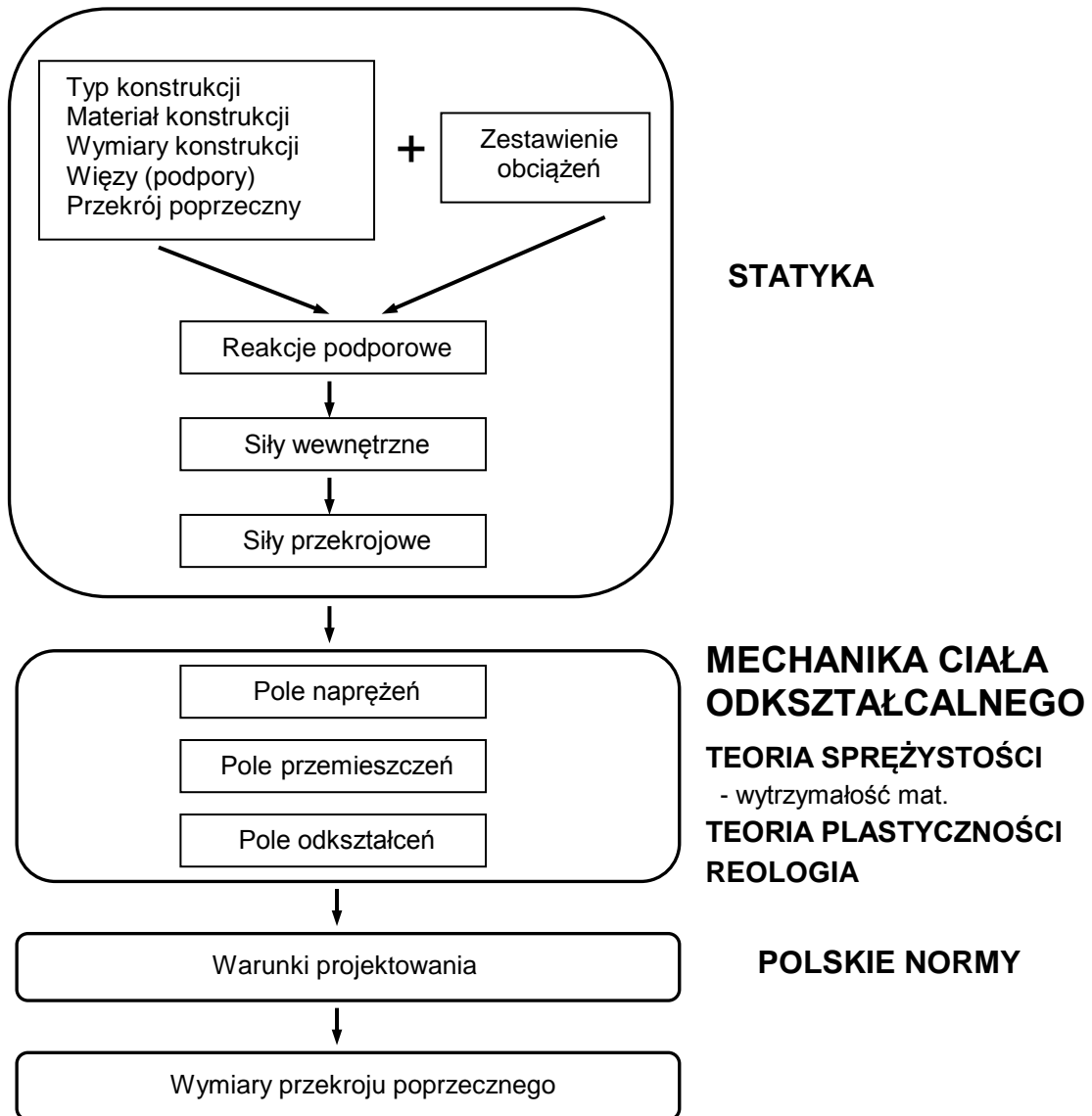


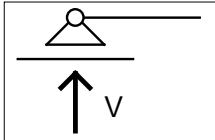
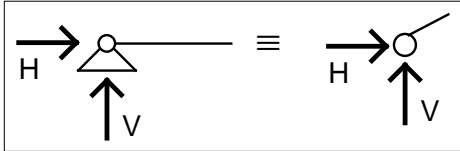
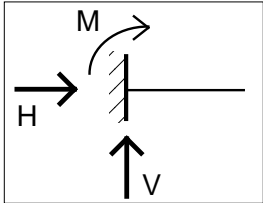
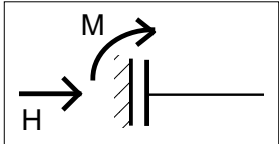
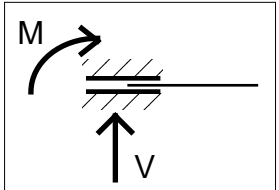
Wytrzymałość Materiałów - dział mechaniki stosowanej zajmujący się zachowaniem ciał stałych pod wpływem różnego typu obciążeń. Celem analizy tego zachowania jest wyznaczenie odpowiedzi ciała na działające obciążenie tzn. wyznaczenie naprężeń, odkształceń i przemieszczeń wszystkich punktów ciała.

1. Przedmiot i cel wytrzymałości materiałów



- ★ **Obciążenia** - charakterystyczne
- obliczeniowe (charakterystyczne × wsp. obc.)
- ★ **Normy obciążeniowe:**
 - PN-82/B-02000 Obciążenia budowli. Zasady ustalania wartości.
 - PN-82/B-02001 Obciążenia budowli. Obciążenia stałe.
 - PN-82/B-02003 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne. Podstawowe obciążenia technologiczne i montażowe
 - PN-82/B-02004 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne. Obciążenia pojazdami.
 - PN-80/B-02010 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie śniegiem.
 - PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem.
 - PN-88/B-02014 Obciążenia budowli. Obciążenie gruntem.
 - PN-87/B-02013 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe. Obciążenie oblodzeniem.
 - PN-86/B-02015 Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe. Obciążenie temperaturą.
 - PN-86/B-02005 Obciążenia budowli. Obciążenia suwnicami pomostowymi, wciągarkami i wciągnikami.

4. Wieży (podpory) i ich reakcje (siły bierne)

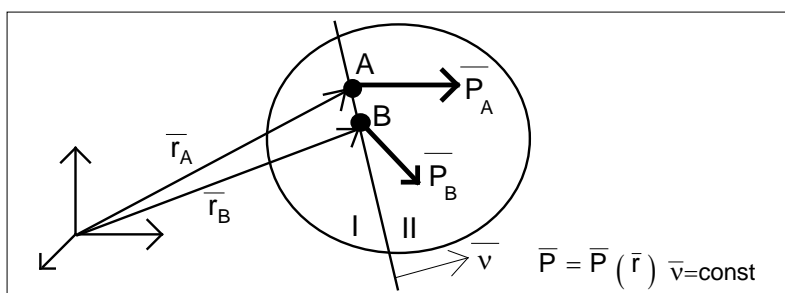
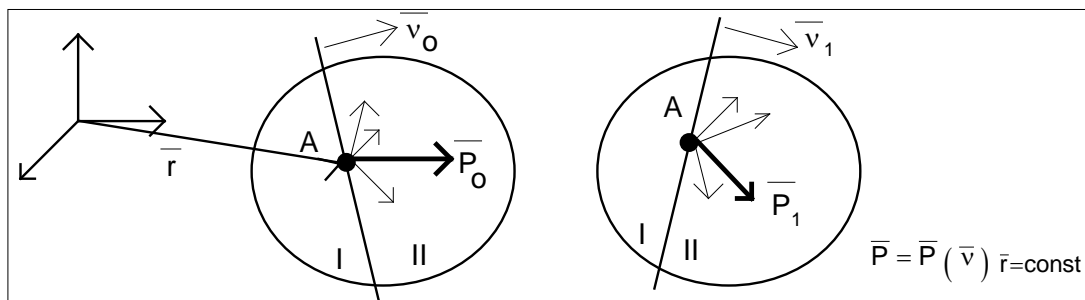
- ★ podpora przegubowo-przesuwna 
- ★ podpora przegubowo-nieprzesuwna 
- ★ pełne utwierdzenie 
- ★ utwierdzenie z przesuwem 
- ★ utwierdzenie z przesuwem 

**Polskie Normy dotyczące projektowania budynków i budowli,
wycofane ^{*)} z dniem 31 marca 2010 r., przez zastąpienie odpowiednimi
EUROKODAMI**

Lp.	PN wycofywana	Zastąpiona przez:
<i>KT 102 ds. Podstaw Projektowania Konstrukcji Budowlanych</i>		
1	PN-B-02000:1982 Obciążenia budowli -- Zasady ustalania wartości	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji
2	PN-B-02001:1982 Obciążenia budowli -- Obciążenia stałe	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1991-1-1:2004 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje -- Część 1-1: Oddziaływania ogólne -- Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach
3	PN-B-02003:1982 Obciążenia budowli -- Obciążenia zmienne technologiczne -- Podstawowe obciążenia technologiczne i montażowe	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1991-1-1:2004 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje -- Część 1-1: Oddziaływania ogólne -- Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach PN-EN 1991-1-6:2007 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje -- Część 1-6: Oddziaływania ogólne -- Oddziaływania w czasie wykonywania konstrukcji
4	PN-B-02004:1982 Obciążenia budowli -- Obciążenia zmienne technologiczne -- Obciążenia pojazdami	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1991-1-1:2004 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje -- Część 1-1: Oddziaływania ogólne -- Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach
5	PN-B-02005:1986 Obciążenia budowli -- Obciążenia suwnicami pomostowymi, wciągarkami i wciągnikami	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1991-3:2009 Eurokod 1 -- Oddziaływania na konstrukcje -- Część 3: Oddziaływania wywołane przez pracę dźwigów i maszyn
6	PN-B-02010:1980 Obciążenia w obliczeniach statycznych -- Obciążenie śniegiem PN-B-02010:1980/Az1:2006	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1991-1-3:2005 Eurokod 1 -- Oddziaływania na konstrukcje -- Część 1-3: Oddziaływania ogólne -- Obciążenie śniegiem
7	PN-B-02011:1977 Obciążenia w obliczeniach statycznych -- Obciążenie wiatrem	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1991-1-4:2008 Eurokod 1:

	PN-B-02011:1977/Az1:2009	Oddziaływania na konstrukcje -- Część 1-4: Oddziaływania ogólne -- Oddziaływania wiatru
8	PN-B-02014:1988 Obciążenia budowli -- Obciążenie gruntem	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1997-1:2008 Eurokod 7: Projektowanie geotechniczne - Część 1: Zasady ogólne
9	PN-B-02015:1986 Obciążenia budowli -- Obciążenia zmienne środowiskowe -- Obciążenie temperaturą	PN-EN 1990:2004 Eurokod -- Podstawy projektowania konstrukcji PN-EN 1991-1-5:2005 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje -- Część 1-5: Oddziaływania ogólne -- Oddziaływania termiczne

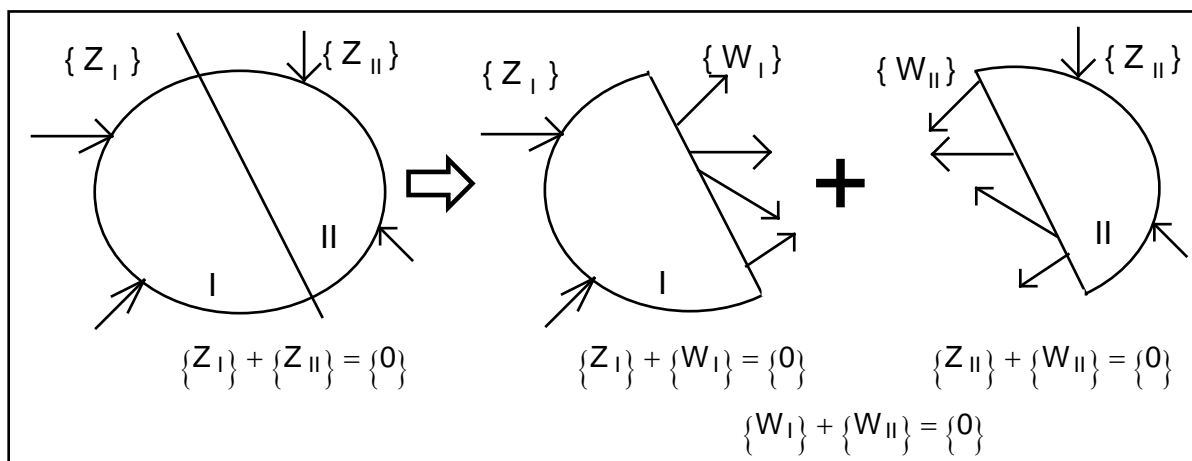
6. Siła wewnętrzna



$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}, \vec{v})$$

Siłą wewnętrzną nazywamy funkcję wektorową 2 wektorów - wektora wodzącego punktu A i wersora normalnego płaszczyzny, określającą wypadkową sił międzycząsteczkowych działających między wszystkimi punktami części II, wyznaczonej przez tę płaszczyznę i dowolnym punktem materialnym A leżącym na płaszczyźnie i należącym do części I.

7. Twierdzenie o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych.



$$\{W_{II}\} = \{Z_I\} \Rightarrow \mathbf{S}\{W_{II}\} = \mathbf{S}\{Z_I\} \quad ; \quad \mathbf{M}_O\{W_{II}\} = \mathbf{M}_O\{Z_I\}$$

$$\{W_I\} = \{Z_{II}\} \Rightarrow \mathbf{S}\{W_I\} = \mathbf{S}\{Z_{II}\} \quad ; \quad \mathbf{M}_O\{W_I\} = \mathbf{M}_O\{Z_{II}\}$$

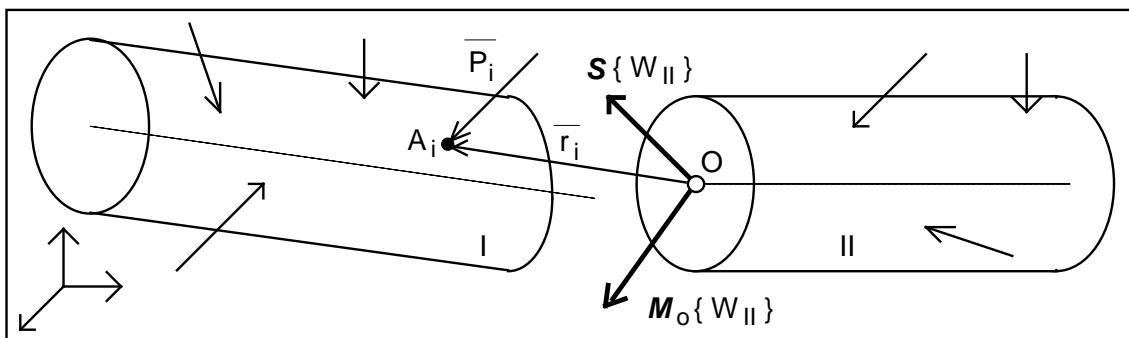
Równoważność układu sił zewnętrznych i wewnętrznych nie pozwala wyznaczyć układu sił wewnętrznych, gdyż układów równoważnych można znaleźć nieskończenie wiele. Oznacza ona jednak równość sum obu układów i momentów obu układów wzg. dowolnego punktu "O". Twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych pozwalają zatem w oparciu o znajomość układu sił zewnętrznych określić tzw. zredukowany (do punktu "O") układ sił wewnętrznych (tzn. sumę i moment ukł. sił wewnętrznych).

8. Siły przekrojowe w konstrukcjach prętowych

- ★ **Pręt** - bryła, której jeden wymiar (długość) jest nieporównywalnie duży w stosunku do dwu pozostałych (wymiały przekroju poprzecznego)
- ★ **Oś pręta** - miejsce położenia punktów będących środkami ciężkości przekrojów pręta płaszczyznami przecinającymi tworzące pręta
- ★ **Przekrój poprzeczny** - przekrój pręta płaszczyzną prostopadłą do osi pręta-

Zadanie : Wyznaczyć zredukowany układ sił wewnętrznych $\{ W_{II} \}$, tzn. wyznaczyć wektor sumy $S \{ W_{II} \}$ i wektor momentu $M_O \{ W_{II} \}$.

Zredukowanego układu sił wewnętrznych, poszukujemy w przekroju poprzecznym pręta, a środkiem redukcji jest środek ciężkości przekroju "O"

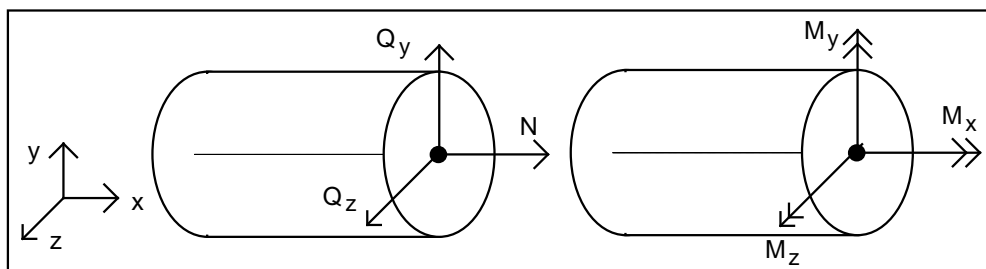


Rozwiązanie: Korzystając z twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych, a także uwzględniając zasadę zeszytnienia, możemy zapisać:

$$S\{W_{II}\} = \sum \bar{P}_i\{Z_I\} \qquad M_O\{W_{II}\} = \sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i\{Z_I\}$$

Składowe tak wyznaczonego wektora sumy i momentu nazywamy siłami przekrojowymi

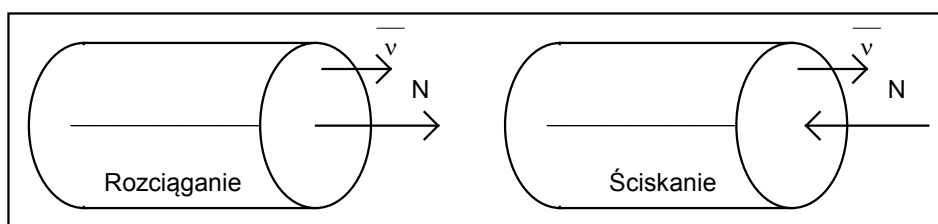
$$S \equiv \bar{S}(N, Q_y, Q_z) \qquad M_O \equiv \bar{M}(M_x, M_y, M_z)$$



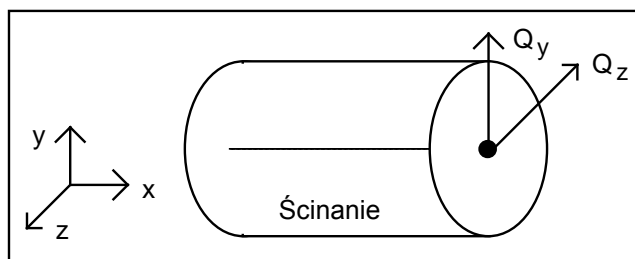
8.1. Podstawowe przypadki redukcji

Układ sił zewnętrznych $\{ Z_I \} \equiv \{ W_{II} \}$ może redukować się w środku ciężkości przekroju poprzecznego do:

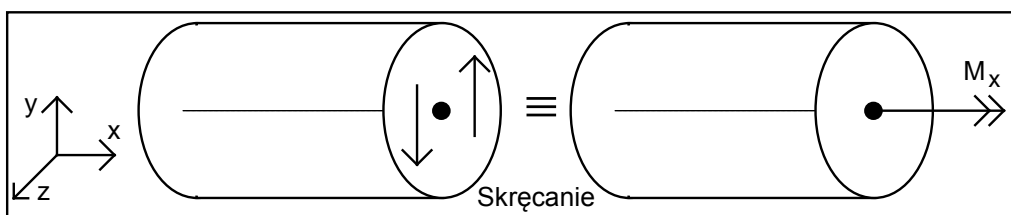
- ★ wypadkowej, prostopadłej do przekroju poprzecznego (siła **osiowa, normalna, podłużna**)



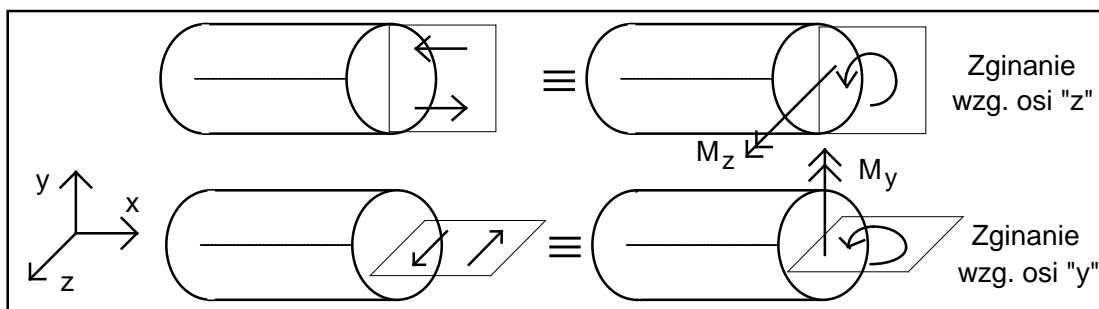
- ★ wypadkowej, leżącej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego (siła **poprzeczna, ścinająca, tnąca**)



- ★ pary sił leżącej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, a zatem pary o wektorze momentu normalnym do przekroju (**moment skręcający**)

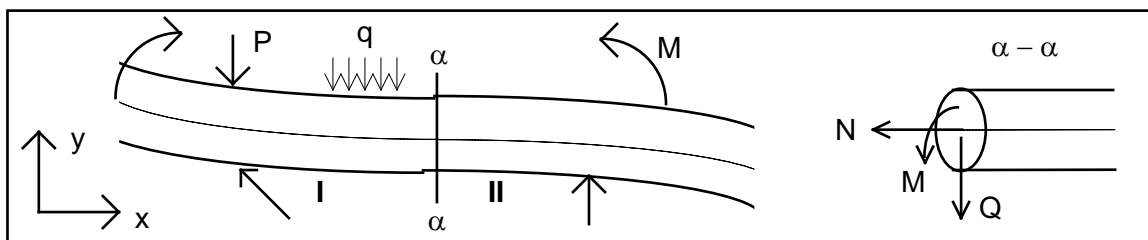


- ★ pary sił leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju poprzecznego, a zatem pary o wektorze momentu leżącym w płaszc. przekroju (**moment zginający**)



9. Statycznie wyznaczalne płaskie konstrukcje prętowe

Definicja: konstrukcje składające się z prętów, których osie leżą w jednej płaszczyźnie, obciążone układem sił określonym w tej samej płaszczyźnie i tak połączone z podłożem, że reakcje podporowe można wyznaczyć na podstawie jedynie równań równowagi.



9.1. Reakcje

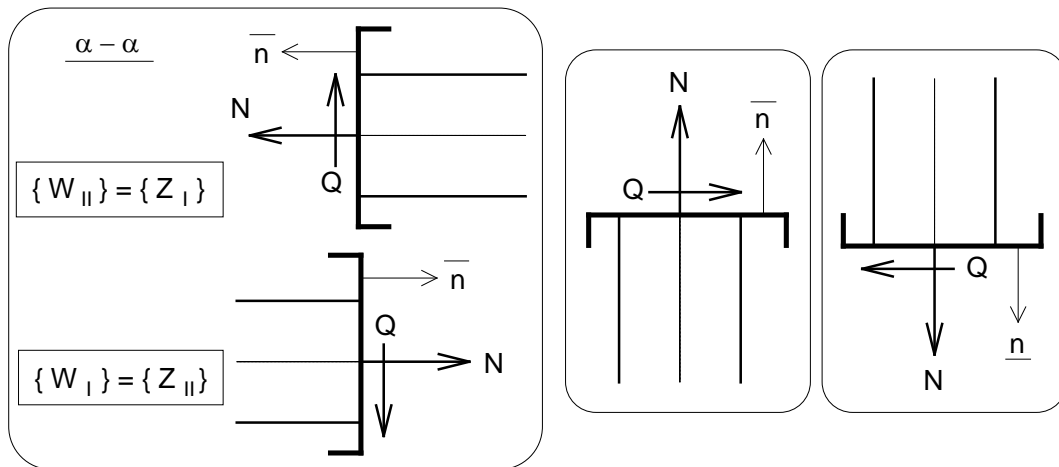
$$\begin{aligned} \sum Z &= 0 & \sum M_{ox} &= 0 & \sum M_{oy} &= 0 \\ \sum X &= 0 & \sum Y &= 0 & \sum M_{oz} &= \sum M = 0 \end{aligned}$$

9.2. Siły przekrojowe

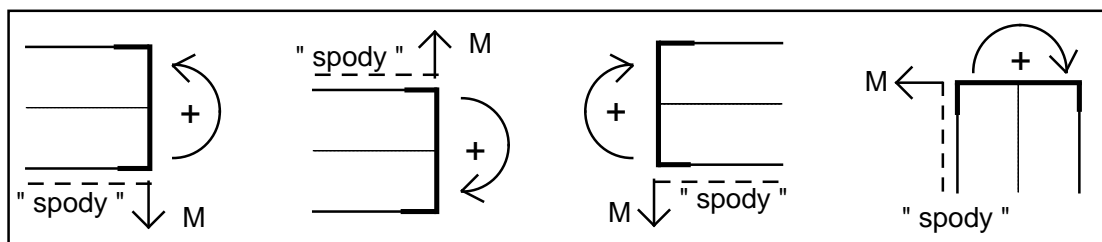
$$\bar{S}(N, Q \equiv Q_y, 0) = (N, Q) \quad \bar{M}(0, 0, M_z \equiv M) = (M)$$

9.3 Układ własny przekroju poprzecznego

Przy poszukiwaniu sił przekrojowych (poprzez redukcję obciążenia zewnętrznego) rezygnuje się z globalnego układu współrzędnych (x,y) na rzecz układu lokalnego związanego z przekrojem poprzecznym. Układ taki nosi nazwę **ukł. własnego** przekroju poprzecznego.



9.4. Konwencja znakowania momentu od pary sił, spody.



Umowa 1: graficznym reprezentatem momentu od pary sił będzie łuk skierowany. Za dodatni zwrot momentu przyjmujemy taki, który powoduje rozciąganie dowolnie wyróżnionych włókien pręta, zwanych **spodami**.

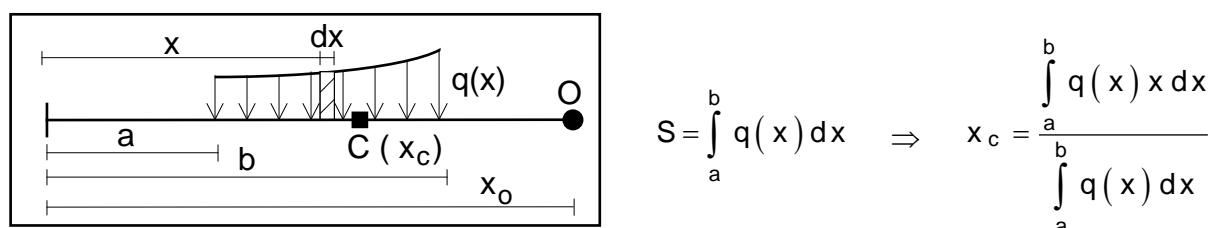
Umowa 2: Oś liczbowa, na której będziemy odkładać wartości momentów przekrojowych przyjmuje, y w ten sposób, że jest on prostopadła do przyjętych spodów, a jej dodatni zwrot "jest zgodny ze spodami".

9.5. Obliczanie momentu.

★ wektora \bar{a} względem punktu O



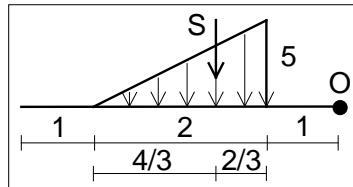
★ od obciążenia ciągłego wzg. pkt. O



$$M_o = \int_a^b q(x) dx (x_o - x) = \int_a^b q(x) x_o dx - \int_a^b q(x) x dx =$$

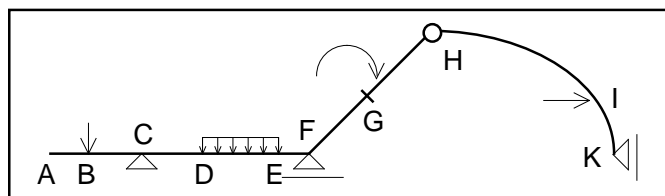
$$= x_o \int_a^b q(x) dx - x_c \int_a^b q(x) dx = S(x_o - x_c)$$

Przykład



$$M_o = 1/2 \times 5 \times 2 \times (1/3 \times 2 + 1) = 8.33$$

10. Punkty, przedziały charakterystyczne w konstrukcjach prętowych



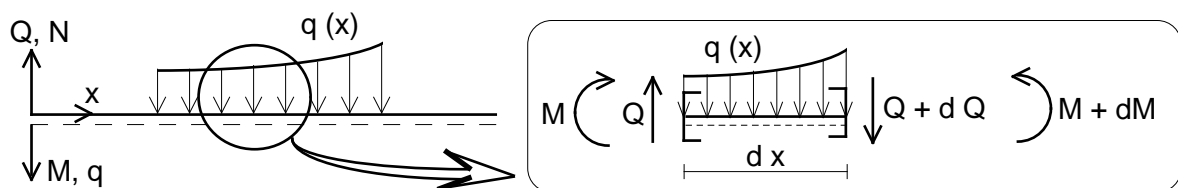
★ **Punkty charakterystyczne**

- początek, koniec pręta: A, K
- podpory: C, F, K
- punkty przyłożenia obciążenia: B, G, I
- początek i koniec obciążenia ciągłego: D, E
- miejsca zmiany geometrii pręta i punkty nieciągłości: H

★ **Przedziały charakterystyczne** - przedziały położone między pkt. charakteryst.

11. Zależności różniczkowe dla pręta prostego

Definicja: pręt prosty to pręt, którego oś jest linią prostą.



$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q - q(x) dx - Q - dQ = 0 \qquad \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow Q dx + M - q(x) dx \frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

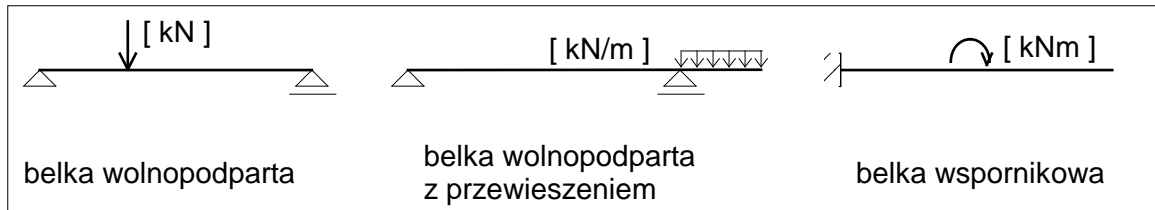
$$(dx)^2 \cong 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)$$

Wnioski:

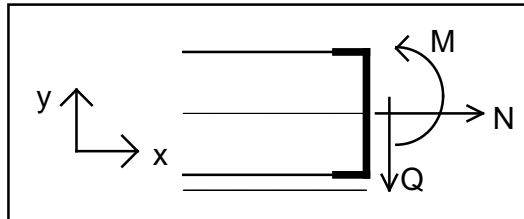
1. jeżeli $q=0$ to wykres funkcji $Q(x)$ jest stały, a funkcji $M(x)$ jest liniowy
2. jeżeli $q=const.$, to wykres funkcji $Q(x)$ jest liniowy, a funkcji $M(x)$ paraboliczny (2°)
3. między M i Q zachodzą wszystkie zależności, jakie wynikają z własności pochodnej

Belki proste.

- ★ **definicja:** konstrukcja prętowa, której oś jest linią prostą
- ★ **typy belek prostych :**



- ★ **siły przekrojowe N, Q, M**



- ★ **reakcje**

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M = 0$$

- ★ **procedura rozwiązywania belek**

1. Z równań równowagi obliczyć reakcje
2. Zapisać równania sił przekrojowych jako funkcje położenia przekroju, w jego układzie własnym (w przypadku M skorzystać z tzw. " spodów ")
3. Narysować na osi belki wykresy N, Q, M

