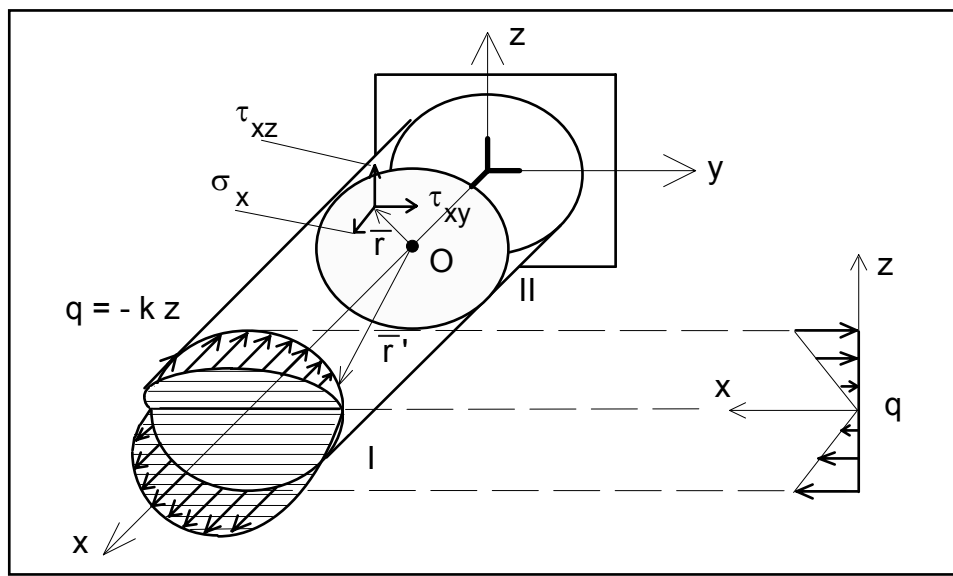


**1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA TZW. "CZYSTEGO ZGINANIA"**

**ZADANIE:** wyznaczyć tensor napręż.  $T_\sigma$ , tensor odksz.  $T_\epsilon$  i wektor przemieszczenia  $\bar{u}$ .



- \* pręt pryzmatyczny, utwierdzony "punktowo" w pkt. A (0,0,0)
- \* x - oś podłużna pręta, y, z - osie główne, centralne przekroju poprzecznego
- \* obciążenie zewnętrzne: denko  $\bar{q}(-kz, 0, 0)$   $k = \text{const}$   
pobocznica  $\bar{q}(0, 0, 0)$
- \* siły masowe  $\bar{P}(0, 0, 0)$

**2. ROZWIĄZANIE**

**2.1. Podejście statyczne do zagadnienia brzegowego**

"wymyślić" $T_\sigma$ sprawdzić stat. war. brzeg. sprawdzić równ. Naviera	wyznaczyć odkształcenia $e_{ij} = e_{ij}(s_{ij})$ sprawdzić równ. nierozdz. odksz.	wyznaczyć przemieszczenia $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ + kinematyczne war. brzegowe
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>

**2.2. Komplet równań TS**

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{1}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \tag{3}$$

+ statyczne warunki brzegowe

$$q_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj}$$

denko  $x = L$ ,  $\bar{v}(1, 0, 0)$

$$\begin{cases} -kz = \sigma_x \times 1 \\ 0 = \tau_{yx} \times 1 \\ 0 = \tau_{zx} \times 1 \end{cases} \tag{4a}$$

$$\text{pobocznicza } \bar{v} (0, \alpha_{vy} \neq 0, \alpha_{vz} \neq 0) \quad \begin{cases} 0 = \tau_{xy} \alpha_{vy} + \tau_{xz} \alpha_{vz} \\ 0 = \sigma_y \alpha_{vy} + \tau_{yz} \alpha_{vz} \\ 0 = \tau_{zy} \alpha_{vy} + \sigma_z \alpha_{vz} \end{cases} \quad (4b)$$

+ kinematyczne war. brzegowe w pkt. utwierdzenia A (0, 0,0)

$$u = v = w = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

★ - macierz naprężenia

$$\begin{matrix} \bar{S} (W_{II}) = \bar{S} (Z_I) \\ \bar{M} (W_{II}) = \bar{M} (Z_I) \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} -kz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

przykład - poszukiwanie I wiersza tensora naprężenia

$$\begin{aligned} \bar{M} (W_{II}) = \bar{M} (Z_I) &\Rightarrow \iint_A \bar{r} \times \bar{p} \, dA = \iint_A \bar{r}' \times \bar{q} \, dA \\ \bar{r} (0, y, z) &\quad \bar{r}' (L - x, y, z) \\ \bar{p} (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) &\quad \bar{q} (-kz, 0, 0) \\ \iint_A \sigma_x \, dA = \iint_A -kz \, dA &\quad \iint_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) \, dA = \iint_A (y0 - z0) \, dA \\ \iint_A \tau_{xy} \, dA = \iint_A 0 \, dA &\quad \iint_A z\sigma_x \, dA = \iint_A -kz^2 \, dA \\ \iint_A \tau_{xz} \, dA = \iint_A 0 \, dA &\quad \iint_A -y\sigma_x \, dA = \iint_A kzy \, dA \end{aligned}$$

Macierz naprężenia (6) spełnia równania równowagi (1) i statyczne war. brzegowe (4)

★ - macierz odkształceń (r.Hooke'a)

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\frac{k}{E}z & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{k}{E}z & 0 \\ 0 & 0 & \nu \frac{k}{E}z \end{pmatrix} \quad (7)$$

Macierz (7) spełnia równania nierozdzielności odkształceń, gdyż

$$\varepsilon_{ij,k} = \text{const} \Rightarrow \varepsilon_{ij,kl} \equiv 0$$

★ funkcje przemieszczeń (rów. Cauchy'ego)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{k}{E}z &\quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{k}{E}z &\quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \frac{k}{E}z &\quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{"CORN"} = \text{"CORJ"} + \text{"CSRN"} \Rightarrow u_i = u_i^o + u_i^s$$

- całka ogólna

$$u^o(y, z) = a + b y + c z$$

$$v^o(x, z) = d - b x + f z$$

$$w^o(x, y) = g - c x - f y$$

- całka szczególna równania niejednorodnego

$$u^s = -\frac{k}{E} z x$$

$$v^s = v \frac{k}{E} y z$$

$$w^s = v \frac{k}{2E} z^2 - v \frac{k}{2E} y^2 + \frac{k}{2E} x^2$$

- funkcje przemieszczeń

$$u(x, y, z) = -\frac{k}{E} x z + a + b y + c z$$

$$v(x, y, z) = v \frac{k}{E} y z + d - b x + f z \quad (9)$$

$$w(x, y, z) = \frac{k}{2E} (v z^2 - v y^2 + x^2) + g - c x - f y$$

Stałe całkowania a, b, c, d, f, g należy wyznaczyć z kinemat. war. brzegowych (5).

$$a = b = c = d = f = g = 0$$

$$u = -\frac{k}{E} x z$$

$$v = v \frac{k}{E} y z$$

(10)

$$w = \frac{k}{2E} (x^2 - v y^2 + v z^2)$$

**WNIOSEK** : Macierz naprężenia (6) macierz odkształcenia (7) i wektor przemieszczenia (10) spełniają ściśle komplet równań teorii sprężystości wraz ze statycznymi i kinematycznymi war. brzegowymi. Są więc **ściśłym rozwiązaniem zagadnienia czystego rozciągania** dla pręta stanowiącego przedmiot analizy.

### 3. ANALIZA ROZWIĄZANIA

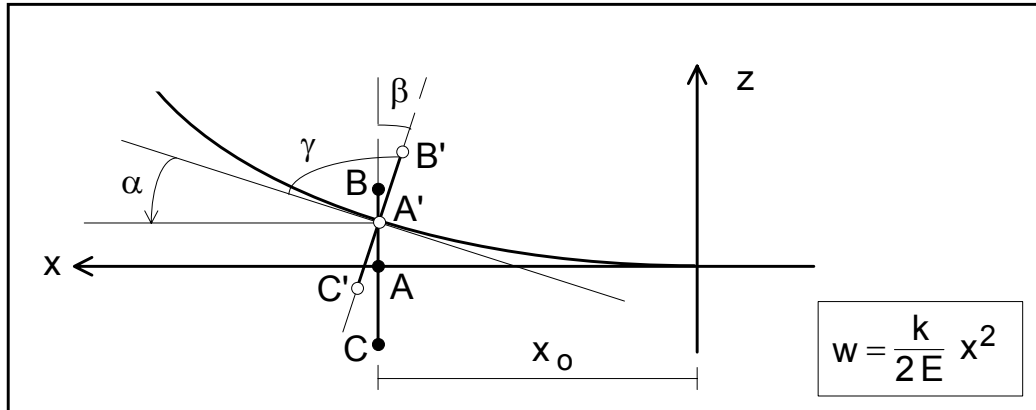
1. Stan naprężenia opisany przez macierz (6) to **jednoosiowy** (tylko jeden element macierzy naprężenia jest niezerowy) **stan naprężenia**. Naprężenie normalne zależy jedynie od zmiennej "z".
2. Diagonalna postać macierzy naprężenia świadczy o tym, że jedyne niezerowe naprężenie  $\sigma_x$  **jest maksymalnym naprężeniem normalnym** spośród wszystkich możliwych odpowiadających dowolnym płaszczynom przekroju pręta.
3. Stan odkształcenia opisany przez macierz (7) to **trójosiowy** (niezerowe składowe w 3 wzajemnie prostopadłych kierunkach) **stan odkształcenia**.
4. Diagonalna postać macierzy odkształcenia świadczy, że czystemu zginaniu towarzyszą jedynie odkształcenia liniowe.

5. Analiza deformacji pręta.

5.1. Przemieszczenia punktów należących do osi pręta, tzn. P (x, 0, 0)

$$u = 0 \quad v = 0$$

$$w = \frac{k}{2E} x^2$$



★ Krzywizna ugiętej osi pręta

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''(x)|}{[1+w'^2(x)]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho(x)} = |w''(x)| = \frac{k}{E}$$

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -E \frac{z}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{z}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \nu \frac{z}{\rho} \end{pmatrix}$$

★ **Twierdzenie** o przekroju płaskim i prostopadłym do osi pręta : przekrój poprzeczny pręta (przekrój płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem) pozostaje w wyniku deformacji nadal płaski i prostopadły do ugiętej osi pręta.

**Dowód:**

1. "Płaskość" przekroju

dla dowolnego przekroju  $x=x_0$

$$u = -\frac{k}{E} x_0 z$$

przemieszczenia "u" wszystkich punktów ustalonego przekroju zależą liniowo od zmiennej "z"; punkty te muszą zatem leżeć w jednej płaszczyźnie

2. "Prostopadłość" przekroju

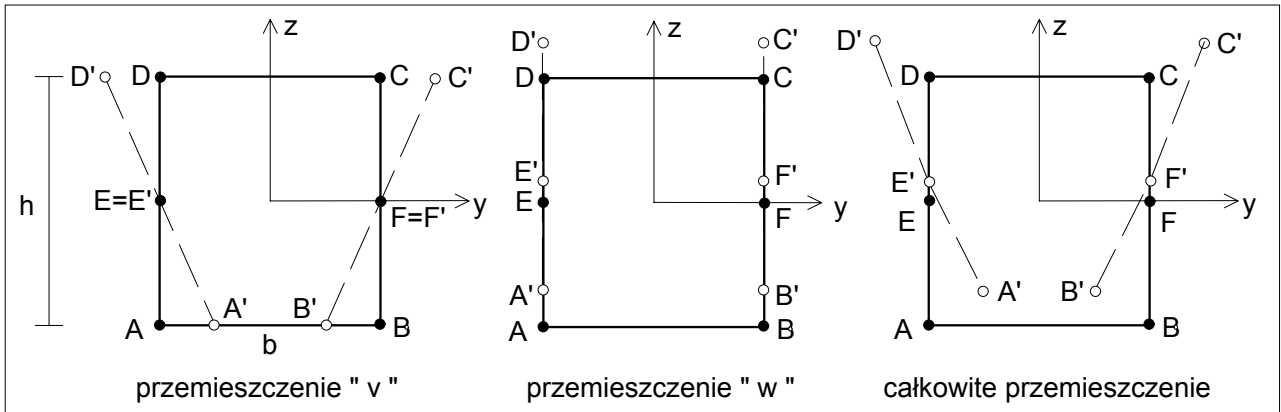
$$\left. \begin{aligned} \gamma &= 90 - \alpha + \beta \\ \operatorname{tg} \alpha &= w' = \frac{k}{E} x_0 \Rightarrow \alpha \cong \frac{k}{E} x_0 \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{k}{E} x_0 \Rightarrow \beta \cong \left| -\frac{k}{E} x_0 \right| = \frac{k}{E} x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

★ **Przemieszczenia punktów przekroju poprzecznego** (na przykładzie przekroju prostokątnego o wymiarach początkowych  $b \times h$ )

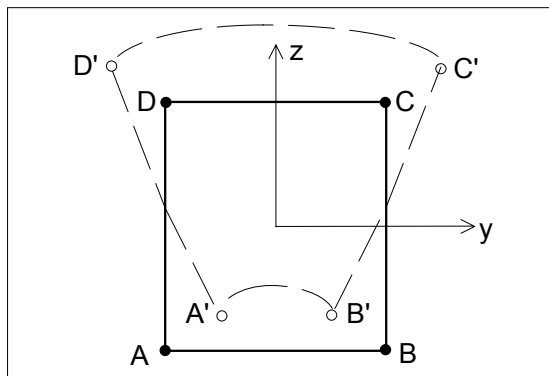
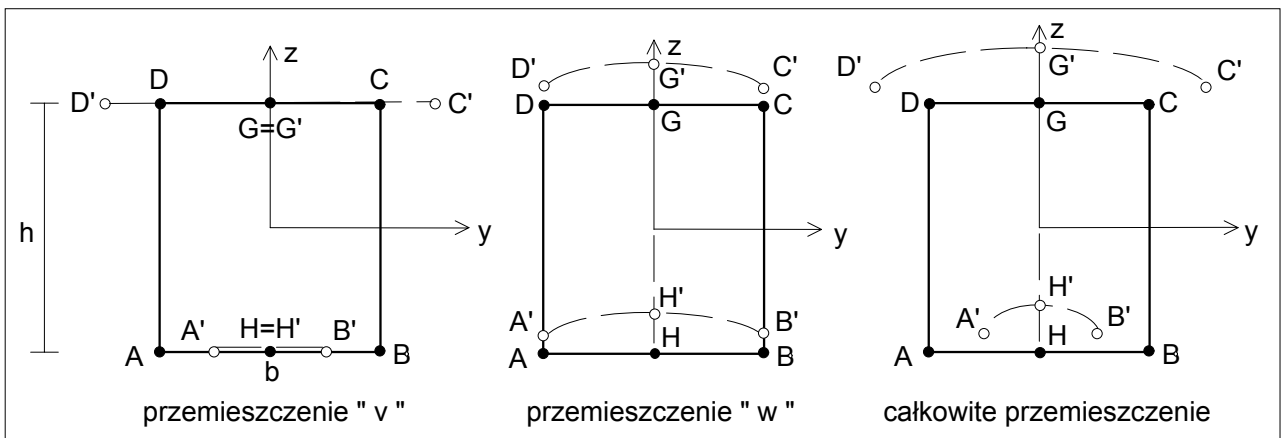
$$\text{CB, AD: } y = \pm \frac{b}{2} \quad v = \pm v \frac{k b}{E 2} z \quad ; \quad w = \frac{k}{2E} \left( x_0^2 - v \frac{b^2}{4} + v z^2 \right)$$

$$\text{CD, AB: } z = \pm \frac{h}{2}; \quad v = \pm v \frac{k h}{E 2} y \quad ; \quad w = \frac{k}{2E} \left( x_0^2 + v \frac{h^2}{4} - v y^2 \right)$$

**Przemieszczenia punktów krawędzi  $y = \pm b/2$**



**Przemieszczenia punktów krawędzi  $z = \pm h/2$**



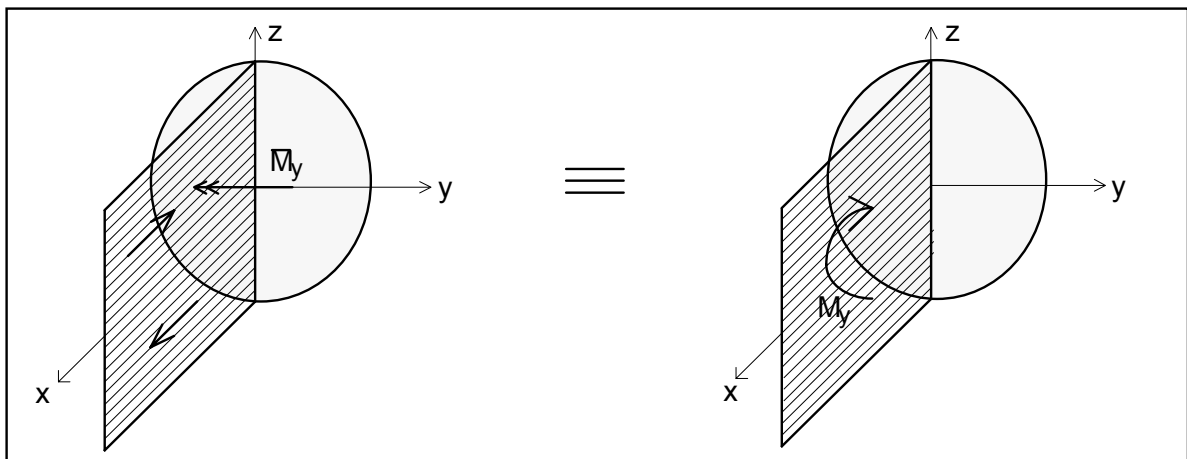
**4. REDUKCJA OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO DO ŚRODKA CIĘŻKOŚCI PRZEKROJU**

**4.1. Redukcja obciążenia zewn. do środka ciężkości przekroju poprzecznego**

$$\begin{aligned}
 S_x &= \iint_A q_{vx} dA = \iint_A -kz dA = -k S_y = 0 \\
 S_y &= \iint_A q_{vy} dA = \iint_A 0 dA = 0 \\
 S_z &= \iint_A q_{vz} dA = \iint_A 0 dA = 0 \\
 M_x &= \iint_A (y_0 - z_0) dA = 0 \\
 M_y &= \iint_A [(-kz)z - 0] dA = -k \iint_A z^2 dA = -k I_y \\
 M_z &= \iint_A (0 - kzy) dA = -k \iint_A yz dA = -k I_{yz} = 0
 \end{aligned}$$

**WNIOSEK:** obciążenie przy czystym zginaniu redukuje się w środku ciężkości przekroju poprzecznego do pary o wektorze  $\mathbf{M} (0, -k I_y, 0)$ .

$$|\mathbf{M}| \stackrel{\text{def}}{=} M_y \Rightarrow M_y = k I_y \Rightarrow k = M_y / I_y$$



**4.2. Składowe tensorów naprężenia i odkształcenia oraz wektora przemieszczenia**

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{M_y}{E I_y} z \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \nu \frac{M_y}{E I_y} z$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{M_y}{E I_y} xz + a + by + cz \\
 v &= \nu \frac{M_y}{E I_y} yz + d - bx + fz \\
 w &= \frac{M_y}{2E I_y} (x^2 - \nu y^2 + \nu z^2) + g - cx - fy
 \end{aligned}$$

## 5. INNE PRZYPADKI OBCIĄŻENIA (PROSTE ZGINANIE)

### 5.1. Proste zginanie

**DEFINICJA:** Każdy przypadek takiego obciążenia pręta, które redukuje się w środku ciężkości przekroju poprzecznego do momentu leżącego w płaszczyźnie (x, z) określa się jako proste zginanie lub krótko **zginanie**.

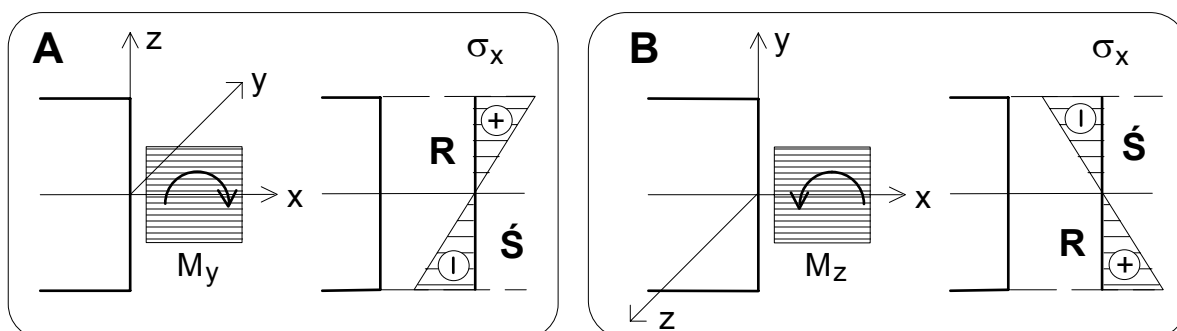
### 5.2. Składowe tensorów naprężenia i odkształcenia dla zginania

Przyjmując zasadę de Saint-Venanta przyjmujemy równocześnie, że rozwiązanie uzyskane dla czystego zginania jest także z wystarczającą dokładnością rozwiązaniem dla prostego zginania.

## 6. INNE WIĘZY KINEMATYCZNE DLA PRĘTA PODDANEGO CZYSTEMU ZGINANIU

1. Jeżeli więzy narzucają 6 warunków, to tensory naprężenia (6) i odkształcenia (7) nadal są ścisłym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego. Funkcje przemieszczeń są opisane równaniami (9), z których należy wyznaczyć 6 stałych z 6 warunków kinematycznych
2. Jeżeli więzy są takie, że narzucają mniej niż 6 warunków, to pręt jest układem geometrycznie zmiennym.
3. Jeżeli więzy są takie, że narzucają więcej niż 6 warunków to macierz naprężenia musi być przyjęta odmiennie od tej w postaci (6).

## 7. ROZKŁAD NAPRĘŻENIA NORMALNEGO $\sigma_x$



### ★ Przypadek A - zginanie w płaszczyźnie (x, z)

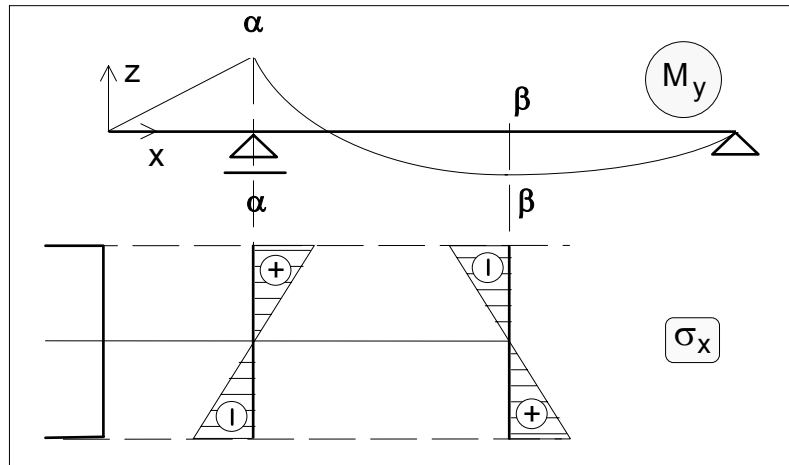
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

włókna o dodatniej współrzędnej "z" (tzw. "górne włókna") są rozciągane. Zgodnie z przyjętą konwencją znakowania naprężeń - naprężeniu normalnemu rozciągającemu przypisuje się znak "plus". Stąd, naprężenia w górnych włóknach są dodatnie, a w równaniu określającym  $\sigma_x$  występuje znak "+" [ dla "z+" musi być " $\sigma_{x+}$ " ]

### ★ przypadek B - zginanie w płaszczyźnie (x, y)

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

włókna o dodatniej współrzędnej "y" są ściskane. Zgodnie z przyjętą konwencją znakowania naprężeń - naprężeniu normalnemu ściskającemu przypisuje się znak "minus". Stąd - naprężenia w górnych włóknach są ujemne, a w równaniu określającym  $\sigma_x$  występuje znak "-" [ dla "z+" musi być " $\sigma_{x-}$ " ]

**7.1. Rozkład naprężenia w przekroju pręta**

$$\sigma_x^{\alpha-\alpha} = \frac{M_y}{I_y} z \quad \sigma_x^{\beta-\beta} = -\frac{M_y}{I_y} z$$

**7.2. Naprężenie maksymalne**

$$|\sigma_x^{\max}| = \frac{M_y^{\max}}{I_y} \max(h^g, h_d)$$

$$|\sigma_x^{\max}| = \frac{M^{\max}}{W_{\min}}$$

$$W_{\min} = \frac{I_y}{\max(h^g, h_d)}$$

★ warunek wytrzymałościowy

$$|\sigma_x^{\max}| = \frac{M^{\max}}{W_{\min}} \leq R$$