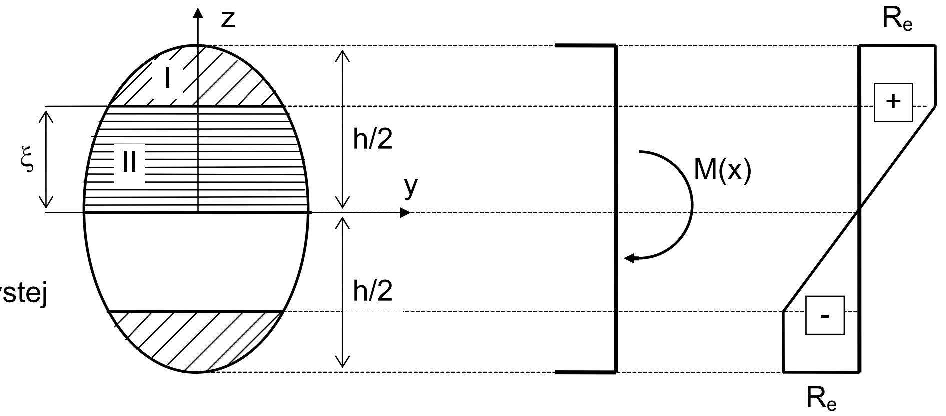
8. ROZKŁAD STREF SPRĘŻYSTYCH I PLASTYCZNYCH W BELKACH ZGINANYCH

- **założenia**
  - moment zginający w przekroju spełnia warunek $\overline{M} \le M \le \overline{\overline{M}}$
  - przekrój ma dwie osie symetrii



ξ- wysokość strefy sprężystej

$$\sigma_x = \begin{cases} +R_e & \xi \le z \le h/2 \\ E\dfrac{z}{\rho(x)} & -\xi \le z \le \xi \\ -R_e & -h/2 \le z \le -\xi \end{cases}$$

$$M(x) = 2\left[\iint_{A_I} R_e\ z\,dA + \iint_{AII} E\frac{z}{\rho(x)}\ z\,dA\right]$$

$$M(x) = 2\left[R_e \iint_{A_I} z\,dA + \frac{E}{\rho(x)}\iint_{AII} z^2\ dA\right] = 2\left[R_e S_y^I(\xi) + \frac{E}{\rho(x)} I_y^{II}(\xi)\right]$$

na granicy stref $\qquad R_e = \dfrac{E\,\xi}{\rho(x)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\rho(x)} = \dfrac{R_e}{E\,\xi}$

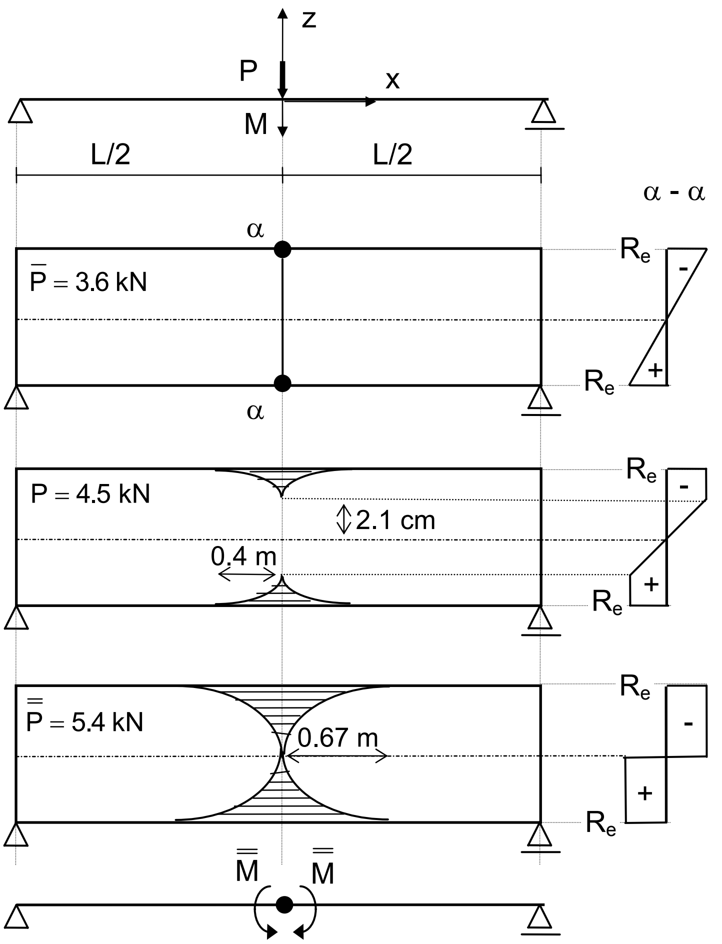
- równanie frontu plastycznego

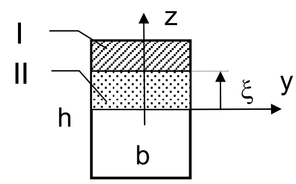
$$\boxed{M(x) = 2\,R_e\left[S_y^I(\xi) + \frac{1}{\xi} I_y^{II}(\xi)\right]}$$

znając równanie funkcji momentu M(x) i wstawiając je do równania frontu otrzymujemy funkcję opisującą wysokość strefy sprężystej, a zatem również rozkład stref sprężystych i plastycznych.

- w danym przekroju osiągnięty jest stan:
  - ♦ graniczny stan sprężysty, jeżeli : $\xi = h/2$
  - ♦ graniczny stan plastyczny, jeżeli : $\xi = 0$

Przykład - Dla belki jak na rysunku wyznaczyć : a) równanie frontu plastycznego, jeżeli obciążenie spełnia warunek $\bar{P} \le P \le \bar{\bar{P}}$, b) wysokość strefy sprężystej dla x = 0 i zasięg strefy sprężysto-plastycznej x_g , c) nośność sprężystą $\bar{P}$, plastyczną $\bar{\bar{P}}$ i nośność graniczną P^*





L = 4 m ; b = 2 cm ; h=6 cm

R_e = 300 MPa

Ad a)

$$M(x) = 2R_e \left[S_y^I(\xi) + \frac{1}{\xi} I_y^{II}(\xi) \right]$$

$$S_y^I(\xi) = b\left(\frac{h}{2} - \xi\right)\left(\xi + \frac{\frac{h}{2} - \xi}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \xi^2\right)$$

$$I_y^{II}(\xi) = \frac{b\xi^3}{12} + b\xi\frac{\xi^2}{4} = \frac{b\xi^3}{3}$$

$$M(x) = 2R_e\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \xi^2\right) + \frac{b\xi^2}{3}\right] =$$

$$= 2R_e\frac{bh^2}{8}\left[1 - \frac{4}{3}\frac{\xi^2}{h^2}\right]$$

$$\text{dla } x \in [0, L/2] \qquad M(x) = \frac{P}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$\xi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}h\sqrt{1 - \frac{4M(x)}{R_e b h^2}} = \pm 0.05196\sqrt{1 - 0.09259\,P\,(2 - x)}$$

Ad. c)

- graniczna nośność sprężysta $\bar{P}$: $\quad M_{max} = M(x = 0) \quad ; \quad \sigma_{max} = R_e \quad$ dla $\xi = h/2$

$$0.06 / 2 = \pm 0.05196\sqrt{1 - 2 \times \bar{P} \times 0.09259} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{P} = 3.6 \text{ kN}$$

- graniczna nośność plastyczna $\bar{\bar{P}}$: $\quad M_{max} = M(x = 0) \quad ; \quad \sigma_{max} = R_e \quad$ dla $\xi = 0$

$$0 = \pm 0.05196\sqrt{1 - 2 \times \bar{\bar{P}} \times 0.09259} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\bar{P}} = 5.4 \text{ kN}$$

w środku belki powstanie przegub plastyczny, w którym występuje swobodny obrót obu części belki, ale w odróżnieniu od zwykłego przegubu przenosi on moment . Belka zamienia się w mechanizm - tak więc graniczna nośność plastyczna jest równa nośności granicznej P^*.

Ad. a) cd. - niech siła P wynosi przykładowo P = 4.5 kN ($\bar{P} \le P \le \bar{\bar{P}}$)

$$\xi = \pm 0.05196\sqrt{1 - 0.417\,(2 - x)}$$

Ad b) zasięg strefy sprężysto-plastycznej, rozwijającej się od przekroju x=0 wzdłuż osi x, wyznacza przekrój x_{gr}, w którym osiągnięty jest graniczny stan sprężysty tzn. :

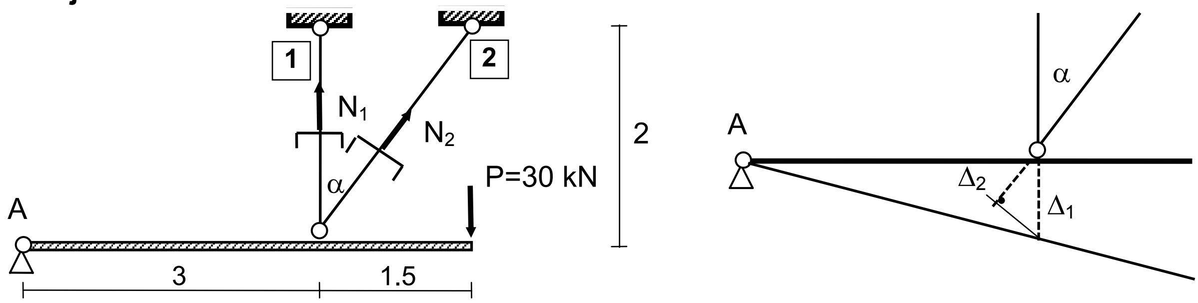
$$\text{dla } x = x_{gr} \qquad \xi = \pm\frac{h}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 0.03 = 0.05196\sqrt{1 - 0.417\,(2 - x_{gr})} \qquad \Rightarrow \qquad x_{gr} = 0.4 \text{ m}$$

$$\text{dla } x = 0 \qquad \xi = 0.05196\sqrt{1 - 2 \times 0.417} \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 2.1 \text{ cm}$$

9. NOŚNOŚĆ W UKŁADACH PRĘTOWYCH

Przykład - Zwymiarować przekroje A_1 i A_2 prętów układu prętowo-belkowego. Przyjąć $A_1 = A_2 = A$. Wyznaczyć graniczne obciążenie sprężyste, plastyczne i nośność graniczną (R=160 MPa, R_e=200 MPa).

9.1. Projektowanie



- warunek równowagi sił (obowiązuje niezależnie od stanu mechanicznego (spręż., plast.) układu)

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \times 3 + 0.8 \times N_2 \times 3 - P \times 4.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + 0.8 \times N_2 = 1.5\,P$$

- warunek zgodności przemieszczeń $\Delta_2 = 0.8\,\Delta_1$

W stanie **sprężystym** zachodzą relacje:

$$\Delta_2 = \frac{N_2 L_2}{E A} \qquad \Delta_1 = \frac{N_1 L_1}{E A} \quad \Rightarrow \quad N_2 = 0.64\,N_1$$

Siły w prętach w stanie sprężystym : $N_1 = 0.992\,P \qquad N_2 = 0.635\,P$

- warunek projektowania $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{N_1}{A} \le R \quad \Rightarrow \quad A \ge 1.86 \times 10^{-4}\ m^2 = 1.9 \times 10^{-4}\ m^2$

9.2. Nośność (dla przekrojów prętów A = A = 1.9 × 10^{-4} m^2)

- **Nośność sprężysta** - jest to obciążenie o takiej wartości, która wywołuje w co najmniej jednym punkcie pręta naprężenie normalne równe granicy plastyczności. W przypadku prętów rozciąganych mamy do czynienia z jednorodnym stanem naprężenia (naprężenie jest identyczne w każdym punkcie każdego przekroju) - graniczny stan sprężysty jest zatem osiągany jednocześnie w całym pręcie. W konstrukcjach o wielu prętach jest nim pręt, w którym naprężenie jest maksymalne.

$$A_1 = A_2 = A \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = R_e \quad \Rightarrow \quad \overline{P} = \frac{R_e\,A}{0.992} = 38.3\ kN$$

  Przy takiej sile pręt „1" jest uplastyczniony i może się dowolnie dużo odkształcić. Gdyby nie obecność pręta „2", konstrukcja zamieniłaby się w mechanizm. Graniczna nośność plastyczna i nośność graniczna byłyby równe sile 38.3 kN.

  Naprężenie w pręcie „2" odpowiadające sile $\overline{P}$ wynosi $\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{0.635\,\overline{P}}{A} = 128\ MPa < R_e$

  Obecność pręta „2" zapewnia dalszą pracę konstrukcji, co więcej możliwe jest zwiększenie obciążenia powyżej wartości 38.3, aż do wartości, przy której naprężenie w pręcie „2" wyniesie R_e.

- **Nośność plastyczna** - Przy sile P powyżej granicznej nośności sprężystej przestaje obowiązywać rozwiązanie uzyskane z uwzględnieniem sprężystej pracy prętów. Należy na nowo wyznaczyć siły w prętach, aby następnie określić graniczną nośność plastyczną . Siła w pręcie „1" wynika z warunku

$$\sigma_1 = R_e \quad \Rightarrow \quad N_1 = A\,R_e$$

  z „uniwersalnego" równania równowagi wynika $N_2 = \frac{1.5\,P - N_1}{0.8} = \frac{1.5\,P - A\,R_e}{0.8}$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = R_e \quad \Rightarrow \quad 1.5\,\overline{\overline{P}} - A\,R_e = 0.8\,A\,R_e \quad \Rightarrow \quad \overline{\overline{P}} = 1.2\,A\,R_e = 45.6\ kN$$

- **Nośność graniczna** - Przy sile P=45.6 kN oba pręty układu są uplastycznione, cały układ traci zatem dalszą zdolność do przenoszenia obciążenia - staje się mechanizmem. Nośność graniczna jest tożsama z graniczną nośnością plastyczną $P^* = 45.6\ kN$