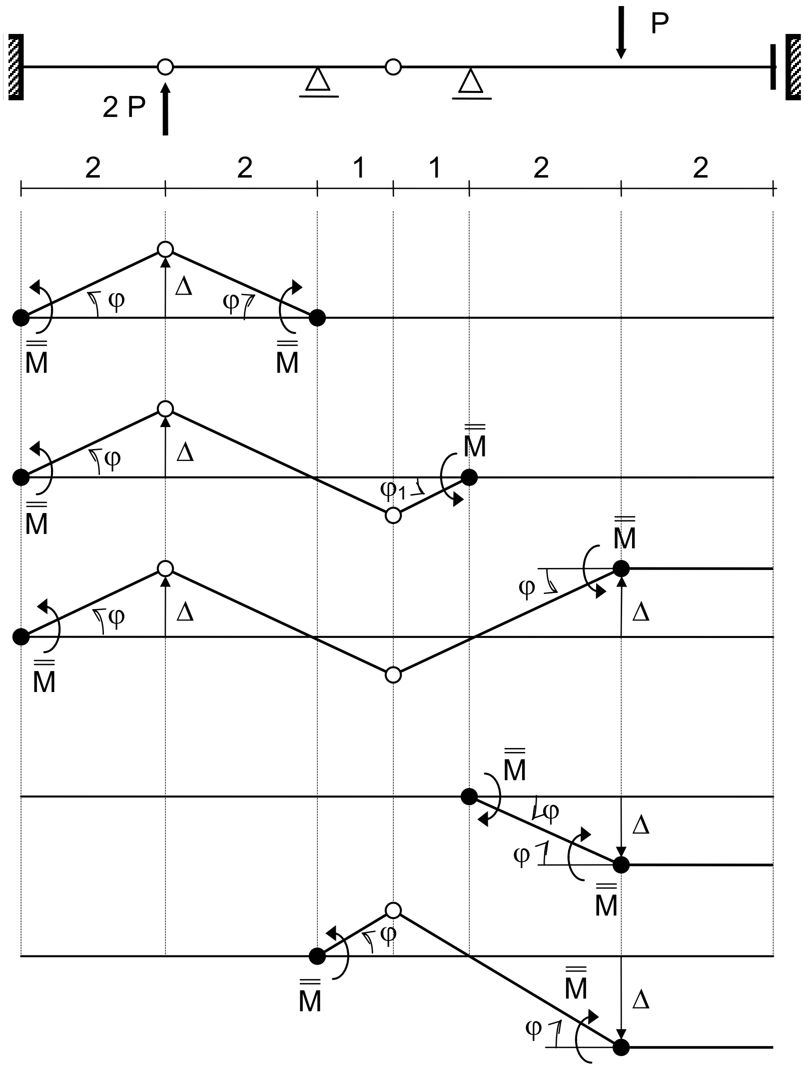
Przykład 1

Obliczyć nośność graniczną belki metodą kinematyczną. Przyjąć R_e = 300 MPa



$L_z = 2P\Delta$

$L_w = 2\overline{\overline{M}}\varphi = 2\overline{\overline{M}}\Delta/2$

$P_1 = 0.5\overline{\overline{M}}$

$L_z = 2P\Delta$

$L_w = \overline{\overline{M}}(\varphi + \varphi_1) = \overline{\overline{M}}(1/2 + 1/2)$

$P_2 = 0.5\overline{\overline{M}}$

$L_z = 2P\Delta - P\Delta = P\Delta$

$L_w = 2\overline{\overline{M}}\varphi = 2\overline{\overline{M}}\Delta/2$

$P_3 = \overline{\overline{M}}$

$L_z = P\Delta$

$L_w = 2\overline{\overline{M}}\varphi = 2\overline{\overline{M}}\Delta/2$

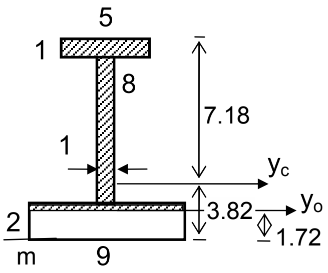
$P_4 = \overline{\overline{M}}$

$L_z = P\Delta$

$L_w = 2\overline{\overline{M}}\varphi = 2\overline{\overline{M}}\Delta/2$

$P_5 = \overline{\overline{M}}$

- nośność graniczna $\qquad P^* = \min(P_1 \div P_5) = 0.5\overline{\overline{M}}$



$A = 5 + 8 + 18 = 31\ cm^2 \qquad A_1 = 1/2\ A = 15.5\ cm^2$

$A_1 = 5 + 8 + 9\ h = 15.5 \qquad h = 0.28$

$S_m = 5\times10.5 + 8\times6 + 18\times1 = 118.5\ cm^3 \qquad z_c = 3.82\ cm$

$W_{pl} = S_{yo}(A_1) - S_{yo}(A_2) = [5\times8.78 + 8\times4.28 + 9\times0.28\times0.28/2\ ] -$

$- [9\times1.72\times(-1.72/2)] = 91.8\ cm^3$

$W_{pl} = |2\ S_{yc}(A_2)| = 2 \times [1.72\times9\times(3.82 - 1.72/2\ ] = 91.8\ cm^3$

$\overline{\overline{M}} = R_e\ W_{pl} = 300 \times 10^3 \times 91.8 \times 10^{-6}\ kNm = 27.54\ kNm$

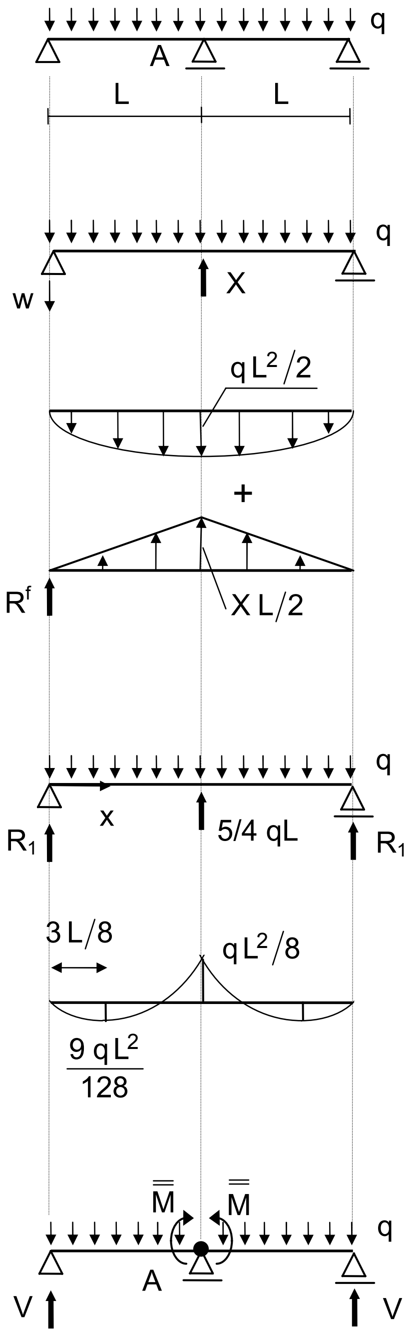
$P^* = 13.8\ kN$

$$I_{yc} = \frac{5\times1^3}{12} + 5(7.18-0.5)^2 + \frac{1\times8^3}{12} + 8(7.18-5)^2 + \frac{9\times2^3}{12} + 18(2.82)^2 = 453.4\ cm^4$$

$$W_{spr} = \frac{I_{yc}}{z_{max}} = \frac{453.4}{7.18} = 63.1\,cm^3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{W_{pl}}{W_{spr}} = \frac{91.8}{63.1} = 1.45$$

Przykład 2

Wyznaczyć graniczne obciążenie sprężyste, plastyczne i nośność graniczną belki (R_e=300 MPa).



z metody Mohra

$$R^f = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{qL^2}{2}2L - 2\frac{1}{2}\frac{XL}{2}L\right) = \frac{qL^3}{3} - \frac{XL^2}{4}$$

$$w_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M^f_A = 0$$

$$M^f_A = R^f L + \frac{1}{2}\frac{XL}{2}L\frac{1}{3}L - \frac{2}{3}\frac{qL^2}{2}L\frac{3}{8}L = 0$$

$$X = \frac{5}{4}qL$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2R_1 + \frac{5}{4}qL - 2qL = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{3}{8}qL$$

dla $0 \le x \le L$ $\qquad M(x) = \frac{3}{8}qLx - \frac{qx^2}{2} \quad ; \quad M(L) = -\frac{qL^2}{8}$

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{3}{8}qL - qx = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{ex} = \frac{3}{8}L \quad ; \quad M_{ex} = \frac{9qL^2}{128}$$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8}$$

$$\overline{M} = M_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{q} = 8\overline{M}/L^2}$$

$$\overline{\overline{M}} = M_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{\overline{q}} = 8\overline{\overline{M}}/L^2}$$

przy obciążeniu $q = \overline{\overline{q}}$ w punkcie x_{max} powstanie przegub plastyczny i belka stanie się statycznie wyznaczalna. Należy rozwiązać tę belkę, znaleźć moment maksymalny i z warunku $M_{max} = \overline{\overline{M}}$ wyznaczyć nośność graniczną q^*

$$\sum M^L_A = 0 \quad \Rightarrow \quad VL - \frac{qL^2}{2} + \overline{\overline{M}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{qL}{2} - \frac{\overline{\overline{M}}}{L}$$

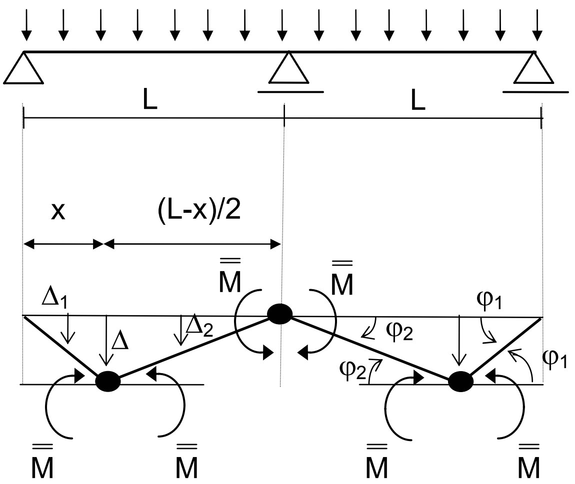
$$M(x) = Vx - \frac{qx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dM(x)}{dx} = V - qx = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{ex} = \frac{V}{q} \quad ; \quad M_{ex} = \frac{V^2}{2q}$$

$$M_{ex} = \overline{\overline{M}} \quad \Rightarrow \quad q^2 - \frac{12\overline{\overline{M}}}{L^2}q + \frac{4\overline{\overline{M}}^2}{L^4} = 0$$

$$q_1 = 0.343\,\overline{\overline{M}}/L^2 \qquad q_2 = 11.657\,\overline{\overline{M}}/L^2 = q^* \qquad \boxed{q^* = 11.657\,\overline{\overline{M}}/L^2}$$

miejsce przegubu $\qquad x_{ex} = V/q^* = L/2 - \overline{\overline{M}}/q^*L = 0.4142\,L$

- wyznaczanie nośności granicznej metodą kinematyczną



stopień statycznej niewyznaczalności n=1

Symetria belki i obciążenia wymusza jeden jedyny kinematycznie dopuszczalny schemat zniszczenia o 3 przegubach plastycznych, z których jeden musi znajdować się w połowie długości, a dwa pozostałe czynią zadość symetrii, a ich położenie nie jest *a priori* znane.

- Z zasady prac wirtualnych

$$L_w = 2\,\bar{\bar{M}}\,\varphi_1 + 4\,\bar{\bar{M}}\,\varphi_2$$

$$L_z = 2\left[q\,x\,\Delta_1 + q\left(L-x\right)\Delta_2\right]$$

$$\varphi_1 = \frac{\Delta}{x} \qquad ; \qquad \varphi_2 = \frac{\Delta}{L-x} \qquad ; \qquad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$$

$$L_w = 2\,\bar{\bar{M}}\,\Delta\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{L-x}\right) \qquad\qquad L_z = q\,L\,\Delta$$

$$L_z = L_w \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{2\,\bar{\bar{M}}}{L}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{L-x}\right)$$

- warunek konieczny istnienia minimum obciążenia q

$$\frac{d\,q}{d\,x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{\left(L-x\right)^2} = 0$$

$$x^2 + 2\,L\,x - L^2 = 0$$

$$x_1 < 0 \quad \text{(pierwiastek odrzucony)} \qquad ; \qquad x_2 = 0.4142\,L$$

- położenie przegubu plastycznego

$$x = 0.4142\,L$$

- nośność graniczna

$$q^* = \frac{2\,\bar{\bar{M}}}{L}\left(\frac{1}{0.4142\,L} + \frac{2}{L-0.4142\,L}\right) = 11.657\,\frac{\bar{\bar{M}}}{L}$$