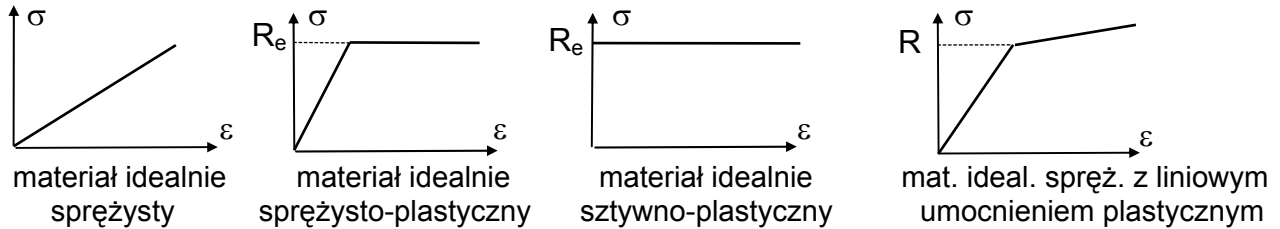


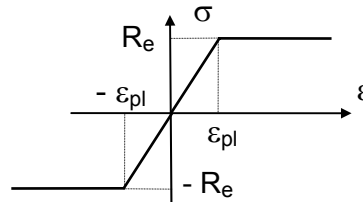
**ZGINANIE BELEK Z MATERIAŁU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO
W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM**

1. MATERIAŁ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY



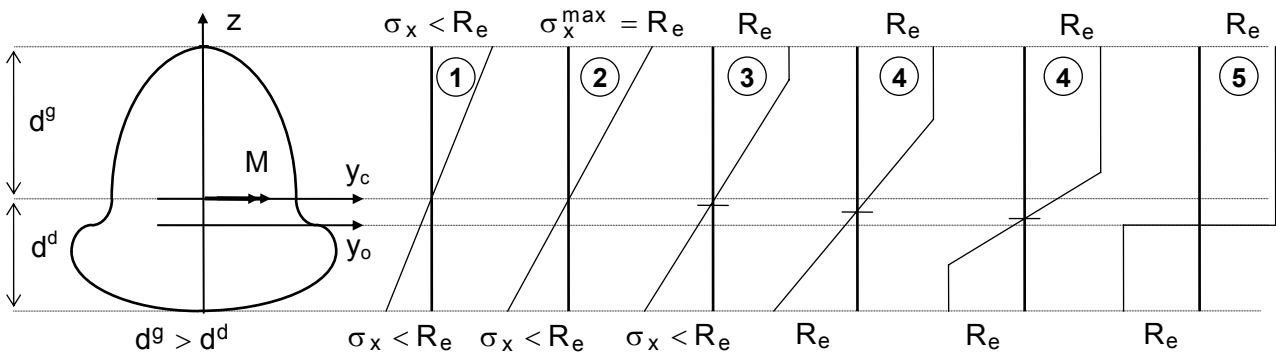
2. ZAŁOŻENIA

1. Materiał idealnie sprężysto-plastyczny (mat. Prandtla) o jednakowych własnościach na rozciąganie i na ściskanie



2. Obowiązuje zasada zeszywnienia
3. Obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów (hip. Bernouli'ego)
4. Wpływ sił poprzecznych na osiągnięcie stanu plastycznego jest pomijany
5. Zginanie zachodzi jedynie w głównych płaszczyznach bezwładności

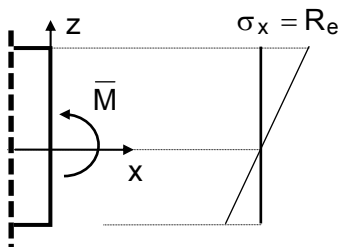
3. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH W PRZEKROJU ZGINANYM



1. **Stan liniowo sprężysty**
2. **Graniczny stan sprężysty** (max. naprężenie normalne w co najmniej jednym punkcie przekroju osiąga wartość równą granicy plastyczności R_e ; moment zginający $M = \bar{M}$)
3. Stan jednostronnie sprężysto-plastyczny
4. Stan dwustronnie sprężysto-plastyczny
5. **Graniczny stan plastyczny** (naprężenie normalne w całym przekroju osiąga wartość równą granicy plastyczności R_e) - w uplastycznionym przekroju powstaje tzw. przegub plastyczny, który różni się od "zwykłego" przegubu tym, że przenosi moment równy tzw. granicznemu momentowi plastycznemu przekroju M)

4. GRANICZNA NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTA PRZEKROJU (graniczny moment sprężysty \bar{M})

Granicznym momentem sprężystym \bar{M} (graniczną nośnością sprężystą przekroju) nazywamy moment zginający o takiej wartości, która jest wystarczająca do uplastycznienia przekroju w co najmniej jednym punkcie (naprężenie normalne σ_x jest równe granicy plastyczności R_e)



$$\sigma_x = \frac{M}{I_{yc}} z$$

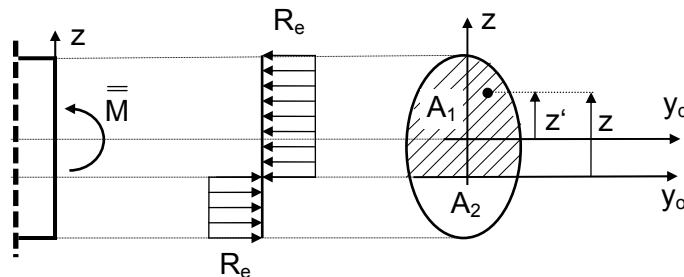
$$R_e = \frac{\bar{M}}{I_{yc}} z_{\max}$$

$$\bar{M} = R_e \frac{I_{yc}}{z_{\max}}$$

$$\bar{M} = R_e W_{spr}$$

5. GRANICZNA NOŚNOŚĆ PLASTYCZNA PRZEKROJU (granicz. moment plastycz. \bar{M})

Granicznym momentem plastycznym \bar{M} (graniczną nośnością plastyczną przekroju) nazywamy moment zginający o takiej wartości, która jest wystarczająca do uplastycznienia całego przekroju (naprężenie normalne σ_x w każdym punkcie przekroju jest równe granicy plastyczności R_e)



• równania równowagi
$$N(x) = \iint_A \sigma_x dA = 0 \tag{1}$$

$$M(x) = \iint_A \sigma_x z dA = 0 \tag{2}$$

Ad. (1)
$$-R_e A_1 + R_e A_2 = 0$$

$$A_1 + A_2 = A$$

warunek określający położenie osi obojętnej

$$A_1 = A_2 = 1/2 A$$

Ad. (2)
$$\bar{M} = \iint_{A_1} R_e z dA - \iint_{A_2} R_e z dA = R_e S_{y_0}(A_1) - R_e S_{y_0}(A_2)$$

$$\bar{M} = R_e [S_{y_0}(A_1) - S_{y_0}(A_2)]$$

lub
$$\bar{M} = \iint_{A_1} R_e z' dA - \iint_{A_2} R_e z' dA = R_e S_{y_c}(A_1) - R_e S_{y_c}(A_2)$$

y_c - oś ciężkości
$$S_{y_c}(A_1) + S_{y_c}(A_2) = 0 \Rightarrow S_{y_c}(A_2) = -S_{y_c}(A_1)$$

$$\bar{M} = 2 R_e S_{y_c}(A_1)$$

- plastyczny wskaźnik wytrzymałości przekroju

$$W_{pl} \stackrel{\text{def}}{=} S_{y_0}(A_1) - S_{y_0}(A_2) = 2 S_{y_c}(A_1)$$

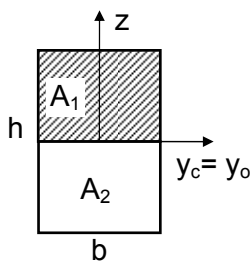
$$\bar{M} = R_e W_{pl}$$

- współczynnik kształtu

$$k = \frac{\bar{M}}{M} = \frac{W_{pl}}{W_{spr}} > 1$$

6. PRZYKŁADY

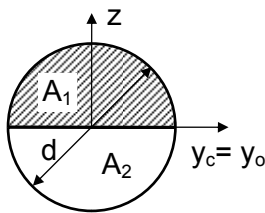
- Obliczyć współczynnik kształtu dla przekroju prostokątnego i kołowego



$$W_{spr} = \frac{b h^2}{6} \quad ; \quad W_{pl} = 2 S_{y_c}(A_1) = 2 b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{4}$$

$$W_{pl} = S_{y_0}(A_1) - S_{y_0}(A_2) = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} - \left[b \frac{h}{2} \left(-\frac{h}{4} \right) \right] = \frac{b h^2}{4}$$

$$\bar{M} = R_e \frac{b h^2}{6} \quad ; \quad \bar{M} = R_e \frac{b h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\bar{M}}{M} = \frac{W_{pl}}{W_{spr}} = 1.5$$

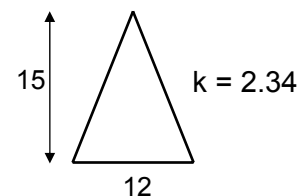
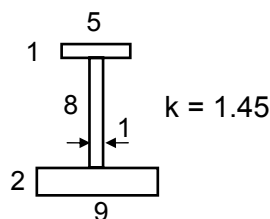
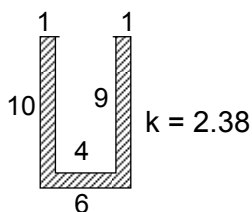
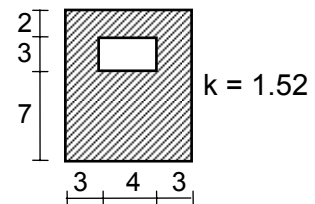
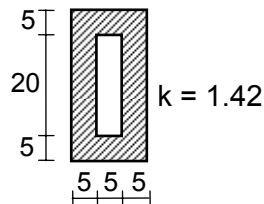
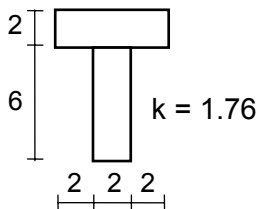


$$W_{spr} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_{pl} = 2 S_{y_c}(A_1) = 2 \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} \frac{4 d/2}{3 \pi} = \frac{d^3}{6}$$

$$k = \frac{W_{pl}}{W_{spr}} = \frac{32}{6 \pi} = 1.7$$

- Obliczyć współczynnik kształtu dla następujących przekrojów :



7. NOŚNOŚĆ GRANICZNA BELEK ZGINANYCH

7.1 NOŚNOŚĆ GRANICZNA PRZEKROJU

- graniczny moment sprężysty (graniczna nośność sprężysta przekroju) \bar{M}
- graniczny moment plastyczny (graniczna nośność plastyczna przekroju) $\bar{\bar{M}}$

7.2 NOŚNOŚĆ GRANICZNA BELEK

- **graniczna nośność sprężysta (graniczne obciążenie sprężyste) \bar{P}** - jest to taka wielkość obciążenia zewnętrznego (z reguły wyrażonego poprzez pewien parametr obciążenia), która powoduje w co najmniej jednym punkcie belki powstanie naprężenia normalnego równego granicy plastyczności
- **graniczna nośność plastyczna (graniczne obciążenie plastyczne) $\bar{\bar{P}}$** - jest to taka wielkość obciążenia zewnętrznego, która powoduje uplastycznienie co najmniej jednego przekroju belki (powstanie co najmniej jednego przegubu plastycznego)
- **nośność graniczna P^*** - jest to taka wielkość obciążenia zewnętrznego, która powoduje uplastycznienie tylu przekrojów (tzn. powstanie tylu przegubów plastycznych), że belka zamienia się w mechanizm.

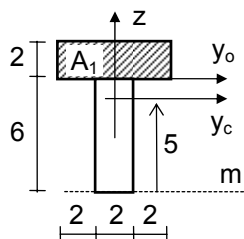
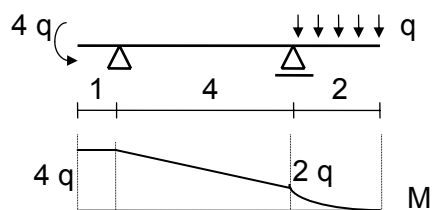
7.2.1 Belki statycznie wyznaczalne

- graniczna nośność sprężysta \bar{P} $M_{\max}(P) = \bar{M} \Rightarrow \bar{P}$
- graniczna nośność plastyczna $\bar{\bar{P}}$ $M_{\max}(P) = \bar{\bar{M}} \Rightarrow \bar{\bar{P}}$
- nośność graniczna P^*

do zamiany belki statycznie wyznaczalnej w mechanizm wystarcza powstanie jednego przegubu, a ten tworzy się już przy obciążeniu równym granicznemu obciążeniu plastycznemu. Tak więc w belkach statycznie wyznaczalnych graniczna nośność plastyczna i nośność graniczna są pojęciami tożsamymi, tzn. $P^* = \bar{\bar{P}}$

Przykład

Wyznaczyć graniczne obciążenie sprężyste, plastyczne i nośność graniczną belki ($R_e=300$ MPa).



$$M_{\max} = 4q$$

$$\bar{M} = 4\bar{q} = R_e W_{\text{spr}} \Rightarrow \bar{q} = \frac{R_e W_{\text{spr}}}{4}$$

$$\bar{\bar{M}} = 4\bar{\bar{q}} = R_e W_{\text{pl}} \Rightarrow \bar{\bar{q}} = \frac{R_e W_{\text{pl}}}{4}$$

$$A = 12 + 12 = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_m = 12 \times 7 + 12 \times 3 = 120 \text{ cm}^3$$

oś ciężkości $z_c = 120/24 = 5 \text{ cm}$

oś obojętna $A_1 = A_2 = 1/2 A = 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow y_o$

$$W_{\text{spr}} = \frac{I_{yc}}{z_{\max}} = \frac{6 \times 2^3/12 + 12 \times 2^2 + 2 \times 6^3/12 + 12 \times 2^2}{5} = 27.2 \text{ cm}^3$$

$$W_{\text{pl}} = 2 S_{yc}(A_1) = 2 \times 12 \times 2 = 48 \text{ cm}^3$$

$$\bar{q} = 2.04 \text{ kN/m}$$

$$\bar{\bar{q}} = 3.60 \text{ kN/m}$$

$$q^* = \bar{\bar{q}} = 3.60 \text{ kN/m}$$

7.2.2 Belki statycznie niewyznaczalne

- graniczna nośność sprężysta \bar{P}

W celu wyznaczenia granicznej nośności sprężystej \bar{P} należy po wyznaczeniu (metodami mechaniki budowli) wykresu momentów zginających wykorzystać warunek :

$$M_{\max}(P) = \bar{M} \Rightarrow \bar{P}$$

- graniczna nośność plastyczna \bar{P}

W celu wyznaczenia granicznej nośności plastycznej \bar{P} należy po wyznaczeniu (metodami mechaniki budowli) wykresu momentów zginających wykorzystać warunek :

$$M_{\max}(P) = \bar{M} \Rightarrow \bar{P}$$

- nośność graniczna P^*

- ◆ metoda ścisła

W celu wyznaczenia nośności granicznej należy po wyznaczeniu wykresu momentów zginających „wprowadzić” do belki przegub plastyczny (wraz z obustronnie przyłożonymi do niego momentami skupionymi, równymi \bar{M}) w przekroju maksymalnego momentu zginającego. Powtórnie należy wyznaczyć wykres momentów dla belki o nowym schemacie statycznym i nowym obciążeniu. Procedurę taką należy kontynuować aż do zamiany belki w mechanizm. Oznacza to, że w belce n-krotnie statycznie niewyznaczalnej maksymalna ilość powyższych operacji może wynosić n+1 (może też być mniejsza - zależy to od schematu i obciążenia).

Obciążenie, przy którym belka zamienia się w mechanizm jest nośnością graniczną P^* .

- ◆ metoda kinematyczna

Metoda kinematyczna oparta jest na tzw. twierdzeniach ekstremalnych teorii plastyczności (patrz np.: Jacek Skrzypek, *Plastyczność i pełzanie*, PWN, Warszawa, 1987). Istota tej metody polega na znalezieniu i analizie wszystkich kinematycznie dopuszczalnych (tzn. zgodnych z więzami kinematycznymi) schematów zniszczenia belki.

W belce n-krotnie statycznie niewyznaczalnej maksymalna liczba przegubów plastycznych, jaka prowadzi do zamiany belki w mechanizm wynosi „n+1”. W przypadku mechanizmu o tej liczbie przegubów mówimy o tzw. pełnym mechanizmie (schemacie) zniszczenia.

W przypadku, gdy można utworzyć mechanizm obejmujący tylko część belki (co ma miejsce przy liczbie przegubów mniejszej niż „n+1”) mówimy o tzw. niecałkowitym mechanizmie (schemacie) zniszczenia.

Stosując zasadę prac wirtualnych należy wyznaczyć obciążenia niszczące dla każdego z kinematycznie dopuszczalnych schematów zniszczenia. Najmniejszą z uzyskanych w ten sposób wartości obciążenia uznajemy za nośność graniczną P^* .

Można wykazać, że jest to górne oszacowanie rzeczywistej nośności granicznej belki.