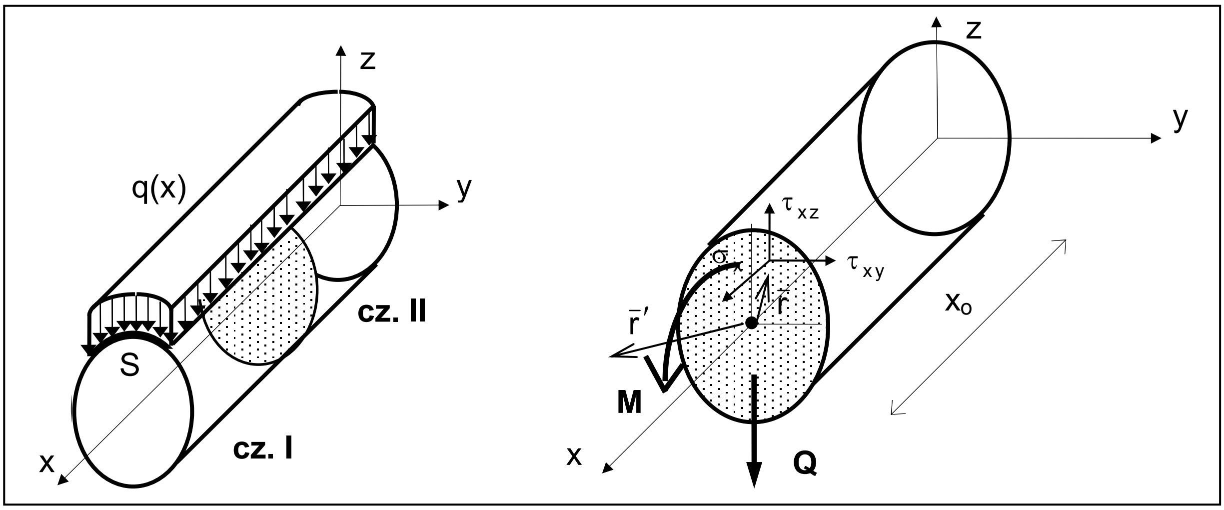
1. ZGINANIE POPRZECZNE - SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

ZADANIE: wyznaczyć tensor napręż. T_σ, tensor odkszt. T_ε i wektor przemieszczenia $\overline{u}$.

- ✶ x - oś podłużna pręta; y, z - osie główne, centralne przekroju poprzecznego
- ✶ przekrój poprzeczny pręta jest symetryczny względem osi z
- ✶ obciążenie zewnętrzne $\overline{q}\left(0,0,-q(x)\right)$ działa symetrycznie względem osi z, na powierzchni S pobocznicy
- ✶ siły masowe $\overline{P}\left(0,0,0\right)$



$$Z_I\left\{\overline{q}\left(0,0,-q(x)\right)\right\} \qquad W_{II}\left\{\overline{p}\left(\sigma_x,\tau_{xy},\tau_{xz}\right)\right\}$$

$$\overline{S}\left(W_{II}\right)=\overline{S}\left(Z_I\right) \qquad \overline{M}_o\left(W_{II}\right)=\overline{M}_o\left(Z_I\right)$$

$$\iint_A \sigma_x \, dA = \iint_S 0 \, dS \qquad (\equiv 0) \tag{1}$$

$$\iint_A \tau_{xy} \, dA = \iint_S 0 \, dS \qquad (\equiv 0) \tag{2}$$

$$\iint_A \tau_{xz} \, dA = \iint_S -q(x) \, dS \qquad (\equiv Q(x)) \tag{3}$$

$$\iint_A \bar{r}\times\bar{p} \, dA = \iint_S \bar{r}'\times\bar{q} \, dS \qquad ; \qquad \bar{r}'\left(x-x_o,y,z\right) \qquad \bar{r}\left(0,y,z\right)$$

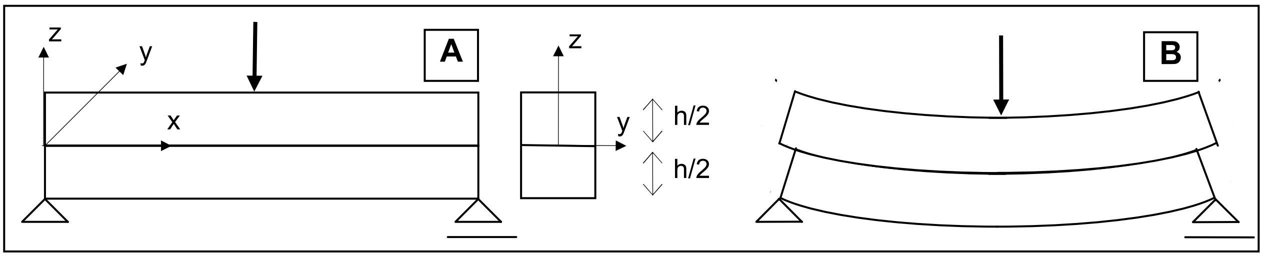
$$\iint_A \left(\tau_{xz}\,y-\tau_{xy}\,z\right) dA = \iint_S -q(x)\,y\, dS \qquad (\equiv 0)\ \text{sym.obciążenia i przekroju wzgl. z} \tag{4}$$

$$\iint_A \sigma_x \, z \, dA = \iint_S \left(x-x_o\right) q(x) \, dS \qquad (\equiv M(x)) \tag{5}$$

$$\iint_A \sigma_x \, y \, dA = \iint_S 0 \, dS \qquad (\equiv 0) \tag{6}$$

∗ wobec dowolności kształtu przekroju A, postaci obciążenia q(x) i powierzchni S, na której ono działa, poszukiwanie naprężeń σ_x , τ_{xy} i τ_{xz} spełniających tożsamościowo równania równoważności (1)÷(6) jest w zasadzie niewykonalne. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku II i III wiersza tensora naprężenia.

1.1. Obserwacje doświadczalne

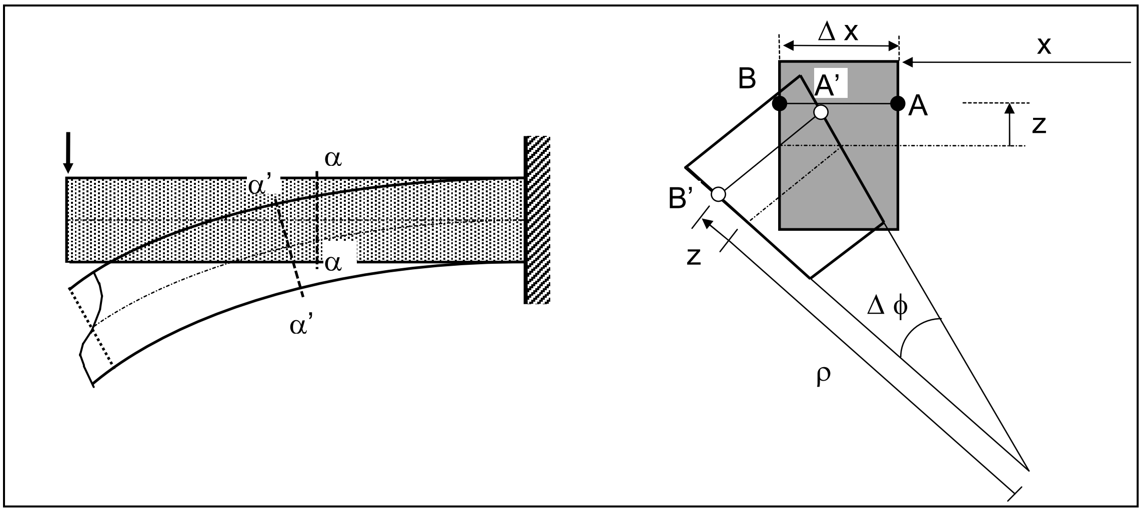


∗ załóżmy, że dwie belki o przekroju prostokątnym leżą swobodnie na sobie i między powierzchniami kontaktu nie występuje tarcie. Każda z nich może się odkształcać niezależnie od drugiej i w wyniku zginania przyjmą one położenie, jak na rys. B. Wyobraźmy sobie teraz, że mamy belkę litą o przekroju bxh. Wzdłuż płaszczyzny obojętnej (jej śladem jest oś belki) muszą wystąpić naprężenia styczne τ_{zx}, „blokujące” możliwość poślizgu. Muszą one mieć swojego „odpowiednika” w płaszczyźnie przekroju, którym są naprężenia τ_{xz}. W przekroju innym niż prostokątny mogą wystąpić również naprężenia τ_{xy} . Zginanie belki skutkuje także powstaniem naprężenia normalnego σ_x. Pozostałe składowe tensora naprężenia są tak małe (jeżeli nie zerowe), że można je pominąć.

2. NAPRĘŻENIE NORMALNE

2.1. Hipoteza płaskich przekrojów (hipoteza Bernouli’ego)

✶ przekrój poprzeczny pręta, płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem, pozostaje w wyniku deformacji nadal płaski i prostopadły do ugiętej osi pręta (w rzeczywistości - wskutek występowania naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym pręta i wywołanych nimi odkształceń kątowych przekrój ulega pewnej deplanacji, ale jej wpływ na wielkość naprężeń normalnych jest pomijalnie mały)

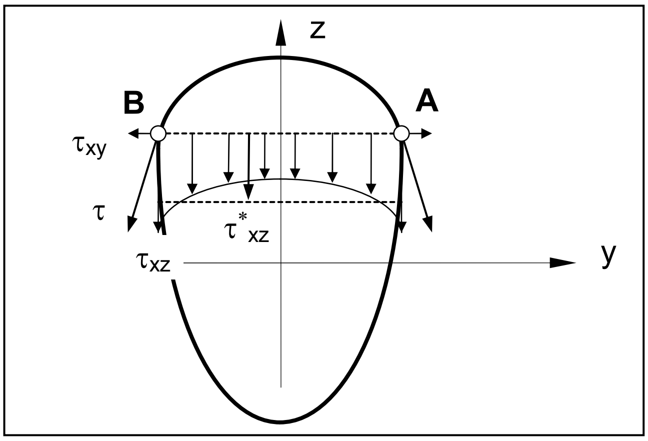


$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{(\rho + z)\,\Delta\phi - \rho\,\Delta\phi}{\Delta\phi} = \frac{z}{\rho(x)} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \text{zał.: } (\sigma_y \cong 0, \sigma_z \cong 0)$$

$$\sigma_x = E\,\frac{z}{\rho(x)} \quad \Rightarrow \quad M(x) = \iint_A \sigma_x\, z\, dA = \iint_A \frac{E}{\rho(x)} z^2\, dA = \frac{E}{\rho(x)} I_y$$

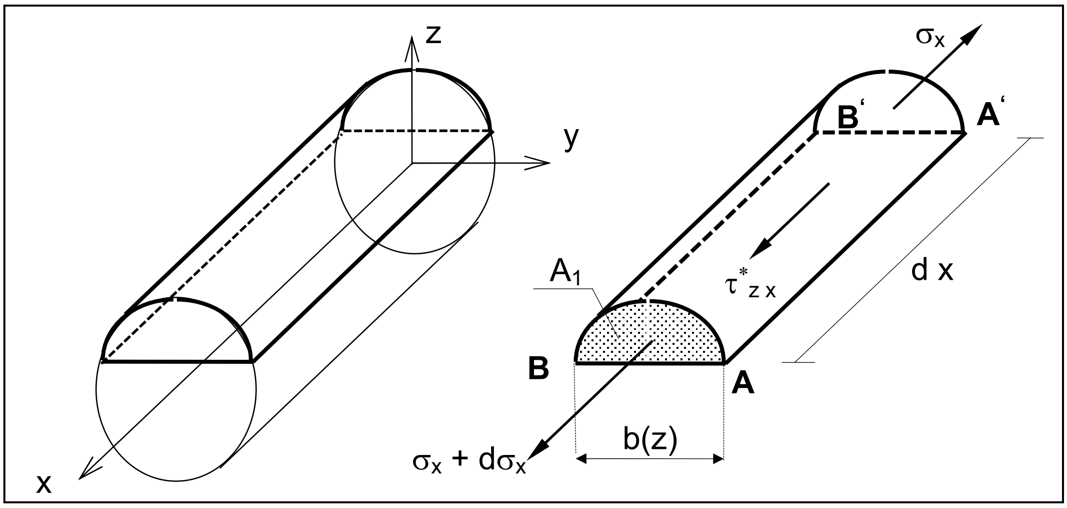
$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E\,I_y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_x = \frac{M(x)}{I_y}\, z}$$

3. NAPRĘŻENIA STYCZNE



Założenie : zamiast rzeczywistego rozkładu naprężenia τ_{xz} przyjmuje się uśredniony rozkład o stałej wartości τ^*_{xz}

3.1. Uśrednione naprężenie styczne τ_{xz}



∗ **warunek równowagi sił**

$$\iint_{A_1} (\sigma_x + d\sigma_x)\, dA - \iint_{A_1} \sigma_x\, dA + \tau^*_{zx}\, b(z)\, dx = 0$$

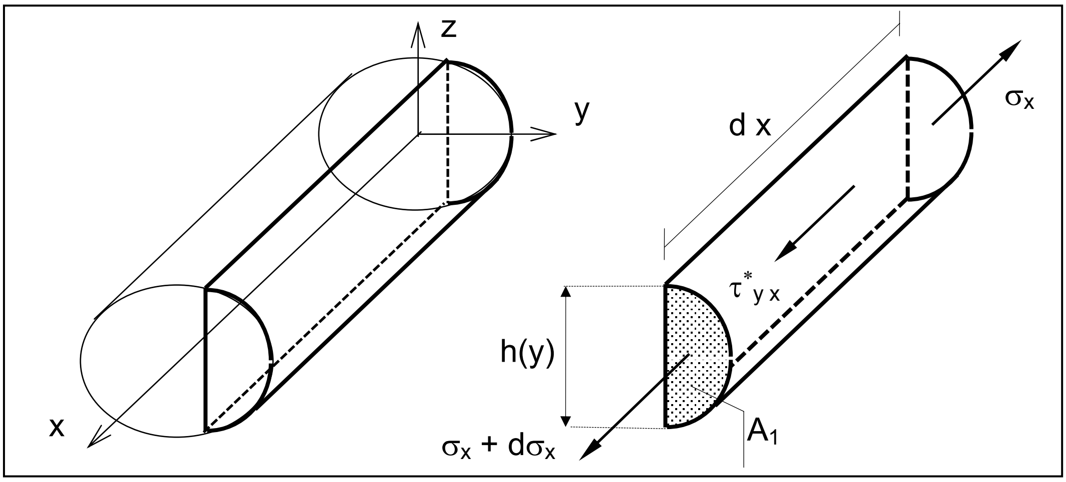
$$\iint_{A_1} d\sigma_x\, dA = -\tau^*_{zx}\, b(z)\, dx$$

$$d\sigma_x = \frac{dM(x)}{I_y} z$$

$$\frac{dM(x)}{I_y} \iint_{A_1} z\, dA = -\tau^*_{zx}\, b(z)\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \tau^*_{zx} = -\frac{dM(x)}{dx} \frac{1}{I_y} \frac{1}{b(z)} S_y(z)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau^*_{xz} \equiv \tau_{xz} = \frac{Q(x)\, S^1_y(z)}{I_y\, b(z)}}$$

3.2. Uśrednione naprężenie styczne τ_{xy}



* **warunek równowagi sił**

$$\iint_{A_1} \left(\sigma_x + d\sigma_x \right) dA - \iint_{A_1} \sigma_x \, dA + \tau^*_{yx} \, h(y) \, dx = 0$$

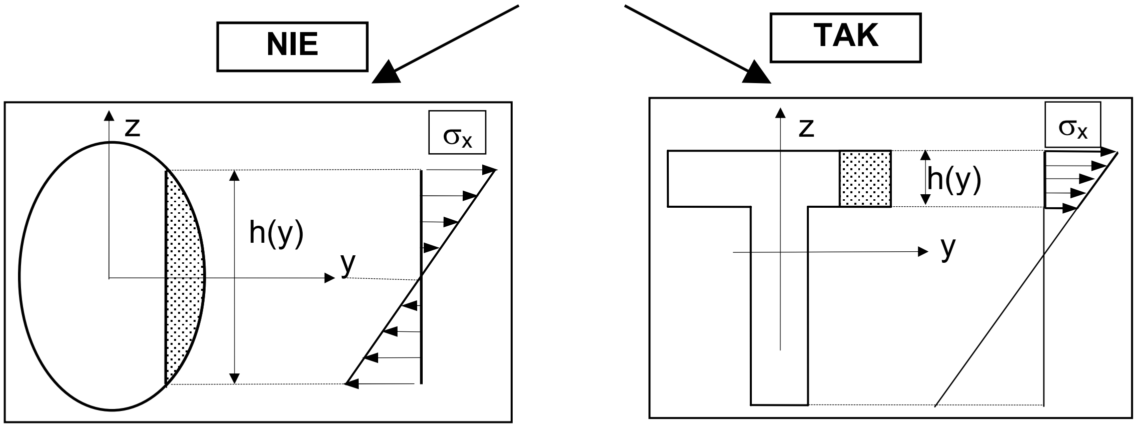
$$\iint_{A_1} d\sigma_x \, dA = - \tau^*_{yx} \, h(y) \, dx \qquad ; \qquad d\sigma_x = \frac{dM(x)}{I_y} z$$

$$\frac{dM(x)}{I_y} \iint_{A_1} z \, dA = - \tau^*_{yx} \, h(y) \, dx \qquad \Rightarrow \qquad \tau^*_{yx} = - \frac{dM(x)}{dx} \frac{1}{I_y} \frac{1}{h(y)} S_y(y)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau^*_{xy} \equiv \tau_{xy} = - \frac{Q(x) \, S^1_y(y)}{I_y \, h(y)}}$$

* **Ograniczenia w zastosowaniu wzoru**

$$\boxed{\tau_{xy} = - \frac{Q(x) \, S^1_y(y)}{I_y \, h(y)}}$$

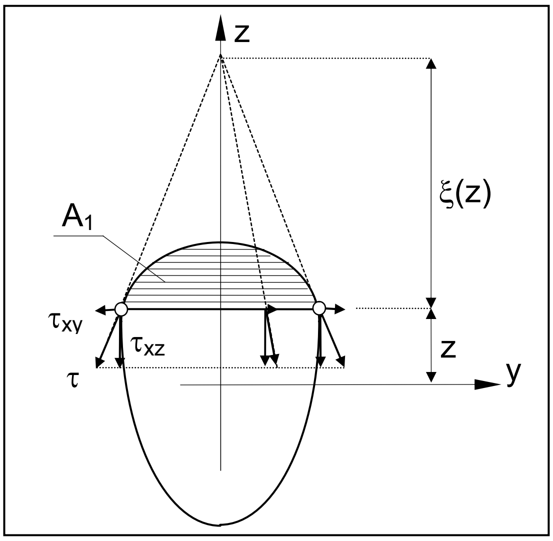


* przekrój przecina oś y, naprężenie σ_x zmienia znak na wysokości h(y), zmianie musi zatem ulegać również znak naprężenia τ_{xy} . Wartość średnia może znacznie odbiegać od rzeczywistej

∗ **Inna zależność opisująca naprężenie styczne τ_{xy}**

1. dla każdego punktu z =*const.* naprężenie styczne $\tau_{xz} = \dfrac{Q(x)\, S_y(z)}{I_y\, b(z)}$

2. dla z =*const.* wektory napręż. stycznego $\bar{\tau}(\tau_{xy}, \tau_{xz})$ przecinają się w jednym punkcie

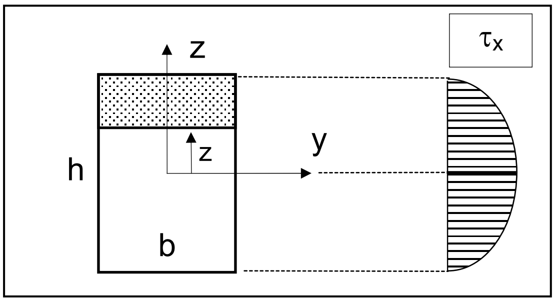


$$\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}} = \frac{y}{\zeta(z)} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_{xy} = \frac{y}{\zeta(z)}\,\tau_{xz}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{y}{\zeta}\,\frac{Q(x)\, S_y^1(z)}{I_y\, b(z)}}$$

4. PRZYKŁADY

4.1. Przekrój prostokątny

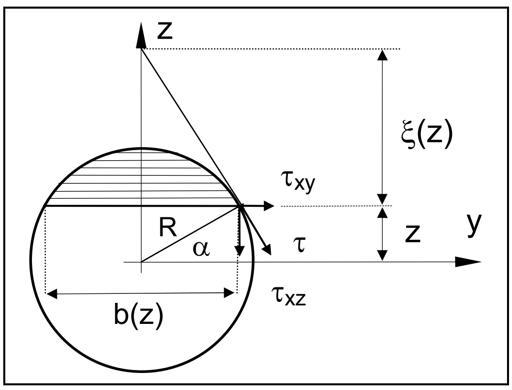


$$S_y(z) = b \times \left(\frac{h}{2} - z\right) \times \left(z + \frac{\frac{h}{2} - z}{2}\right) = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q\,\frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{\frac{bh^3}{12}\, b} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}\left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\tau_{xz}^{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A} \qquad \text{dla } z = 0}$$

4.2. Przekrój kołowy



$$S_y(z) = \frac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha \qquad ; \qquad I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$b(z) = 2 R \cos\alpha$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q(x)\, S_y^1(z)}{I_y\, b(z)} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)$$

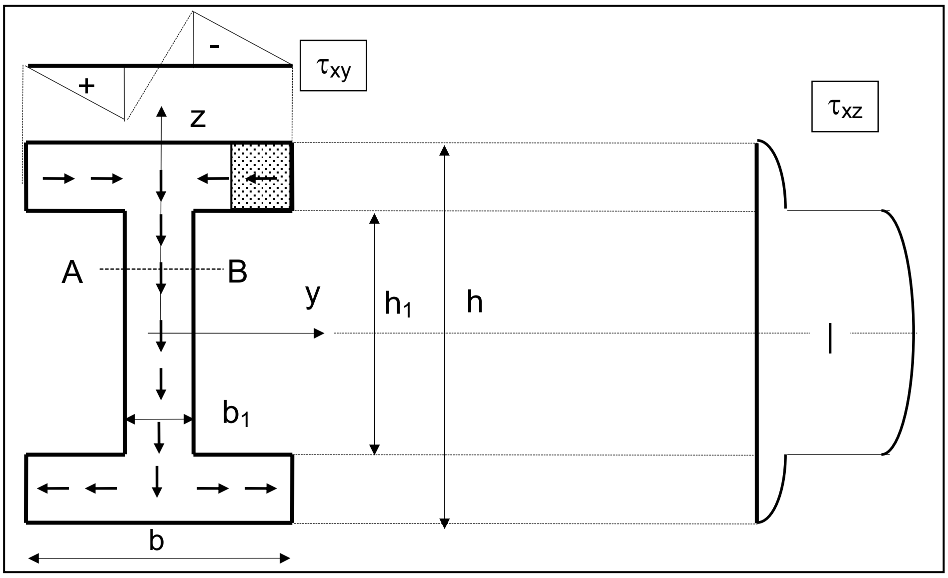
$$\boxed{\tau_{xz}^{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A} \qquad \text{dla } z = 0}$$

$$\tan\alpha = \frac{b(z)/2}{\zeta(z)} = \frac{z}{b(z)/2} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{b^2(z)}{4\,z} = \frac{R^2 - z^2}{z}$$

$$\tau_{xy} = \frac{y}{\zeta(z)}\,\tau_{xz} = \frac{y\,z}{R^2 - z^2}\,\frac{4}{3}\,\frac{Q}{A}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{4}{3}\,\frac{Q}{A}\,\frac{y\,z}{R^2}}$$

4.3. Przekrój dwuteowy



∗ **środnik** $-h_1/2 \le z \le h_1/2$

$$S_y^1(z) = S_y^{A-B}(z) = b\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{2}\right) + b_1\left(\frac{h_1}{2} - z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2} + z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right) + \frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - z^2\right)$$

$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{Q(x)}{I_y\,b_1}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right) + \frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - z^2\right)\right]}$$

∗ **stopka** $h_1/2 \le |z| \le h/2$

$$S_y^1(z) = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\frac{1}{2}\left(z + \frac{h}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{xz} = \frac{Q(x)}{I_y}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\right]}$$

$$S_y(y) = \left(\frac{b}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} - y\right)\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Q(x)}{I_y}\,\frac{S_y(y)}{\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right)} = -\frac{Q(x)}{I_y}\,\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{2}\right)$$

∗ **moment bezwładności**

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12} - 2\,\frac{\left(\frac{b - b_1}{2}\right)h_1^3}{12} = \frac{b_1\,h_1^3}{12} + \frac{b}{12}\left(h^3 - h_1^3\right)$$

∗ **udział środnika w przenoszeniu siły poprzecznej**

$$Q_s = \iint\limits_{A_s} \tau_{xz}\, dA = \int\limits_{-b_1/2}^{b_1/2} dy \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_{xz}\, dz = 4 \int\limits_{0}^{b_1/2} dy \int\limits_{0}^{h_1/2} \tau_{xz}\, dz$$

$$Q_s = 4\, \frac{Q(x)}{I_y\, b_1} \int\limits_{0}^{b_1/2} dy \int\limits_{0}^{h_1/2} \left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - z^2 \right) \right] dz$$

$$Q_s = \frac{Q(x)}{I_y} \left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) h_1 + \frac{b_1\, h_1^3}{12} \right]$$

$$Q_s = \frac{\dfrac{b}{8}\left(h^2 - h_1^2 \right) h_1 + \dfrac{b_1\, h_1^3}{12}}{\dfrac{b}{12}\left(h^3 - h_1^3 \right) + \dfrac{b_1\, h_1^3}{12}}\, Q(x)$$

∗ **udział półek w przenoszeniu momentu zginającego**

$$M_p = \iint\limits_{A_p} \sigma_x\, z\, dA = \iint\limits_{A_p} \frac{M}{I_y} z^2\, dA = \frac{M}{I_y} I_y^{\text{półek}}$$

$$M_p = \frac{b\left(h^3 - h_1^3 \right)}{b_1\, h_1^3 + b\left(h^3 - h_1^3 \right)}\, M$$

TYP	b [cm]	b_1 [cm]	h [cm]	h_1 [cm]	Q_s / Q	M_p / M
100	5.0	0.45	10	8.64	0.936	0.859
160	7.4	0.63	16	14.10	0.946	0.844
220	9.8	0.81	22	19.56	0.950	0.836
300	12.5	1.08	30	26.76	0.952	0.826
400	15.5	1.44	40	35.68	0.953	0.815

WNIOSEK: w przekroju dwuteowym środnik służy do przenoszenia siły poprzecznej, zaś za przenoszenie momentu zginającego odpowiedzialne są półki.