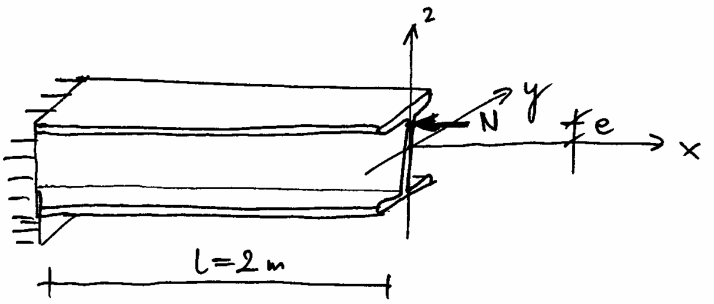
Określić nośność wspornika dwuteowego "I 120" obciążonego : (1)

a) osiowo

b) ~~m~~ mimośrodowo $(e = 0.02\ m)$

Wyznaczyć taką wartość mimośrodu, przy której wyboczenie w obu płaszczyznach głównych wystąpi przy tej samej sile



I 120

$J_y = 328 \cdot 10^{-8}\ m^4$

$J_z = 21.5 \cdot 10^{-8}\ m^4$

$A = 14.2 \cdot 10^{-4}\ m^2$

$R = 200$ MPa

$E = 210$ GPa

$R_H = 180$ MPa

1) obciążenie osiowe

~~a) war. wytrz. $\sigma = \frac{N}{A} \leq R \Rightarrow N \leq AR = 284$ kN~~

b) wyboczenie w pł. (x,y) (wzg. osi z)

$$\lambda = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{J_z}{A}}} = 325.1$$

$$\lambda_{gr} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_H}} = 107.3$$

$\Rightarrow \lambda > \lambda_{gr}$

wybocz. w zakresie Eulera

$$N_{kr} = \pi^2 \frac{E J_z}{l_w^2} = \frac{\pi^2 E J_z}{4 l^2} = 27.9 \text{ kN}$$

2) obc. mimośrodowe

a) wyboczenie w pł. (x,y) (obrót wokół osi z - osi min. momentu bezwładności)

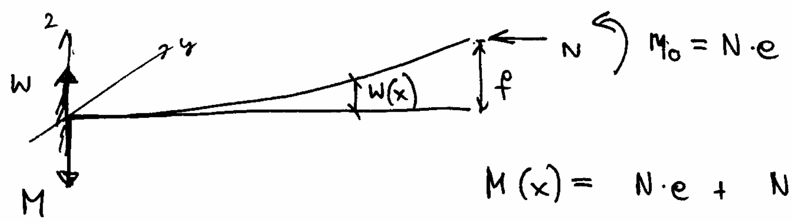
Mimośrodowe przyłożenie siły (mimośr. e_z) nie ma wpływu na wartość siły krytycznej - jest ona taka jak dla siły przyłożonej osiowo.

$$N_{kr} = 27.9 \text{ kN}$$

b) możliwe wyboczenie w pł. (x,z) (obrót wokół osi y - osi maksymal. mom. bezwładności) ~~maksy~~

$$\left|\sigma_x\right| = \left| -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z^{max} \right| \leq R \; !$$

stąd nośność



$$M(x) = N \cdot e + N\left[f - w(x)\right]$$

$$EJ_y w'' = Ne + N[f - w]$$ ②

$$EJ_y w'' + Nw = Ne + Nf$$

$$k^2 = \frac{N}{EJ_y}$$

$$w'' + k^2 w = k^2(e+f)$$

$$w_s = C \Rightarrow k^2 C = k^2(e+f) \Rightarrow \underline{w_s = e+f}$$

$$\underline{w(x) = A \sin kx + B \cos kx + (e+f)}$$

war. brzegowe

$$w(0)=0 \Rightarrow B + (e+f) = 0 \Rightarrow \underline{B = -(e+f)}$$

$$w'(0)=0 \Rightarrow kA = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}$$

$$w(l) = f \Rightarrow B\cos kl + (e+f) = \cancel{f}$$

$$B\cos kl = -e \Rightarrow -e\cos kl - f\cos kl = -e$$

$$\underline{f = e\,\frac{1-\cos kl}{\cos kl}}$$

$$w(x) = -(e+f)\cos kx + (e+f)$$

$$\underline{w(x) = -\frac{e}{\cos kl}\left[\cos kx - 1\right]}$$

$$e+f = e + e\,\frac{1-\cos kl}{\cos kl} = e\left[\frac{\cos kl + 1 - \cos kl}{\cos kl}\right] = \frac{e}{\cos kl}$$

$$M(x) = Ne + N\left[e\,\frac{1-\cos kl}{\cos kl} + \frac{e}{\cos kl}(\cos kx - 1)\right] =$$

$$= Ne + N\left[\frac{e}{\cos kl}\left[1 - \cos kl + \cos kx - 1\right]\right] =$$

$$= Ne + N\left[-e + e\,\frac{\cos kx}{\cos kl}\right]$$

$$\underline{M(x) = Ne\,\frac{\cos kx}{\cos kl}} \Rightarrow M_{max} = \frac{Ne}{\cos kl}$$

war. wytrzymałościowy

$$\sigma_x^{max} = \left| -\frac{N}{A} - \frac{M_{max}}{J_y} z_{max} \right| \leq R$$

$$\frac{N}{A}\left[1 + \frac{Ae}{J_y} z_{max} \frac{1}{\cos kl}\right] \leq R$$

rozw. numeryczne (MATHCAD) daje $N_e \cong 151.3$ kN

Ostatecznie zatem nośność pręta uzależniona jest od wyboczenia w pł. (x, y) i mimośród $e = 0.02$ m nie wpływa na nośność

$$N = N_{kr} = 27.9 \text{ kN}$$

verte →

Gdyby przyjąć zasadę zesztywnienia

$$\left|\sigma_x^{max}\right| = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{J_y} z_{max} \leq R$$

$$M_{max} = N \cdot e$$

$$\frac{N}{A} + \frac{N\, e\, A}{A\, J_y} z_{max} \leq R$$

$$\frac{N}{A}\left(1 + \frac{A e}{J_y} z_{max}\right) \leq R$$

$$N = 186.9 \text{ kN}$$

Empiryczny wzór Jasińskiego

$$\frac{N \cdot m_w}{A} + \frac{M}{W_y} \leq 1.05\, R$$

$$\lambda_p = \frac{1660 \cdot 10^3}{\sqrt{R\,[Pa]}} = 117.4$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_p} = \frac{325.1}{117.4} = 2.77 \Rightarrow m_w = 15.35$$

$$\frac{N \cdot m_w}{A} + \frac{N \cdot e}{J_y} z_{max} \leq 1.05\, R$$

$$\frac{N}{A}\left(m_w + \frac{A e}{J_y} z_{max}\right) \leq 1.05\, R$$

$$N = 18.8 \text{ kN}$$

3) wielkość mimośrodu e, taką, aby wyboczenie w obu płaszczyznach głównych zachodziło przy tej samej sile N_{kr}

$$\sigma_x^{max} \leq R$$

$$1 + \frac{Ae}{J_y} z_{max} \frac{1}{\cos kl} = \frac{AR}{N_{kr}}$$

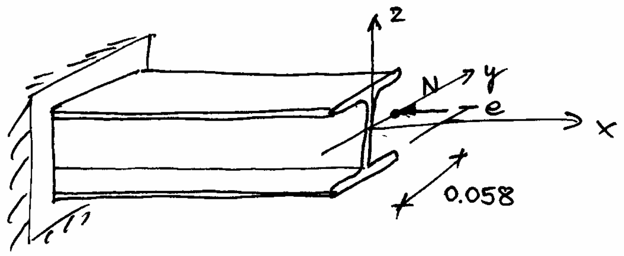
$$e = \left(\frac{AR}{N_{kr}} - 1\right) \frac{J_y}{A} \frac{1}{z_{max}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{N_{kr}}{EJ_y}} \cdot l\right)$$

$$e = 32.5 \text{ cm}$$

Określić nośność wspornika I 120 obciążonego:

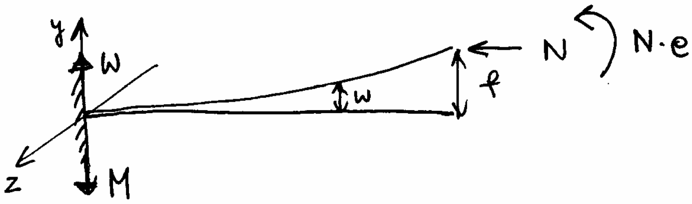
a) osiowo ———— $N_{kr} = 27.9$ kN

b) mimośrodowo $e = 0.02$ m



$$\underline{EJ_z} \, w'' = M(x)$$

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ_z}} \quad !$$



$$w(x) = -\frac{e}{\cos kl}\left[\cos kx - 1\right]$$

$$M_{max} = \frac{Ne}{\cos kl}$$

$$\frac{N}{A}\left[1 + \frac{Ae}{J_z} y^{max} \frac{1}{\cos kl}\right] \leq R$$

$$N_e = 18.9 \text{ kN}$$

z zasady zesztywnienia

$$\frac{N}{A}\left(1 + \frac{Ae}{J_z} y_{max}\right) \leq R$$

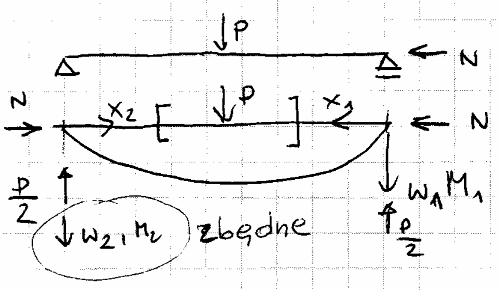
$$N = 58.8 \text{ kN}$$

ze wzoru Jasińskiego

$$\frac{N}{A}\left(m_w + \frac{Ae}{J_z} y^{max}\right) \leq 1.05\, R$$

$$N = 15.5 \text{ kN}$$

Wyznaczyć linię ugięcia dla belki zginanej siłą P i ściskanej siłą N.



$$0 \le x_1 \le \frac{L}{2}$$

$$M(x_1) = \frac{P}{2} x_1 + N w$$

$$EJ w_1'' = -\frac{P}{2} x_1 - N w_1$$

$$w_1'' + k^2 w_1 = -\frac{P}{2EJ} x_1 \qquad \boxed{k^2 = \frac{N}{EJ}}$$

$$w_{s1} = C x_1 \Rightarrow \begin{cases} k^2 C x_1 = -\frac{P}{2EJ} x_1 \\ C = -\frac{P}{2N} \end{cases}$$

$$w_1(x_1) = A_1 \sin kx_1 + B_1 \cos kx_1 - \frac{P}{2N} x_1$$

w. brzegowy

$$w_1(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$w_1(x_1) = A_1 \sin kx_1 - \frac{P}{2N} x_1$$

$$0 \le x_2 \le \frac{L}{2}$$

$$M(x_2) = \frac{P}{2} x_2 + N w_2$$

$$EJ w_2'' = -\frac{P}{2} x_2 - N w_2$$

zbędne

$$w_2(x_2) = A_2 \sin kx_2 - \frac{P}{2N} x_2$$

w. zszycia

$$w_1\left(\frac{L}{2}\right) = w_2\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A_1 \cancel{\sin k\frac{L}{2}} - \cancel{\frac{P}{2N}\frac{L}{2}} = A_2 \cancel{\sin k\frac{L}{2}} - \cancel{\frac{P}{2N}\frac{L}{2}}$$

$$w_1'\left(\frac{L}{2}\right) = w_2'\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A_1 k \cancel{\cos k\frac{L}{2}} - \cancel{\frac{P}{2N}} = A_2 k \cancel{\cos k\frac{L}{2}} - \cancel{\frac{P}{2N}}$$

$$A_1 = A_2$$

+ dod. war.

$$w_1'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow A_1 k \cos k\frac{L}{2} - \frac{P}{2N} = 0$$

$$A_1 = \cancel{A_2} = \frac{P}{2Nk} \frac{1}{\cos\frac{kL}{2}}$$

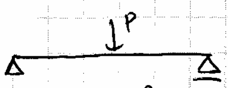
$$w_1(x_1) = \frac{P}{2Nk}\left[\frac{\sin kx_1}{\cos\frac{kL}{2}} - k x_1\right]$$

ugięcie maksymalne

$$w_{max} = w_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2Nk}\left[tg\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right] = \frac{P}{2k^3EJ}\left[tg\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right]$$

$N = k^2EJ$

$$w_{max} = \frac{Pl^3}{48EJ} \cdot \frac{24}{k^3l^3}\left(tg\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right)$$

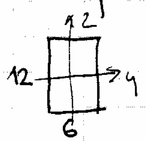


$$w_p = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_{max} &= w_p \cdot F(k,l) \\ F(k,l) &= \frac{24}{k^3l^3}\left(tg\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right) \\ k &= \sqrt{N/EJ} \end{aligned}}$$

F – wsp. charakteryzujący wpływ siły podłużnej na ugięcie maksymalne

Przykład liczbowy



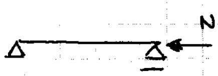
$l = 3\ m$

$J_{max} = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 8.64 \cdot 10^{-6}\ m^4$ $\qquad J_{min} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 2.16 \cdot 10^{-6}\ m^4$

$EJ_y = 2.1 \cdot 10^8\ \frac{kN}{m^2} \cdot 8.64 \cdot 10^{-6}\ m^4 = 1.81 \cdot 10^3\ kNm^2$

$P = 50\ kN$ $\qquad EJ_{min} = 453.6\ kNm^2$

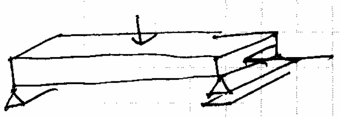
$w_p = \frac{Pl^3}{48EJ_y} = \frac{50 \cdot 27}{48 \cdot 1.81 \cdot 10^3} = 1.55\ cm$ $\quad$ [dla EJ_{min} $w_p = 6.2\ cm$



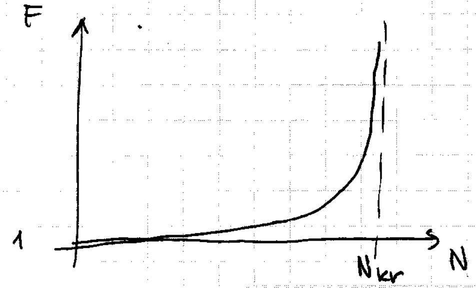
$$\Rightarrow \quad P^E_{kr} = \frac{\pi^2\, EJ_{min}}{l_w^2} = \pi^2\,\frac{2.1 \cdot 10^8 \cdot 0.12\,(0.06)^3}{12 \cdot 9} = 497\ kN$$

$497{,}428$

dla ustawienia



N[kN]	5	10	30	60	100	200	300	400	490	497.4
$F = \frac{w_{max}}{w_p}$	1.01	1.02	1,06	1.14	1,25	1,66	2,5	5,05	66	17469



np. $N = 300\ kN$

$$k = \sqrt{300/453.6} = 0{,}813$$

$$F = \frac{24}{(0{,}813)^3\ 3^3}\left(tg\,\frac{0{,}813 \cdot 3}{2} - \frac{0{,}813 \cdot 3}{2}\right)$$

$= 2{,}5$

Pęcice, ul. Graniczna 10; 05-816 MICHAŁOWICE
tel.: (0-22) 723 38 12; fax: (0-22) 723 52 01
tel.: 0-602 223 170; 0-601 201 569; 0-601 351 569; 0-90 286 896;
e-mail: info@wadim.com.pl