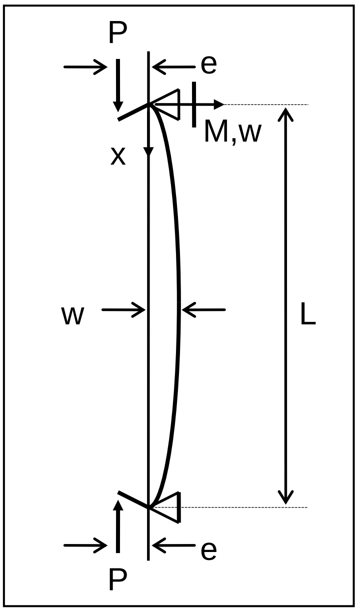
1. ANALIZA SŁUPA MIMOŚRODOWO ŚCISKANEGO

ZADANIE: przeanalizować zachowanie słupa wolnopodpartego mimośrodowo ściskanego siłą P (obciążenie konserwatywne). Mimośród e mierzony jest od środka ciężkości przekroju do linii działania siły P.



$$M(x) = P\left[e + w(x)\right]$$

$$EI\,w''(x) = -M(x) = -P\left[e + w(x)\right]$$

$$k^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{EI}$$

$$w''(x) + k^2\,w(x) = -k^2 e$$

$$w(x) = w_{oRJ}(x) + w_{sRN}(x)$$

$$w_{oRJ}(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$$w_{sRN}(x) = -e$$

$$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e$$

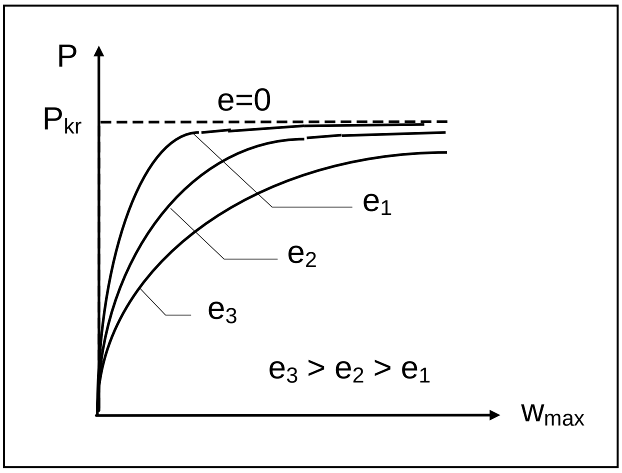
∗ warunki brzegowe dla wyznaczenia stałych całkowania C_1 i C_2

$$w(x=0) = 0 \qquad ; \qquad w(x=L) = 0$$

$$C_2 = e \qquad ; \qquad C_1 = e\,\frac{1-\cos kL}{\sin kL} = e\tan\frac{kL}{2}$$

$$\boxed{w(x) = e\left(\tan\frac{kL}{2}\sin kx + \cos kx - 1\right)}$$

$$\boxed{w_{max} = w\left(x = \frac{L}{2}\right) = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right)} \qquad (1)$$



$$w_{max} = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$P = \frac{4EI}{L^2}\left[\arccos\left(\frac{e}{e + w_{max}}\right)\right]^2 \qquad (2)$$

* związek w_{max} z siłą P jest **nieliniowy,** mimo że wykorzystano zlinearyzowane równanie linii ugięcia (zlinearyzowany wzór na krzywiznę), jak również liniowy związek fizyczny (w oparciu o niego otrzymano równanie linii ugięcia). Jest to wynikiem „sprzężenia" momentu zginającego z ugięciami (moment zginający nie da się określić bez znajomości ugięć). Mówiąc inaczej - jest to wynik **odstępstwa od zasady zesztywnienia** (mówi ona, że wpływ przemieszczeń na wielkości sił przekrojowych jest pomijalny)
* ugięcie rośnie nieograniczenie, gdy siła zmierza do pewnej wartości, którą nazwano siłą krytyczną P_{kr}.

$$w_{max} \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{kL}{2} \to 0$$

$$\frac{kL}{2} = \frac{n\pi}{2} \qquad n = 1, 3, 5 \ldots.$$

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad\qquad \boxed{P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

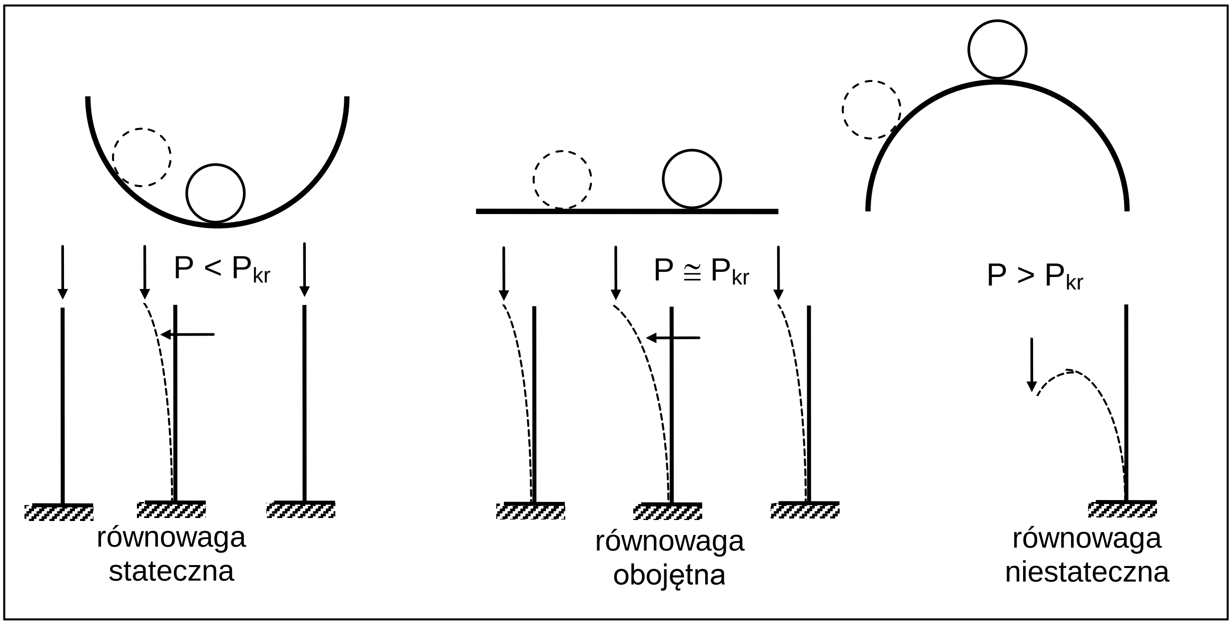
* jeżeli mimośród e=0, ugięcie w_{max} wynosi:

dla skończonej i dodatniej wartości $\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right)$ czyli $\frac{kL}{2} < \frac{\pi}{2}$; $w_{max} = 0$

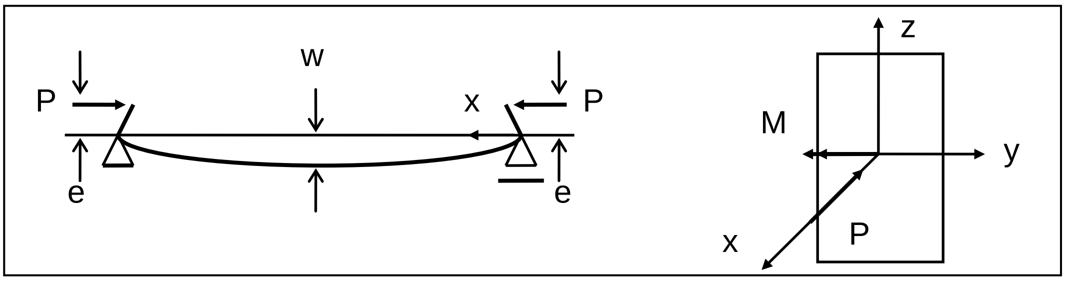
dla $\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2}$ czyli $P = P_{kr}$; w_{max} jest nieokreślone i może przyjmować dowolną wartość

Tak długo, jak $P<P_{kr}$ pręt zachowuje się w sposób „stateczny", tzn. znajduje się w stanie początkowej równowagi prostoliniowej. Wówczas, **gdy siła osiągnie wartość krytyczną P_{kr} pręt traci stateczność (ulega wyboczeniu),** a jego ugięcia mogą być dowolnie duże.

Wyboczenie jest to zatem **utrata** przez ściskany pręt **stanu równowagi statecznej na rzecz równowagi obojętnej lub niestatecznej**.



1.1. Naprężenie w słupie z odstępstwem od zasady zesztywnienia



$$M_{max} = P\, e \sec \frac{kL}{2} \tag{3}$$

$$\sigma_{max} = \left| -\frac{P}{A} - \frac{M_{max}}{I} z_{max} \right| = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{A\,e}{W} \sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \right)$$

(I człon opisuje osiowe ściskanie pręta, zaś drugi - zginanie słupa)

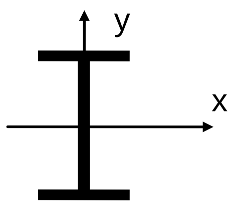
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{A\,e}{W} \sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right) < R \tag{4}$$

∗ naprężenie maksymalne **przy wykorzystaniu zasady zesztywnienia** (postępowanie analogiczne, jak w przypadku mimośrodowego rozciągania)

$$\sigma_{max} = \left| -\frac{P}{A} - \frac{M_{max}}{I} z_{max} \right| = \left| -\frac{P}{A} - \frac{P\,e}{I} z_{max} \right| = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{A\,e}{W} \right) < R$$

∗ **Przykład liczbowy**

Obliczyć nośność pręta ściskanego P, wykonanego z dwuteownika 120, o długości L=5 m.



$I_x = 328 \times 10^{-8}\ m^4$ $\quad A = 14.2 \times 10^{-4}\ m^2$

$E = 210\ GPa$ $\quad R = 200\ MPa$

$e = 0.05\ m$

Rozwiązanie:

∗ bez zasady zesztywnienia (teoria II rzędu) $P_{II} = 912\ kN$

∗ z zasadą zesztywnienia $P_I = 123.5\ kN$

$$\Delta P = \frac{P_I - P_{II}}{P_{II}}\ 100\% = 35{,}4\ \%$$

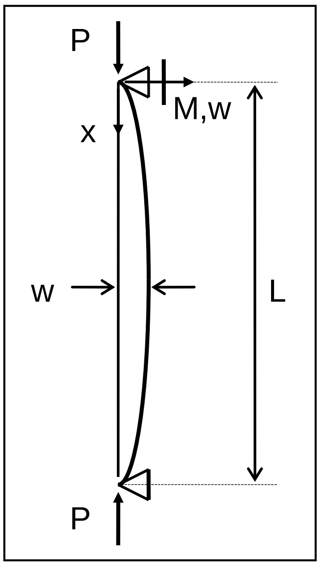
2. SIŁA KRYTYCZNA DLA SŁUPA

2.1. Zakres liniowo sprężysty

∗ analizowany jest tzw. **słup idealny**, tzn. idealnie prosty i obciążony centralnie przyłożoną siłą ściskającą P

∗ materiał słupa jest liniowo sprężysty (materiał Hooke'a)

∗ **pręt swobodnie podparty**



$$M(x) = P_{kr}\, w(x)$$

$$E\,I\, w''(x) = -M(x) = -P_{kr}\, w(x)$$

$$k^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{P_{kr}}{E\,I}$$

$$w''(x) + k^2\, w(x) = 0$$

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

$$w(x=0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0$$

$$w(x=L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = A \sin kL$$

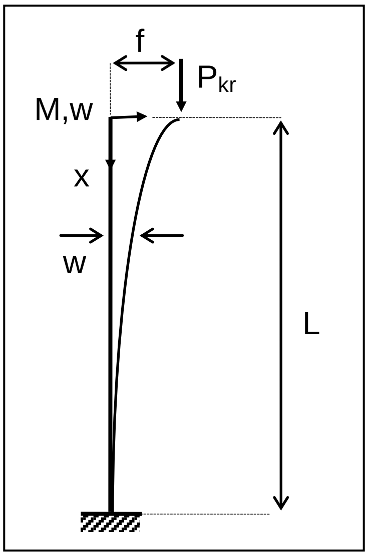
$$kL = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3.....$$

$$\boxed{w(x) = A \sin \frac{n\pi x}{L}}$$

$$\sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}} = \frac{n\pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

$$\boxed{\min P_{kr} = P_{kr}(n=1) = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

∗ **pręt wspornikowy**



$$M(x) = -P_{kr}\left[f - w(x) \right]$$

$$E\,I\, w''(x) = -M(x)$$

$$k^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{P_{kr}}{E\,I}$$

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + f$$

$$w(x=0) = f \qquad \Rightarrow \qquad B = 0$$

$$w(x=L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = A \sin kL + f$$

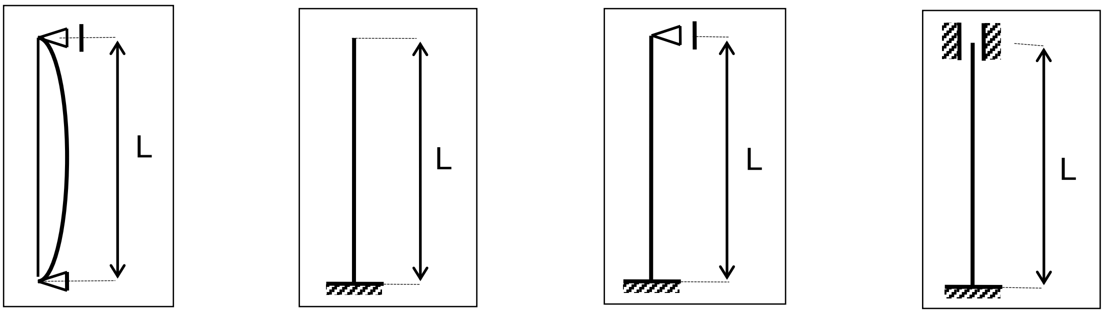
$$w'(x=L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = k\, A \cos kL$$

$$kL = n\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 1, 3, 5.....$$

$$\sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}} = \frac{n\pi}{2L} \qquad \Rightarrow \qquad P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{(2L)^2}$$

$$\boxed{\min P_{kr} = P_{kr}(n=1) = P_E = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}}$$

∗ **ogólna postać siły krytycznej (siły Eulera 1707-1783)**



długości wyboczeniowe L_w

$L_w = L$ $\qquad$ $L_w = 2\,L$ $\qquad$ $L_w \cong \frac{1}{\sqrt{2}}\,L$ $\qquad$ $L_w = \frac{1}{2}\,L$

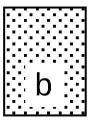
$$\boxed{P_{kr} = P_E = \frac{\pi^2\,E\,I_{min}}{L_w^2}}$$

∗ **podstawowe zasady kształtowania słupów**

- **siła krytyczna**, jako obciążenie powodujące wyboczenie słupa (z reguły wyboczenie oznacza utratę przez konstrukcję zdolności do prawidłowej pracy), **powinna być jak największa**
- siła krytyczna jest proporcjonalna do sztywności giętnej słupa $E\,I_{min}$ i odwrotnie proporcjonalna do długości wyboczeniowej L_w - tak więc **zwiększenie siły P_{kr}** może nastąpić jedynie **w drodze odpowiedniego ukształtowania przekroju poprzecznego lub/i schematu statycznego** słupa. Nie zwiększa siły krytycznej zastosowanie materiału o bardzo wysokiej wytrzymałości !
- w przypadku słupów przez **odpowiednie ukształtowanie przekroju** rozumie się taki dobór jego geometrii, który **z określonej ilości materiału** pozwala **uzyskać przekrój o maksymalnej sztywności**, czyli maksymalnym momencie bezwładności. Można to osiągnąć poprzez rozmieszczenie materiału tak daleko od środka ciężkości przekroju, jak to tylko możliwe.

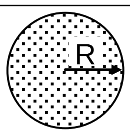
Przykład.

Pole przekroju słupa ma wynosić A=50 cm^2. Porównać siły krytyczne dla słupa o przekroju prostokątnym, kołowym i rurowym.

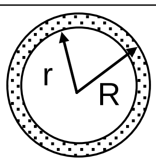


h

$$h/b = k \quad ; \quad k > 1 \quad ; \; A = k\,b^2 \quad ; \quad I_{min} = \frac{h\,b^3}{12} = \frac{A^2}{12\,k}$$



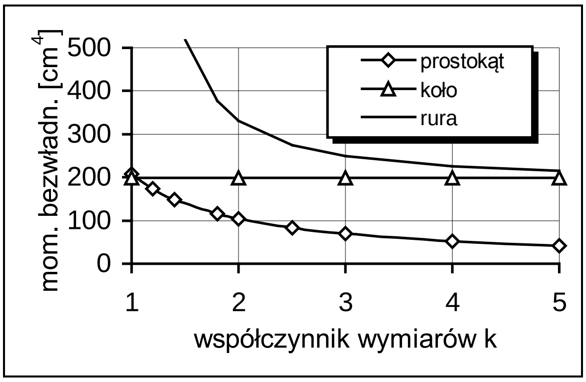
$$A = \pi\,R^2 \quad ; \quad I = \frac{\pi\,R^4}{4} \quad ; \; R = 3.989\text{ cm} \quad ; \quad I = 198.944\text{ cm}^4$$

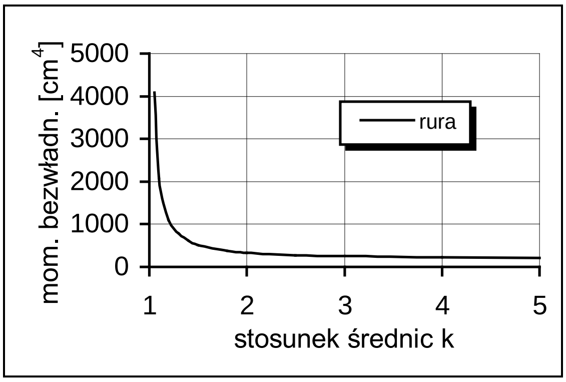


$$k = \frac{R}{r} \quad ; \quad A = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi r^2\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) = \pi r^2\left(k^2 - 1\right) \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{A}{\pi\left(k^2 - 1\right)}$$

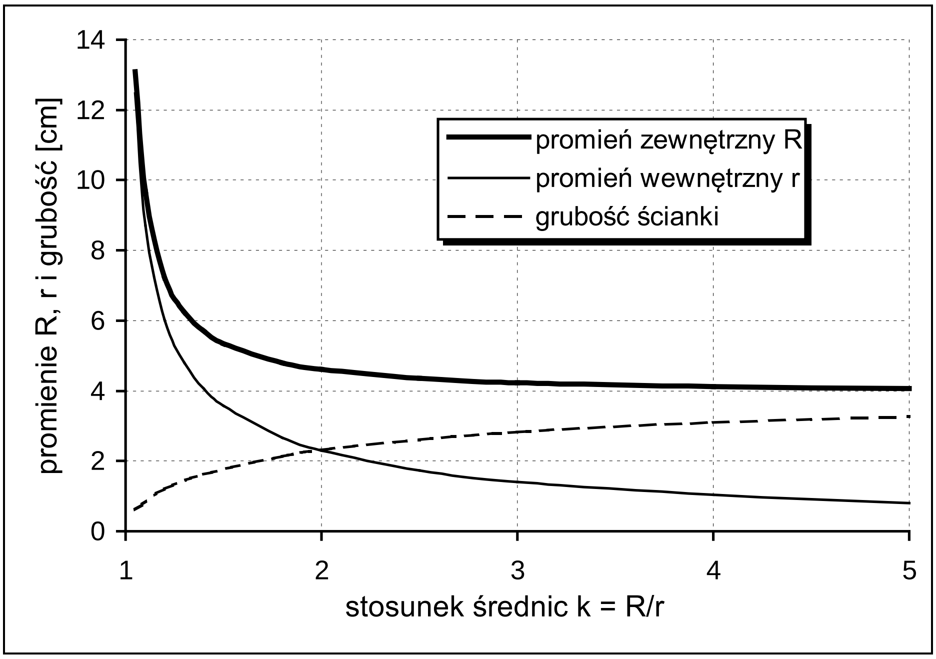
$$I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right) = \frac{\pi}{4} r^4\left(k^4 - 1\right) = \frac{\pi}{4}\frac{A^2}{\pi^2\left(k^2 - 1\right)^2}\left(k^4 - 1\right) = \frac{A^2}{4\pi}\frac{\left(k^2 + 1\right)}{\left(k^2 - 1\right)}$$

- z wykresów widać, że **przekrój rury** jest zdecydowanie **bardziej ekonomiczny niż przekrój lity** o tym samym polu





- **czym stosunek promieni ścianki zewn. i wewn. jest mniejszy** (a zatem „cieńsza" jest ścianka rury) **tym korzyści** płynące z zastosowania przekroju rurowego **są większe**. Niestety, **jeżeli grubość jest zbyt mała** ścianka rury sama staje się niestateczna i **może dojść do lokalnego wyboczenia** w postaci „pofałdowania" powierzchni rury. Zamiast globalnego wyboczenia słupa mamy wówczas tzw. lokalną utratę stateczności (zapobiega się jej przez stosowanie użebrowania).

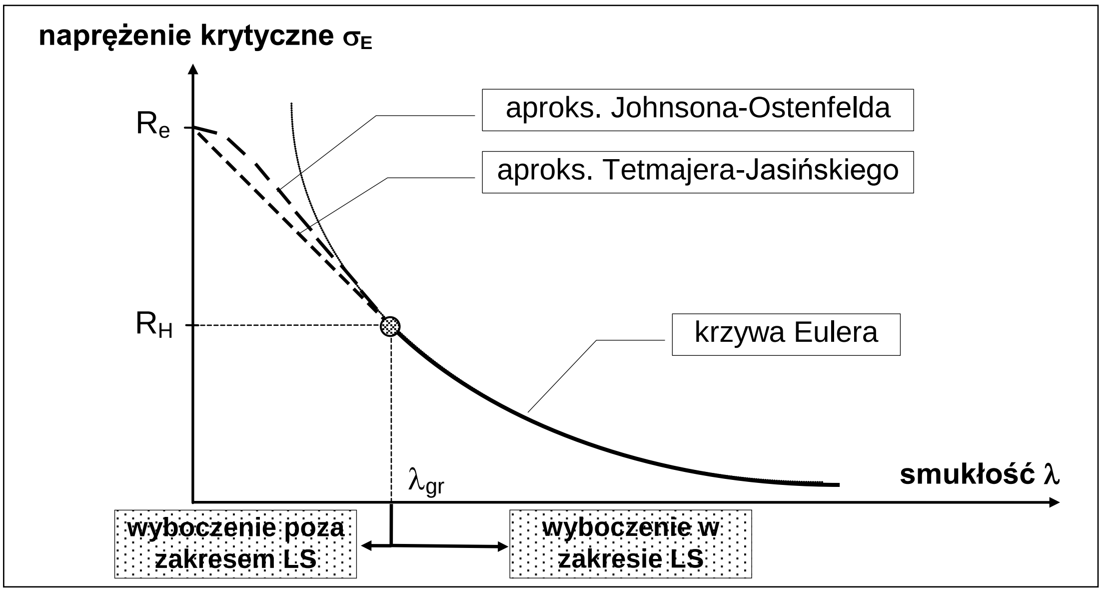


3. NAPRĘŻENIE NORMALNE W SŁUPIE

∗ **średnie naprężenie ściskające**

$$\sigma_{kr} = \sigma_E = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{A L_w^2} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{L_w^2}$$

$$\boxed{\lambda \overset{def.}{\underset{smukłość}{=}} \frac{L_w}{i_{min}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$



∗ **zakres liniowo sprężystej (LS)pracy materiału**

$$\boxed{\sigma_E < R_H \quad \Rightarrow \quad \lambda > \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}}$$

∗ **zakres pozaliniowo sprężystej pracy materiału**

$$R_H < \sigma_E < R_e \quad \Rightarrow \quad \lambda < \lambda_{gr}$$

warunki „brzegowe” $\boxed{\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \sigma = R_e \quad ; \quad \lambda = \lambda_{gr} \;\Rightarrow\; \sigma = R_H}$

aproksymacja liniowa T-J $\boxed{\sigma_{kr}^{T-J} = a - b\lambda \;\Rightarrow\; \sigma_{kr}^{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}}\,\lambda}$

aproksymacja paraboliczna J-O $\boxed{\sigma_{kr}^{J-O} = A - B\lambda^2 \;\Rightarrow\; \sigma_{kr}^{J-O} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi^2}\frac{R_H}{E}\lambda^2}$

4. PROJEKTOWANIE PRĘTÓW ŚCISKANYCH

- warunek projektowania $P \le P_{kr} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \dfrac{P}{A} \le \sigma_{kr}$

- W przypadku dopuszczenia do wyboczenia w zakresie pozaliniowo sprężystym przyjmuje się, że zamiast granicy plastyczności R_e należy wziąć wytrzymałość obliczeniową na rozciąganie R_o.

$$\sigma_{kr} = \begin{cases} \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \dfrac{\pi^2}{\lambda^2}\dfrac{E}{R_o} R_o = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{gr}}\right)^{-2} \left(\dfrac{R_H}{R_o}\right) R_o & \text{dla } \lambda > \lambda_{gr} = \pi\sqrt{\dfrac{E}{R_H}} \\ R_o - \dfrac{R_o - R_H}{\pi}\sqrt{\dfrac{R_H}{E}}\,\lambda = \left[1 - \dfrac{1}{\pi}\left(1 - \dfrac{R_H}{R_o}\right)\sqrt{\dfrac{R_H}{E}}\,\lambda\right] R_o & \text{dla } 0 < \lambda < \lambda_{gr} \end{cases}$$

- założenie $\sigma_{kr} = \varphi(\lambda) R_o$

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma_{kr}}{R_o} \qquad \text{współczynnik wyboczeniowy}$$

Normy uwzględniają we współczynniku wyboczeniowym takie czynniki jak losowość charakterystyk materiałowych, losowość obciążenia i odstępstwa od prostoliniowości pręta ściskanego (tzw. imperfekcje). Zgodnie z normą do projektowania konstrukcji stalowych

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_p} \qquad \text{smukłość względna}$$

$$\lambda_p = \frac{\pi}{1.15}\sqrt{\frac{E}{R_o}} \qquad \text{smukłość porównawcza}$$

$$\varphi(\overline{\lambda}) = \left(1 + \overline{\lambda}^{\,2n}\right)^{-\frac{1}{n}} \qquad \text{(n – współczynnik imperfekcji)}$$

4.1. Algorytm obliczeń

1. warunek wytrzymałościowy $\dfrac{P}{A} \le R_o \quad \Rightarrow \quad A$
2. przyjąć przekrój $A' \cong 3 \times A$
3. obliczyć smukłość pręta i smukłość porównawczą $\lambda = \dfrac{L_w}{i_{min}} \qquad \lambda_p = \dfrac{\pi}{1.15}\sqrt{\dfrac{E}{R_o}}$
4. z tablic wziąć wartość wsp. wyboczeniowego φ dla określonego stosunku λ / λ_p
5. sprawdzić warunek projektowania $\sigma \le \sigma_{kr} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{P}{A\,\varphi(\lambda)} \le R_o$
6. jeżeli warunek projektowania jest spełniony, to proces projektowania jest zakończony. W przeciwnym wypadku należy zwiększyć przekrój A' i wrócić do punktu 3.