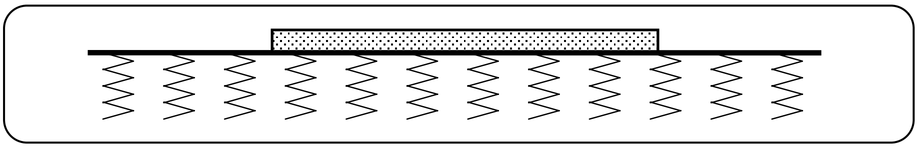
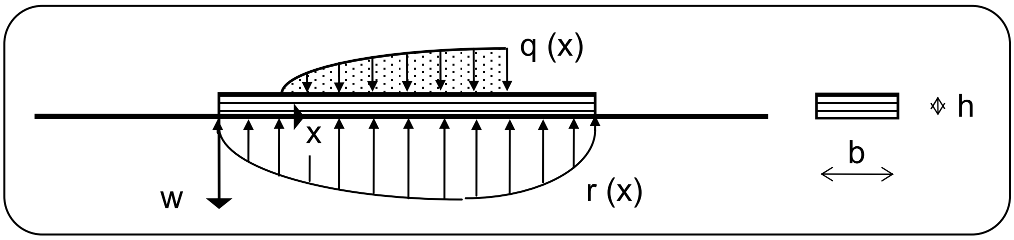
## 1. PODŁOŻE SPRĘŻYSTE TYPU WINKLERA (1867)

### 1.1. Założenia

- ***więzy gładkie*** (brak tarcia między podłożem i spoczywającą na nim belką),
- ***więzy dwustronne*** (więzy łączące belkę z podłożem „pracują” na rozciąganie i na ściskanie) - oznacza to, że belka nie odrywa się od podłoża,



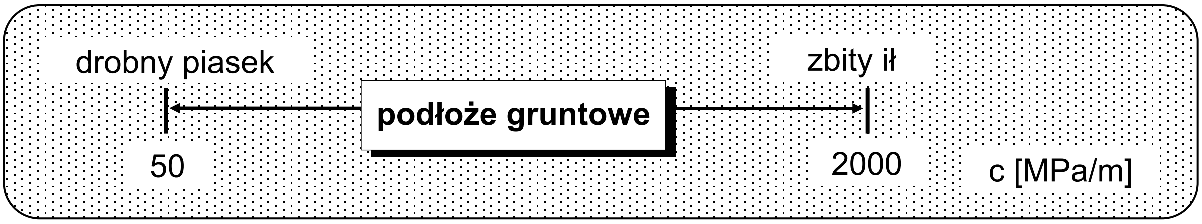
- ***odpór podłoża*** r(x) w punkcie (liczony na jednostkę długości belki) jest ***proporcjonalny do ugięcia*** w tym punkcie.




$$\boxed{r(x) = c \times b\,w(x)}$$

$$p(x) = q(x) - r(x)$$

c - moduł podatności podłoża





### 1.2. Równania linii ugięć oraz momentów zginających i sił poprzecznych

$$w^{II}(x) = -\frac{M(x)}{EI} \qquad w^{III}(x) = -\frac{Q(x)}{EI} \qquad w^{IV}(x) = \frac{p(x)}{EI}$$

$$E\,I\,w^{II}(x) = -M(x)$$

$$\boxed{w^{IV}(x) + \frac{b\,c}{E\,I}\,w(x) = \frac{q(x)}{E\,I}}$$

$$\alpha^4 \overset{\text{def.}}{=} \frac{b\,c}{4\,E\,I} \qquad \alpha\ [1/m]$$

∗ współrzędna bezwymiarowa $\zeta$ $\boxed{\zeta = \alpha\, x}$

$$w^{I}(x) = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = w^{I}(\zeta)\,\alpha$$

$$w^{II}(x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\, w^{I}(\zeta)\,\alpha \,\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x} = w^{II}(\zeta)\,\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M(\zeta) = -\,E\,I\,\alpha^2\, w^{II}(\zeta)}$$

$$w^{III}(x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\, w^{II}(\zeta)\,\alpha^2 \,\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x} = w^{III}(\zeta)\,\alpha^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q(\zeta) = -\,E\,I\,\alpha^3\, w^{III}(\zeta)}$$

$$w^{IV}(x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\, w^{III}(\zeta)\,\alpha^3 \,\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x} = w^{IV}(\zeta)\,\alpha^4$$

$$\boxed{w^{IV}(\zeta) + 4\, w(\zeta) = \frac{4\, q(\zeta)}{k}} \qquad k = b\,c$$

∗ rozwiązanie

$$\boxed{w(\zeta) = w_s(\zeta) + e^{\zeta}\left(A\cos\zeta + B\sin\zeta\right) + e^{-\zeta}\left(C\cos\zeta + D\sin\zeta\right)}$$

## 2. BELKI NIESKOŃCZENIE DŁUGIE

∗ warunek skończonej wielkości ugięć powoduje zerowania się stałych A i B

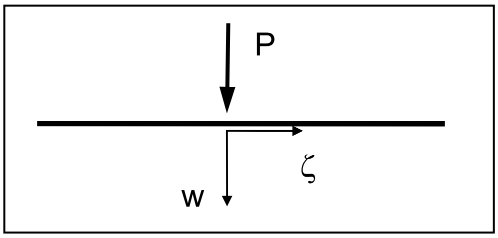
$$w(\zeta) = w_s(\zeta) + e^{-\zeta}\left(C\cos\zeta + D\sin\zeta\right)$$

$$w^{I}(\zeta) = w^{I}_s(\zeta) + e^{-\zeta}\left[(D - C)\cos\zeta - (D + C)\sin\zeta\right]$$

$$w^{II}(\zeta) = w^{II}_s(\zeta) + 2\,e^{-\zeta}\left(C\sin\zeta - D\cos\zeta\right)$$

$$w^{III}(\zeta) = w^{III}_s(\zeta) + 2\,e^{-\zeta}\left[(D + C)\cos\zeta + (D - C)\sin\zeta\right]$$

### 2.1. Belka obciążona siłą skupioną




$$w_s(\zeta) = 0$$

dla $\zeta \geq 0$

1) $w(\zeta \to \infty) = 0$ $\qquad w^{I}(\zeta \to \infty) = 0$

2) $w^{I}(\zeta = 0) = 0$ $\qquad Q(\zeta = 0^{+}) = -P/2$

∗ z warunków kinematycznych 1) wynika, że : $A = 0$ , $B = 0$

∗ z warunku kinematycznego i statycznego 2) wynika, że : $C = D = P\,\dfrac{\alpha}{2\,b\,c}$

∗ ostatecznie zatem dla $\zeta \ge 0$

$$w(\zeta) = P\frac{\alpha}{2bc}e^{-\zeta}(\cos\zeta + \sin\zeta) = \frac{P\alpha}{2bc}\eta(\zeta)$$

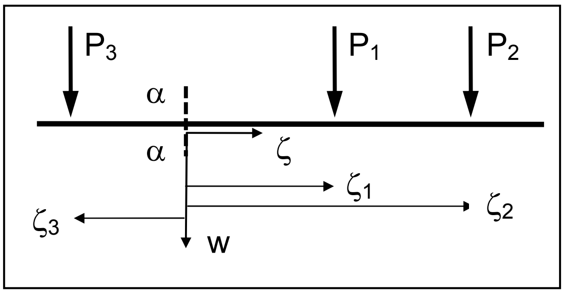
$$M(\zeta) = -EI\alpha^2 w^{II}(\zeta) = \frac{P}{4\alpha}e^{-\zeta}(\cos\zeta - \sin\zeta) = \frac{P}{4\alpha}\eta_1(\zeta)$$

$$Q(\zeta) = -EI\alpha^3 w^{III}(\zeta) = -\frac{P}{2}e^{-\zeta}\cos\zeta = \frac{P}{2}\eta_2(\zeta)$$

∗ dla $\zeta < 0$

$$w(\zeta) = \frac{P\alpha}{2bc}\eta(\zeta) \quad ; \quad M(\zeta) = \frac{P}{4\alpha}\eta_1(\zeta) \quad ; \quad Q(\zeta) = -\frac{P}{2}\eta_2(\zeta)$$

∗ **wiele sił skupionych**



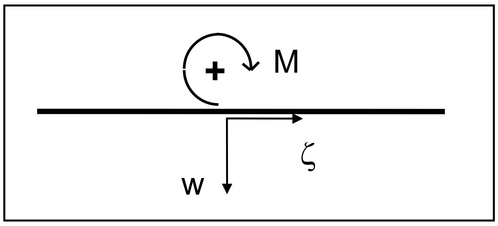

$$w_{\alpha-\alpha} = \frac{\alpha}{2bc}\sum_{i=1}^{n} P_i\,\eta(\zeta_i)$$

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{1}{4\alpha}\sum_{i=1}^{n} P_i\,\eta_1(\zeta_i)$$

$$Q_{\alpha-\alpha} = \left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i\,\eta_2(\zeta_i)\right]^{*}$$

*) jeżeli $\zeta < 0$ to wyraz w nawiasie klamrowym z gwiazdką należy wziąć ze znakiem przeciwnym

## 2.2. Belka obciążona momentem skupionym




$w_s(\zeta) = 0$

dla $\zeta \ge 0$

1) $w(\zeta \to \infty) = 0$, $w^{I}(\zeta \to \infty) = 0$ $\Rightarrow$ A =0 ; B = 0

2) $w(\zeta = 0) = 0$ $\Rightarrow$ C = 0

3) $M(\zeta = 0^{+}) = M/2$ $\Rightarrow$ $D = M\frac{\alpha^2}{bc}$

∗ ostatecznie zatem dla $\zeta \ge 0$

$$w(\zeta) = M\frac{\alpha^2}{bc}e^{-\zeta}\sin\zeta = \frac{M\alpha^2}{bc}\eta_3(\zeta)$$

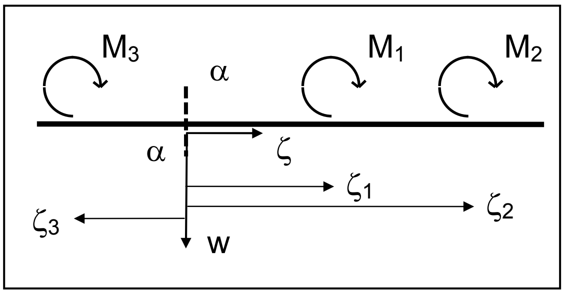
$$M(\zeta) = \frac{M}{2}e^{-\zeta}\cos\zeta = -\frac{M}{2}\eta_2(\zeta)$$

$$Q(\zeta) = -\frac{M\alpha}{2}e^{-\zeta}(\cos\zeta + \sin\zeta) = -\frac{M\alpha}{2}\eta(\zeta)$$

∗ dla $\zeta < 0$

$$w(\zeta) = -\frac{M\alpha^2}{bc}\eta_3(\zeta) \quad ; \quad M(\zeta) = \frac{M}{2}\eta_2(\zeta) \quad ; \quad Q(\zeta) = -\frac{M\alpha}{2}\eta(\zeta)$$

∗ **wiele momentów skupionych**



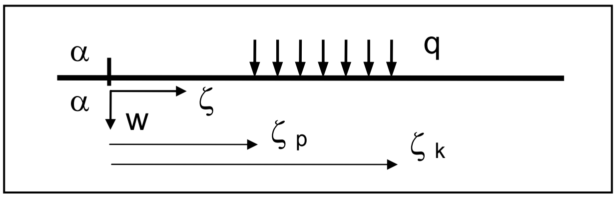

$$w_{\alpha-\alpha} = \left[-\frac{\alpha^2}{b\,c}\sum_{i=1}^{m} M_i\;\eta_3\left(\zeta_i\right)\right]^*$$

$$M_{\alpha-\alpha} = \left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} M_i\;\eta_2\left(\zeta_i\right)\right]^*$$

$$Q_{\alpha-\alpha} = -\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{m} M_i\;\eta\left(\zeta_i\right)$$

*) jeżeli $\zeta < 0$ to wyraz w nawiasie klamrowym z gwiazdką należy wziąć ze znakiem przeciwnym

## 2.3. Belka obciążona obciążeniem ciągłym

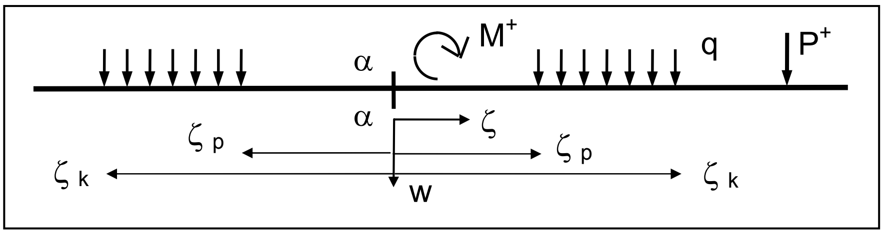



$$w_{\alpha-\alpha} = \frac{\alpha}{2\,b\,c}\int_{\zeta_p}^{\zeta_k} q_o\,\frac{d\zeta}{\alpha}\,\eta\left(\zeta\right) = \frac{q_o}{2\,b\,c}\int_{\zeta_p}^{\zeta_k} e^{-\zeta}\left(\cos\zeta + \sin\zeta\right)d\zeta = \frac{q_o}{2\,b\,c}\left[\eta_2\right]_{\zeta_p}^{\zeta_k}$$

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{1}{4\,\alpha}\int_{\zeta_p}^{\zeta_k} q_o\,\frac{d\zeta}{\alpha}\,\eta_1\left(\zeta\right) = \frac{q_o}{4\,\alpha^2}\int_{\zeta_p}^{\zeta_k} e^{-\zeta}\left(\cos\zeta - \sin\zeta\right)d\zeta = \frac{q_o}{4\,\alpha^2}\left[\eta_3\right]_{\zeta_p}^{\zeta_k}$$

$$Q_{\alpha-\alpha} = \frac{q_o}{2\,\alpha}\int_{\zeta_p}^{\zeta_k} -\,e^{-\zeta}\cos\zeta\;d\zeta = \frac{q_o}{4\,\alpha}\left[\eta_1\right]_{\zeta_p}^{\zeta_k}$$

## 2.4. Obciążenie łączne




$$w_{\alpha-\alpha} = \frac{\alpha}{2\,k}\sum_{i=1}^{n} P_i\;\eta\left(\zeta_i\right) + \left[-\frac{\alpha^2}{k}\sum_{i=1}^{m} M_i\;\eta_3\left(\zeta_i\right)\right]^* + \frac{1}{2\,k}\sum_{i=1}^{r} q_i\left[\eta_2\right]\Big|_{|\zeta_p|}^{|\zeta_k|}$$

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{1}{4\,\alpha}\sum_{i=1}^{n} P_i\;\eta_1\left(\zeta_i\right) + \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} M_i\;\eta_2\left(\zeta_i\right)\right]^* + \frac{1}{4\,\alpha^2}\sum_{i=1}^{r} q_i\left[\eta_3\right]\Big|_{|\zeta_p|}^{|\zeta_k|}$$

$$Q_{\alpha-\alpha} = \left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i\;\eta_2\left(\zeta_i\right)\right]^* - \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{m} M_i\;\eta\left(\zeta_i\right) + \left[-\frac{1}{4\,\alpha}\sum_{i=1}^{r} q_i\left[\eta_1\right]\Big|_{|\zeta_p|}^{|\zeta_k|}\right]^*$$

| | |
|---|---|
| $\eta = e^{-\zeta}\left(\cos\zeta + \sin\zeta\right)$ | $\eta_1 = e^{-\zeta}\left(\cos\zeta - \sin\zeta\right)$ |
| $\eta_2 = -\,e^{-\zeta}\cos\zeta$ | $\eta_3 = e^{-\zeta}\sin\zeta$ |

*) jeżeli $\zeta < 0$ to wyrazy w nawiasach klamrowych z gwiazdką należy wziąć ze znakiem przeciwnym, zaś w funkcjach $\eta \div \eta_3$ należy w miejsce $\zeta$ wstawić $\left|\zeta\right|$.

## 3. BELKI SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

$$\boxed{w^{IV}(\zeta) + 4\,w(\zeta) = \frac{4\,q(\zeta)}{k}} \qquad k = b\,c$$

$$\boxed{w(\zeta) = w_s(\zeta) + e^{\zeta}\left(A\cos\zeta + B\sin\zeta\right) + e^{-\zeta}\left(C\cos\zeta + D\sin\zeta\right)}$$

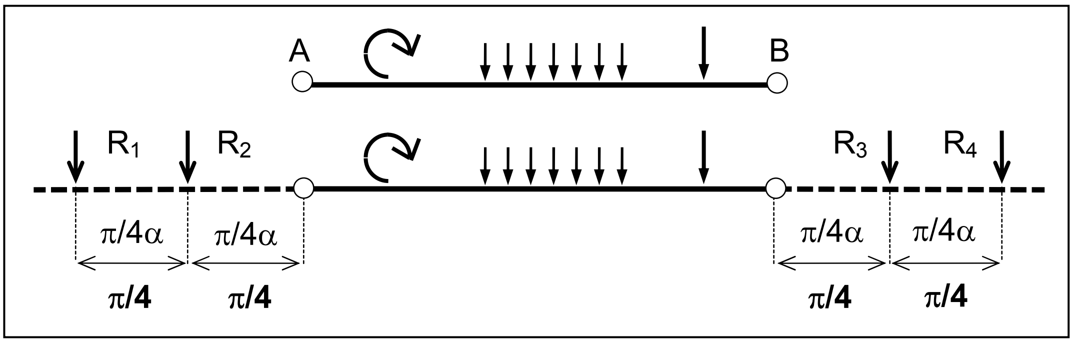
∗ w belkach o skończonej długości ( $\zeta$ przyjmuje wartości skończone ) zachodzą warunki $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Te 4 stałe należy wyznaczyć z warunków kinematycznych i statycznych. Jeżeli belka składa się z kilku przedziałów charakterystycznych to należy napisać i rozwiązać tyle równań ile jest przedziałów, korzystając dodatkowo z 4 warunków zapisanych w punkcie zszycia każdych dwóch przedziałów. Taka droga jest rachunkowo uciążliwa.

### 3.1. Metoda F. Bleicha

∗ belkę o skończonej długości zastępuje się belką o nieskończonej długości

∗ obciążenie belki nieskończonej składa się z :

1. obciążenia pierwotnej belki skończonej (na długości tej belki)
2. dodatkowego obciążenia poza obszarem belki pierwotnej, takiego, aby zapewniona była zgodność statycznych warunków brzegowych obu belek. Uzyskuje się to poprzez umieszczenie 4 sił skupionych $R_1 \div R_4$, po dwie z każdej strony belki, w takim rozstawie, który ułatwia obliczenia




∗ zapewniając zgodność momentu zginającego i siły poprzecznej w punktach belki nieskończonej, odpowiadających punktom końcowym A i B belki o skończonej długości - zapewniamy pełną zgodność rozwiązań w obszarze belki skończonej.