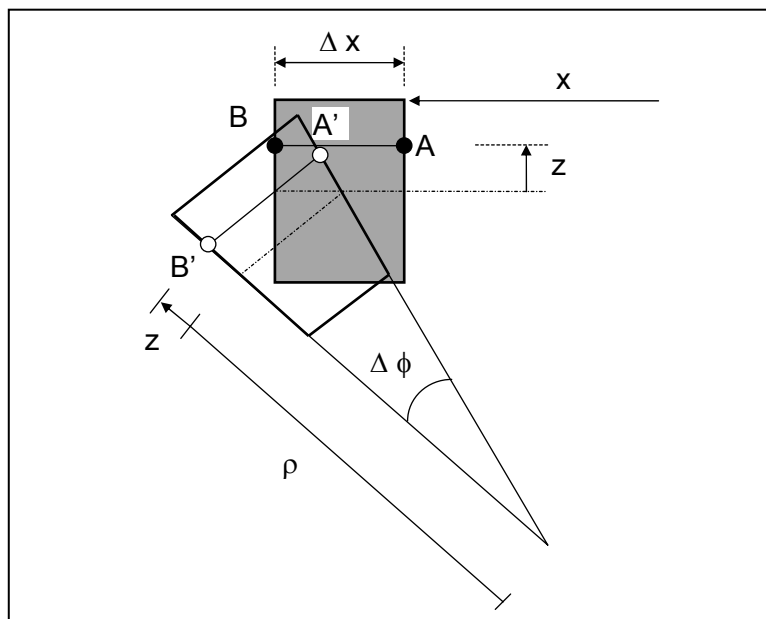


1. RÓWNANIE UGIĘTEJ OSI BELKI

1.1. Hipoteza płaskich przekrojów (hipoteza Bernouli'ego)

- ★ przekrój poprzeczny pręta, płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem, pozostaje w wyniku deformacji nadal płaski i prostopadły do ugiętej osi pręta

(w przypadku czystego zginania hipoteza staje się twierdzeniem, którego dowód przeprowadza się w oparciu o analizę deformacji pręta)



$$\varepsilon_x = \lim_{A \rightarrow B} \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{(\rho + z) \Delta\phi - \rho \Delta\phi}{\Delta\phi} = \frac{z}{\rho}$$

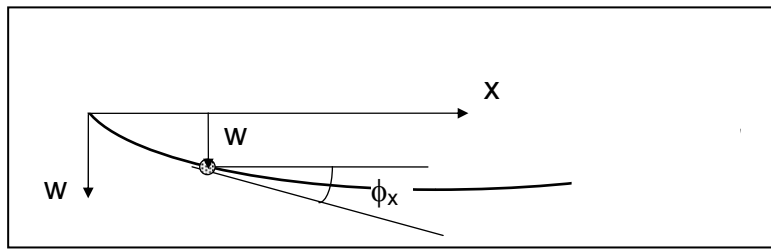
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M}{EI_y} z$$

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_y}$$

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''(x)|}{[1 + w'^2(x)]^{3/2}} \cong |w''(x)|$$

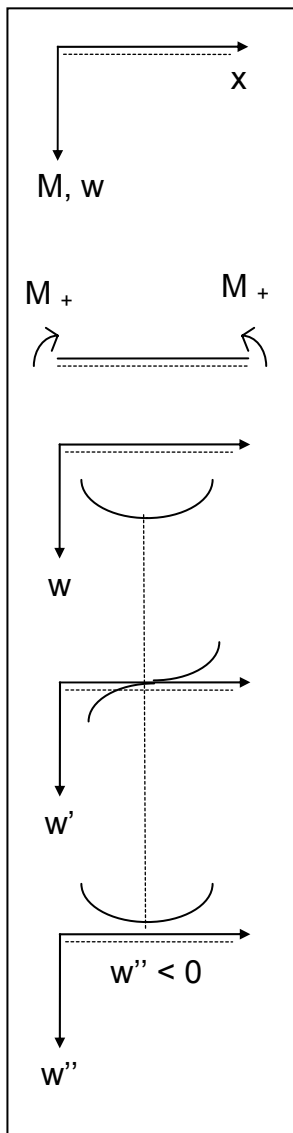
$$\boxed{EI_y |w''(x)| = M(x)}$$

1.2. Równanie ugięć

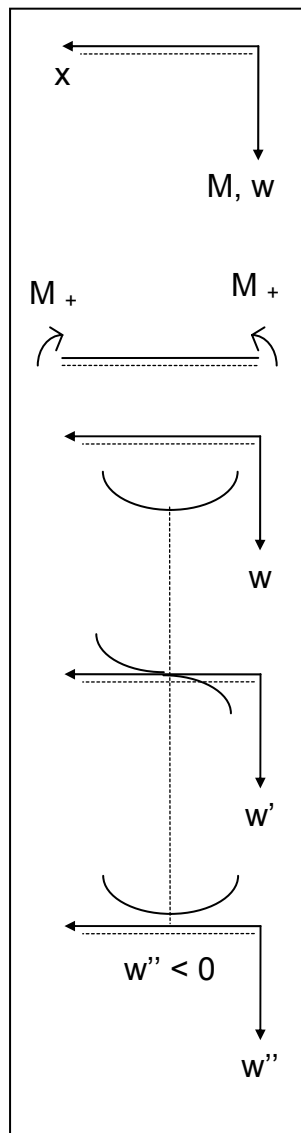


$$EI_y |w''(x)| = M(x)$$

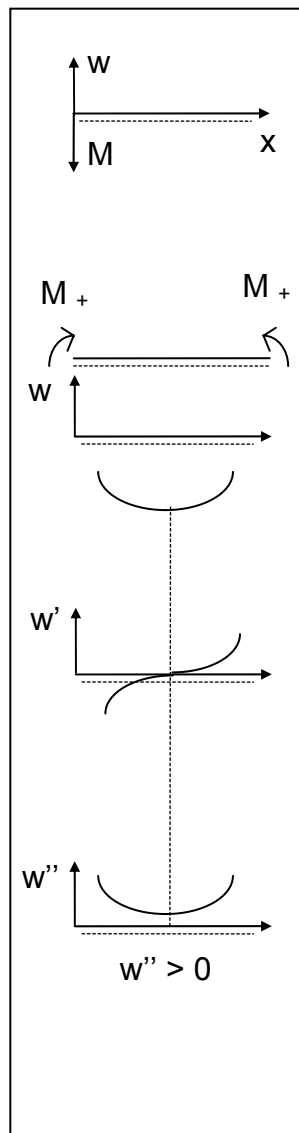
$$\phi_x = w'(x)$$



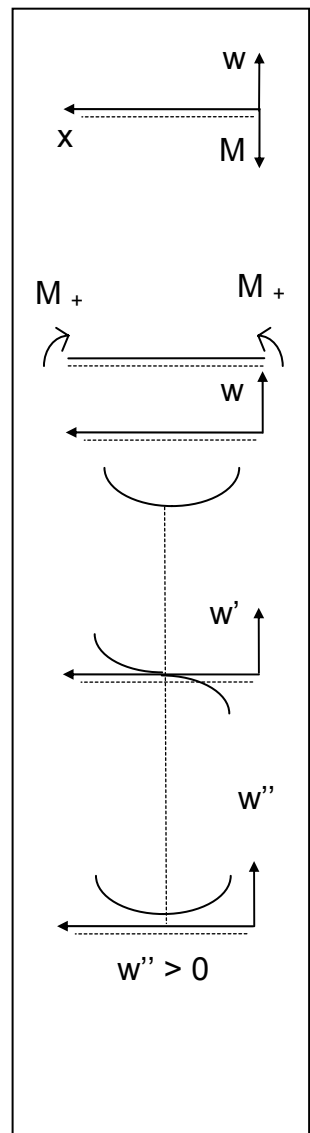
$$EI w'' = -M(x)$$



$$EI w'' = -M(x)$$



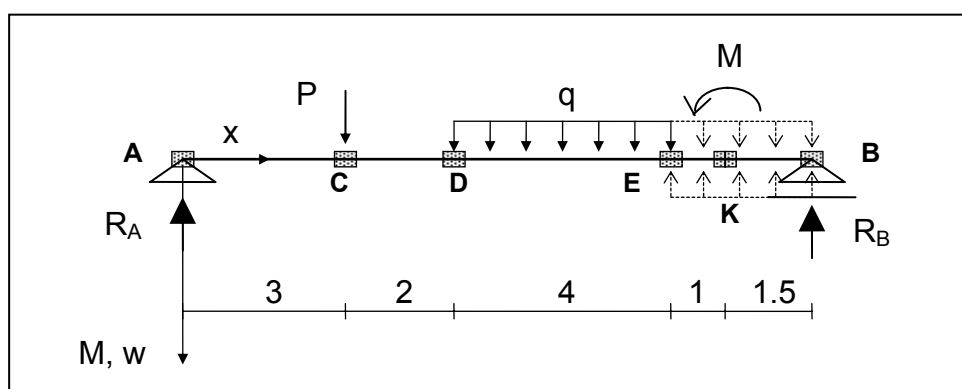
$$EI w'' = M(x)$$



$$EI w'' = M(x)$$

1.3. Sposób Clebscha jednolitego zapisu równań momentów zginających

1. równania momentów zginających we wszystkich przedziałach charakterystycznych muszą być zapisane w tym samym układzie współrzędnych (M, x)
2. w każdym kolejnym przedziale charakterystycznym muszą być powtórzone człony z przedziału poprzedniego
3. wszystkie człony równania momentów muszą zawierać mnożniki typu $(x - a_i)^\alpha$, gdzie: α - potęga zależna od obciążenia, a_i - współrzędna punktu początkowego i+1 przedziału charakterystycznego
4. całkowanie odbywa się względem całych członów $(x - a_i)$



$$M(x) = R_A x \Big|_{AC} - P(x-3) \Big|_{CD} - \frac{q}{2}(x-5)^2 \Big|_{DE} + \frac{q}{2}(x-9)^2 \Big|_{EK} - M(x-10)^0 \Big|_{KB}$$

$$EI w'' = -R_A x \Big|_{AC} + P(x-3) \Big|_{CD} + \frac{q}{2}(x-5)^2 \Big|_{DE} - \frac{q}{2}(x-9)^2 \Big|_{EK} + M(x-10)^0 \Big|_{KB}$$

$$EI w' = C_1 - \frac{R_A}{2} x^2 \Big|_{AC} + \frac{P}{2}(x-3)^2 \Big|_{CD} + \frac{q}{6}(x-5)^3 \Big|_{DE} - \frac{q}{6}(x-9)^3 \Big|_{EK} + M(x-10) \Big|_{KB}$$

$$EI w = C_1 x + C_2 - \frac{R_A}{6} x^3 \Big|_{AC} + \frac{P}{6}(x-3)^3 \Big|_{CD} + \frac{q}{24}(x-5)^4 \Big|_{DE} - \frac{q}{24}(x-9)^4 \Big|_{EK} + \frac{M}{2}(x-10)^2 \Big|_{KB}$$

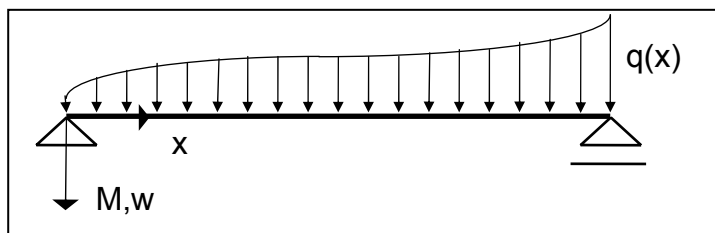
* warunki brzegowe

$$1. w(0) = 0 \Rightarrow C_1 \times 0 + C_2 - \frac{R_A}{6} \times 0 = 0$$

$$2. w(11.5) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 11.5 + C_2 - \frac{R_A}{6} \cdot 11.5^3 \Big|_{AC} + \frac{P}{6}(11.5-3)^3 \Big|_{CD} + \frac{q}{24}(11.5-5)^4 \Big|_{DE} - \frac{q}{24}(11.5-9)^4 \Big|_{EK} + \frac{M}{2}(11.5-10)^2 \Big|_{KB} = 0$$

2. OBLICZANIE UGIĘĆ METODĄ MOHRA

- * metoda oparta na formalnej analogii między równaniami różniczkowymi momentów zginających $M(x)$ i równaniem różniczkowym ugiętej osi belki $w(x)$



$$M''(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = \int_0^x -q(x) dx + A \equiv Q(x)$$

$$M(x) = \int_0^x \left[\int_0^x -q(x) dx \right] dx + A x + B$$

+ statyczne warunki brzegowe

$$M(\) = \dots\dots$$

$$Q(\) = \dots\dots$$

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$w'(x) = \int_0^x -\frac{M(x)}{EI} dx + C$$

$$w(x) = \int_0^x \left[\int_0^x -\frac{M(x)}{EI} dx \right] dx + C x + D$$

+ kinematyczne warunki brzegowe

$$w(\) = \dots\dots$$

$$w'(\) = \dots\dots$$

- * przy wyznaczaniu momentów zginających zamiast korzystać z metody całkowania równania różniczkowego (lewa kolumna), korzystaliśmy z twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych - momenty zginające znajdowaliśmy poprzez redukcję obciążenia zewnętrznego. Nasuwa się sugestia, aby podobną metodę zastosować w odniesieniu do ugięć

- * wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\frac{M(x)}{EI} \stackrel{\text{def}}{=} q^f \quad \text{obciążenie fikcyjne}$$

wówczas :

$$w' \stackrel{\text{def}}{=} Q^f \quad \text{fikcyjna siła poprzeczna}$$

$$w \stackrel{\text{def}}{=} M^f \quad \text{fikcyjny moment zginający}$$

- * pełna analogia równania momentów i równania ugięć wymaga ponadto zgodności stałych całkowania tzn. A i C oraz B i D. Uzyskuje się to poprzez zastąpienie belki rzeczywistej belką fikcyjną (na którą działa obciążenie fikcyjne q^f) o schemacie statycznym tak dobranym, aby „fikcyjne” statyczne warunki brzegowe (dotyczące Q^f i M^f) dla tej belki odpowiadały kinematycznym warunkom brzegowym (dotyczącym w i w') dla belki rzeczywistej

2.1. Dobór belki fikcyjnej dla belki rzeczywistej.

BELKA RZECZYWISTA		BELKA FIKCYJNA	
war. kinematyczne	schemat	schemat	war. statyczne
$w \neq 0$, $w' \neq 0$			$M^f \neq 0$, $Q^f \neq 0$
$w = 0$, $w' = 0$			$M^f = 0$, $Q^f = 0$
$w = 0$, $w' \neq 0$			$M^f = 0$, $Q^f \neq 0$
$w \neq 0$, $w'_L \neq w'_P$			$M^f \neq 0$, $Q_L^f \neq Q_P^f$
$w \neq 0$, $w' = 0$			$M^f \neq 0$, $Q^f = 0$

3.1. Algorytm postępowania w przypadku obliczania ugięć metodą Mohra.

1. Narysować wykres momentów zginających dla belki rzeczywistej (jest to obciążenie fikcyjne belki fikcyjnej)
2. Narysować schemat belki fikcyjnej
3. Nanieść wykres momentów zginających na belkę fikcyjną w taki sposób, aby momenty „dodatnie”, tzn. leżące po stronie przyjętych „spodów” były skierowane zgodnie z przyjętym za dodatni zwrotem osi ugięć.
4. Rozwiązać w „standardowy” sposób belkę fikcyjną .

Ugięcia osi belki

$$w = M^f$$

Kąty obrotu osi belki

$$w' = Q^f$$

3.2. Algorytm metody Mohra - przykład.

