

ZADANIE : dla ciała obciążonego na powierzchni S_Q i posiadającego więzy na powierzchni S_U wyznaczyć tensor naprężenia T_σ , tensor odkształcenia T_ε i wektor przemieszczenia \bar{u} .

1. NARZĘDZIA : komplet równań liniowej (fizykalnie i geometrycznie) teorii sprężystości

- ★ równania równowagi - **równania Naviera**

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

3 równania, 6 niewiadomych σ_{ij}

+ statyczne warunki brzegowe na S_Q

$$q_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj}$$

- ★ liniowe równania geometryczne - **równania Cauchy 'ego**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

6 równań, 3 niewiadome u_i

+ kinematyczne warunki brzegowe na S_U

- ★ liniowe równania fizyczne - **równania Hooke 'a**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

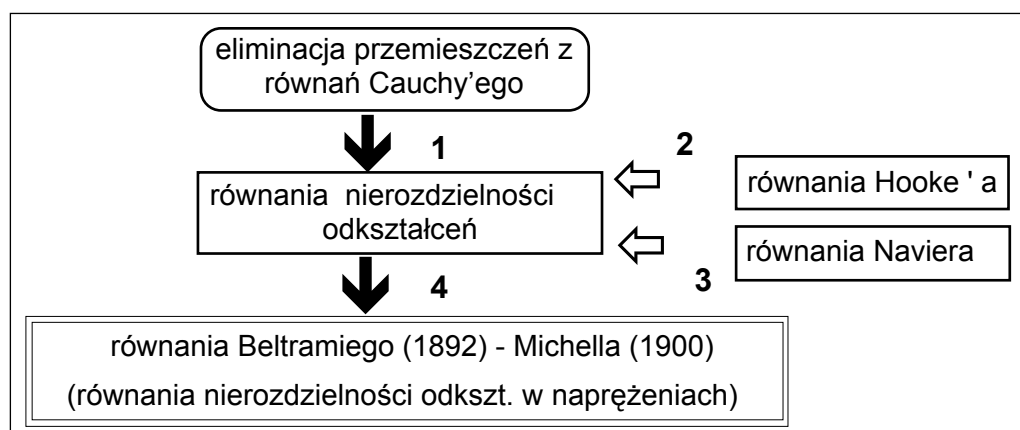
6 równań, 6 niewiadomych ε_{ij}

Zadanie do rozwiązania: układ 15 równań różniczkowo - algebraicznych o 15 niewiadomych, równań które muszą spełniać narzucone statyczne i kinematyczne warunki brzegowe.

Dowód istnienia rozwiązania: dowód istnienia i jednoznaczności istnienia zadania brzegowego liniowej teorii sprężystości podał Kirchhoff (1859) (szczegóły - patrz *FUNG Y. C., Podstawy Mechaniki Ciała Stałego, rozdz. 7.4.*)

2. METODY REDUKCJI LICZBY RÓWNAŃ LTS

- ★ **Metoda sił**



$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{ik,jl} - \sigma_{jl,ik} = \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{,kl} \delta_{ij} + \sigma_{,ij} \delta_{kl} - \sigma_{,jl} \delta_{ik} - \sigma_{,ik} \delta_{jl})$$

gdzie $\sigma = \sigma_{kk}$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij,jk} = -X_{i,k}$$

zrównujemy wskaźniki $k = l$

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \nabla^2 \sigma \delta_{,ij} = - (X_{i,j} + X_{j,i})$$

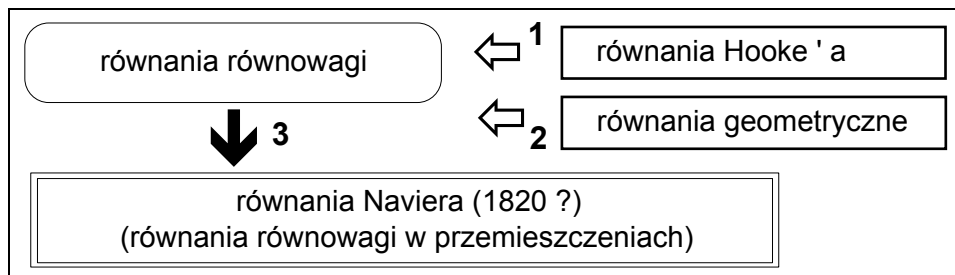
$$\text{gdzie } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$\text{zrównujemy wskaźniki } i = j \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \sigma = - \frac{1+\nu}{1-\nu} X_{i,i}$$

$$\boxed{\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{i,i} - (X_{i,j} + X_{j,i})}$$

+ statyczne i kinematyczne warunki brzegowe

★ Metoda przemieszczeń



$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$2G \varepsilon_{ij,j} + \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + X_i = 0$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$G u_{i,jj} + (G + \lambda) u_{j,ji} + X_i = 0$$

dywergencja pola wektorowego \bar{u}

$$\text{div } \bar{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u_{j,j}$$

gradient pola skalarnego φ

$$\text{grad } \varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right] = \varphi_{,i}$$

laplasjan pola skalarnego φ

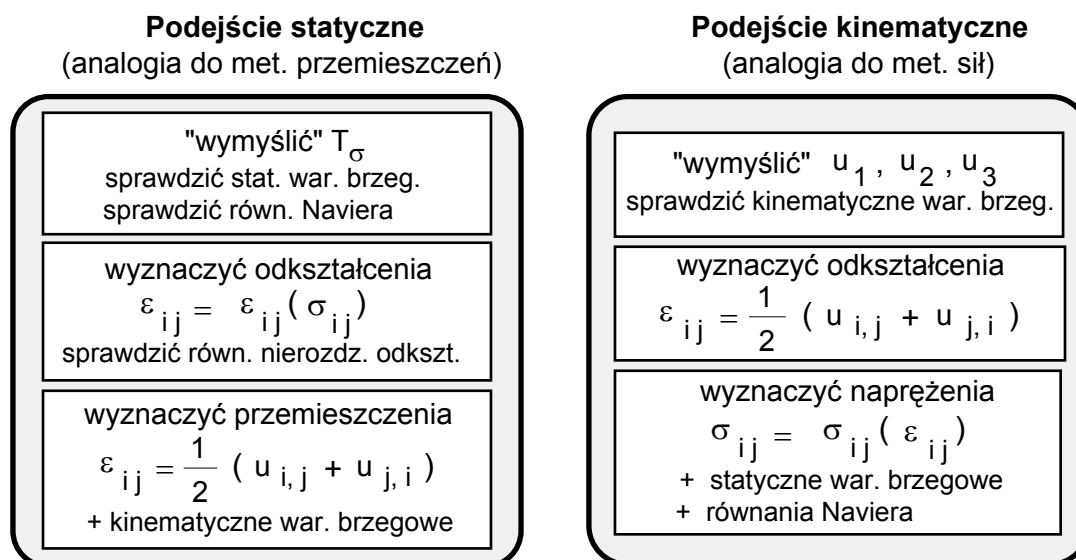
$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \varphi_{,ii}$$

$$\boxed{G \nabla^2 u_i + (G + \lambda) \text{grad div } \bar{u} + X_i = 0}$$

+ statyczne i kinematyczne warunki brzegowe

3. METODY ROZWIĄZANIA ZADANIA BRZEGOWEGO

- ★ metoda bezpośrednia rozwiązania równań Beltrami-Michella lub Naviera : metoda ogólna, ale b. trudna,
- ★ metoda "półodwrotna" : możliwa do wykorzystania jedynie w szczególnych przypadkach, niekiedy "zadawała się" przybliżeniami, ale stosunkowo prosta

METODA PÓŁODWROTNA

Jeżeli przemieszczenia wynikające z rozwiązania równań geometrycznych nie spełniają kinematycznych warunków brzegowych, to przyjęta macierz naprężeń nie opisuje rzeczywistego pola naprężeń.

Należy znaleźć inną macierz i ponownie przebyć całą procedurę.

4. ZASADA SUPERPOZYCJI

ZADANIE : ciało o ustalonych więzach kinematycznych obciążono układem obciążenia $(\bar{q}^{(1)}, \bar{X}^{(1)})$ i otrzymano rozwiązanie zadania brzegowego $T_\sigma^{(1)}, T_\varepsilon^{(1)}, \bar{u}^{(1)}$. Następnie to samo ciało obciążono układem obciążenia $(\bar{q}^{(2)}, \bar{X}^{(2)})$ i uzyskano rozwiązanie $T_\sigma^{(2)}, T_\varepsilon^{(2)}, \bar{u}^{(2)}$. Jakie jest rozwiązanie zadania brzegowego przy łącznym obciążeniu ciała obydwooma układami obciążeń ?

ROZWIĄZANIE : rozwiązanie dla łącznego układu obciążenia

$$\bar{q} = \bar{q}^{(1)} + \bar{q}^{(2)} \qquad \bar{X} = \bar{X}^{(1)} + \bar{X}^{(2)}$$

jest sumą rozwiązań dla układu (1) i (2), tzn.:

$$T_\sigma = T_\sigma^{(1)} + T_\sigma^{(2)} \qquad T_\varepsilon = T_\varepsilon^{(1)} + T_\varepsilon^{(2)} \qquad \bar{u} = \bar{u}^{(1)} + \bar{u}^{(2)}$$

DOWÓD : wszystkie równania teorii sprężystości, łącznie z warunkami brzegowymi są równaniami liniowymi, a dla zależności liniowych zawsze obowiązuje zasada superpozycji.

PRZYKŁAD : równania Naviera

Założenie : $\sigma_{ij,j}^{(1)} + X_i^{(1)} = 0$ $\sigma_{ij,j}^{(2)} + X_i^{(2)} = 0$

Teza : $\left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right)_{,j} + \left(X_i^{(1)} + X_i^{(2)} \right) = 0$

Dowód: $\sigma_{ij,j}^{(1)} + \sigma_{ij,j}^{(2)} + X_i^{(1)} + X_i^{(2)} = 0 \Rightarrow \left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right)_{,j} + \left(X_i^{(1)} + X_i^{(2)} \right) = 0$

5. ZASADA de SAINT-VENANTA (1855)

- ★ Zasada intuicyjny - empiryczna, bez istnienia ogólnego dowodu teoretycznego jej słuszności,
- ★ Dla bryły obciążonej na niewielkiej powierzchni w porównaniu z całkowitą powierzchnią ciała znane jest rozwiązanie zagadnienia brzegowego. Zmieniamy obciążenie na tej powierzchni, ale tak, aby oba obciążenia były statycznie równoważne ($\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{S}^{(2)}$, $\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}^{(2)}$). Zasada de Saint-Venanta mówi, że rozwiązanie dla nowego obciążenia różni się od wyjściowego dowolnie mało, poza niewielkim obszarem w pobliżu obciążonej powierzchni.