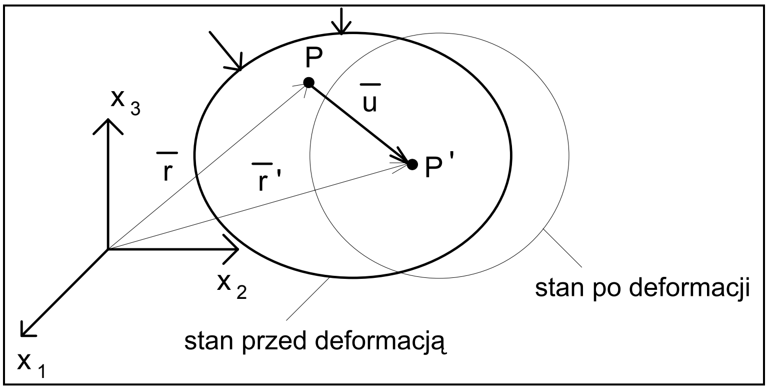
1. WEKTOR PRZEMIESZCZENIA



★ położenie pkt. P przed deformacją $P(\bar{r}) = P(x_1, x_2, x_3)$

★ położenie pkt. P po deformacji $P'(\bar{r}') = P'(x'_1, x'_2, x'_3)$

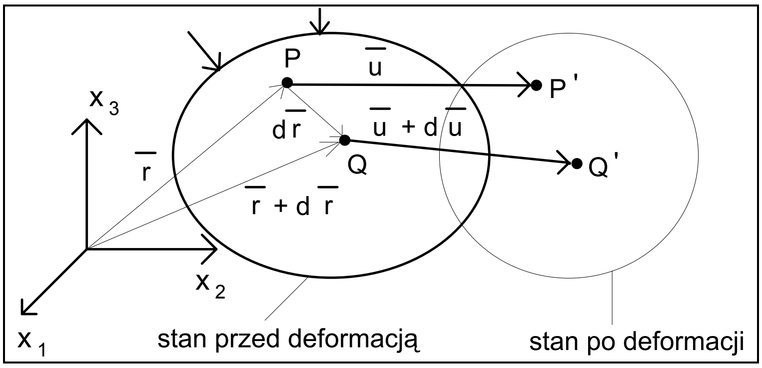
★ przemieszczenie punktu P $\overline{PP'} = \bar{u} = \bar{r}' - \bar{r}$

$u_i = x'_i - x_i \qquad i = 1,2,3$

$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$

★ wektorowe pole przemieszczeń $\bar{u} = \bar{u}(\bar{r})$

2. ZMIANA ODLEGŁOŚCI MIĘDZY PUNKTAMI



★ położenie pkt. P po deformacji $P'(\bar{r} + \bar{u})$

★ położenie pkt. Q po deformacji $Q'(\bar{r} + d\bar{r} + \bar{u} + d\bar{u})$

★ kwadrat odległości między punktami P i Q przed deformacją

$$ds^2 = |d\bar{r}|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i\, dx_i$$

★ kwadrat odległości między punktami P' i Q' po deformacji

$$\bar{r} + \bar{u} + \overline{P'Q'} = \bar{r} + d\bar{r} + \bar{u} + d\bar{u} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{P'Q'} = d\bar{r} + d\bar{u}$$

$$ds'^2 = |d\bar{r} + d\bar{u}|^2 = (dx_1 + du_1)^2 + (dx_2 + du_2)^2 + (dx_3 + du_3)^2 = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i)$$

★ obliczenie różnicy kwadratów odległości punktów po i przed odkształceniem

- różniczka zupełna

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = u_{i,j}\, dx_j \qquad i, j = 1, 2, 3$$

$$ds'^2 = \left(dx_i + u_{i,j}\,dx_j\right)\left(dx_i + u_{i,j}\,dx_j\right)$$

$$ds'^2 - ds^2 = 2u_{i,j}\,dx_i\,dx_j + u_{i,j}u_{i,k}\,dx_j\,dx_k$$

$$u_{i,j}\,dx_i\,dx_j = u_{j,i}\,dx_i\,dx_j$$

$$ds'^2 - ds^2 = u_{i,j}\,dx_i\,dx_j + u_{j,i}\,dx_i\,dx_j + u_{k,i}\,u_{k,j}\,dx_i\,dx_j$$

$$ds'^2 - ds^2 = \left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\,u_{k,j}\right)dx_i\,dx_j$$

$$ds'^2 - ds^2 = 2e^*_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

$$\boxed{e^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)}$$

macierz stanu odkształcenia (II rzędu, symetryczna)

★ Macierz stanu odkształcenia jest **TENSOREM**

Dowód: w "nowym " układzie $\left(x'_1, x'_2, x'_3\right)$, obróconym wzg. układu wyjściowego

$$ds'^2 - ds^2 = 2e'^*_{km}\,dx'_k\,dx'_m$$

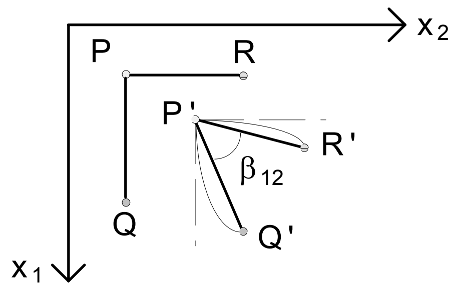
$$dx_i = \alpha_{ki}\,dx'_k \qquad dx_j = \alpha_{mj}\,dx'_m$$

$$2e'^*_{km}\,dx'_k\,dx'_m = 2e^*_{ij}\,dx_i\,dx_j = 2e^*_{ij}\,\alpha_{ki}\,\alpha_{mj}\,dx'_k\,dx'_m$$

$$e'^*_{km} = \alpha_{ki}\,\alpha_{mj}\,e^*_{ij} \qquad \text{pr. transformacji tensora}$$

3. ODKSZTAŁCENIA LINIOWE I KĄTOWE

★ wybieramy 2 włókna : PQ równoległe do osi x_1 i PR równoległe do x_2. Wyznaczyć długości tych włókien oraz kąt między nimi po odkształceniu .



★ długości włókien PQ, PR i QR przed odkształceniem

$$ds = \begin{cases} PQ = dx_1 \\ PR = dx_2 \\ QR = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} \end{cases}$$

★ długość włókna po odkształceniu $ds' = \sqrt{ds^2 + 2e^*_{ij}\,dx_i\,dx_j}$

★ długości włókien P'Q', P'R', Q'R' po odkształceniu

$$ds' = \begin{cases} P'Q' = dx_1\sqrt{1 + 2e^*_{11}} \\ P'R' = dx_2\sqrt{1 + 2e^*_{22}} \\ Q'R' = \sqrt{\left(1 + 2e^*_{11}\right)dx_1^2 + \left(1 + 2e^*_{22}\right)dx_2^2 + 4e^*_{12}\,dx_1\,dx_2} \end{cases}$$

★ zmiana kąta między włóknami $P'Q'$ i $P'R'$ (tw. Carnota , "tw. cosinusów")

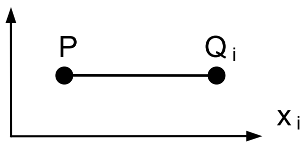
$$\cos\beta_{12} = \frac{2e^*_{12}}{\sqrt{\left(1+2e^*_{11}\right)\left(1+2e^*_{22}\right)}}$$

$$\cos\beta_{12} = \sin\left(\pi/2-\beta_{12}\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}-\beta_{12}\right) = \arcsin\frac{2e^*_{12}}{\sqrt{\left(1+2e^*_{11}\right)\left(1+2e^*_{22}\right)}} = \gamma_{12}$$

★ odkształcenia liniowe (względna zmiana długości włókna PQ)

$$\varepsilon_{11} = \lim_{dx_i\to 0}\frac{P'Q'-PQ}{PQ}$$



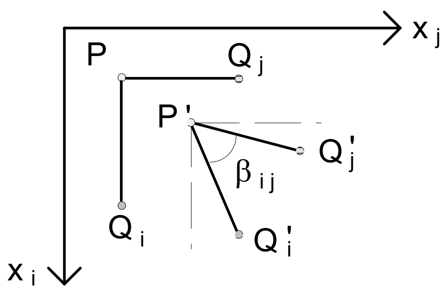
$$\boxed{\varepsilon_{ii} = \lim_{\substack{dx_i\to 0\\ Q_i\to P}}\frac{P'Q'_i-PQ_i}{PQ_i}}$$

nie ma sumowania po "i"

$$\varepsilon_{ii} = \lim_{Q_i\to P}\left(\sqrt{1+2e^*_{ii}}-1\right) = \sqrt{1+2e_{ii}}-1$$

★ odkształcenia kątowe

$$\boxed{\varepsilon_{12} = \lim_{\substack{dx_1\to 0\\ dx_2\to 0}}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta_{12}\right)}$$



$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \lim_{\substack{Q_i\to P\\ Q_j\to P}}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta_{ij}\right) \quad\Rightarrow\quad 2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \lim_{\substack{Q_i\to P\\ Q_j\to P}}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{2e^*_{ij}}{\sqrt{\left(1+2e^*_{ii}\right)\left(1+2e^*_{jj}\right)}}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2e_{ij}}{\sqrt{\left(1+2e_{ii}\right)\left(1+2e_{jj}\right)}}$$

4. RÓWNANIA GEOMETRYCZNE

★ związki między przemieszczeniami i odkształceniami

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\,u_{k,i}\right)$$

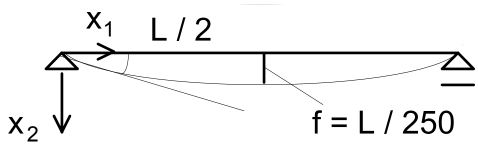
$$\varepsilon_{ii} = \sqrt{1+2e_{ii}}-1$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2e_{ij}}{\sqrt{\left(1+2e_{ii}\right)\left(1+2e_{jj}\right)}}$$

są to <u>nieliniowe równania geometryczne</u>

★ linearyzacja równań geometrycznych

założenie : pochodne przemieszczeń są wielkościami małymi



$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\left(x_1=0\right) \cong \frac{L/250}{L/2} = 0.008 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 << \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 \cong 0$$

WNIOSEK : kwadraty pochodnych przemieszczeń, jako małe wyższego rzędu można pominąć.

★ odkształcenia liniowe

$$\left(\varepsilon_{ii}+1\right)^2 = \left(\sqrt{1+2e_{ii}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1+2\varepsilon_{ii}+\varepsilon_{ii}^2 = 1+2e_{ii} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ii}=e_{ii}$$

★ odkształcenia kątowe

$$2\,e_{ii} << 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2e_{ij}}{1}$$

dla małych α $\quad$ $\arcsin\alpha \cong \alpha$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\boxed{\varepsilon_{ij}=e_{ij}}$

★ liniowe równania geometryczne - równania Cauchy'ego

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)}$$

$$\varepsilon_{11}=u_{1,1} \qquad \varepsilon_{22}=u_{2,2} \qquad \varepsilon_{33}=u_{3,3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2}+u_{2,1}\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{12}=2\varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3}+u_{3,1}\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{13}=2\varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3}+u_{3,2}\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{23}=2\varepsilon_{23}$$

★ tensor odkształcenia $\quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

5. KINEMATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

★ liniowe równania geometryczne (rów. Cauchy'ego) - 6 równań różniczkowych cząstkowych wzg. 3 nieznanych funkcji przemieszczeń

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$$

★ rozwiązanie ma postać : $\quad u_i = u_i^o + u_i^s$

u_i^o - całka ogólna układu równań różniczkowych jednorodnych (opisuje stan bezodkształceniowy $\varepsilon_{ij}=0$ - przemieszczenia punktów bryły sztywnej)

u_i^s - całka szczególna układu równań różniczkowych niejednorodnych

★ elementarne przekształcenia algebraiczne i różniczkowe prowadzą do całki ogólnej w postaci

$$u_1^o = a + b x_2 + c x_3$$

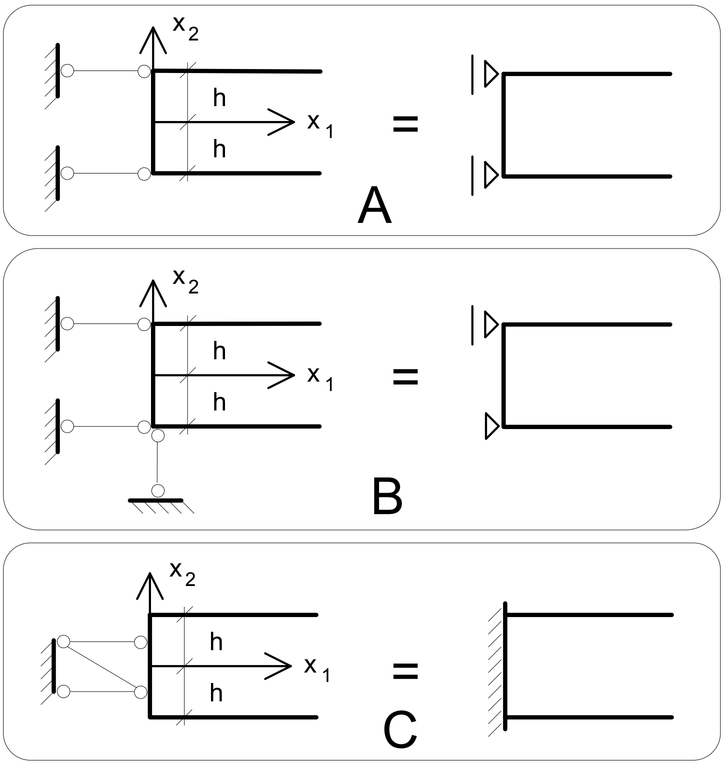
$$u_2^o = d - b x_1 + f x_3$$

$$u_3^o = g - c x_1 - f x_2$$

Ostatecznie otrzymujemy zatem rodzinę rozwiązań o 6 parametrach a, b, c, d, f i g.

Parametry te określa się z warunków wynikających ze sposobu podparcia konstrukcji. Warunki te noszą nazwę **kinematycznych warunków brzegowych.**

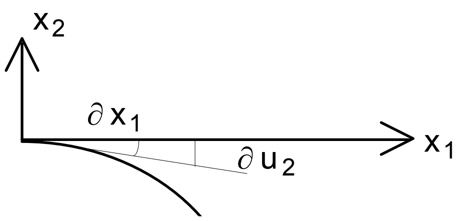
★ przykłady kinematycznych warunków brzegowych



A. $u_1(0,h) = 0$ $\quad u_1(0,-h) = 0$

B. $u_1(0,h) = 0$ $\quad u_1(0,-h) = 0$ $\quad u_2(0,-h) = 0$

C. $u_1(0,0) = 0$ $\quad u_2(0,0) = 0$ $\quad \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}(0,0) = 0$



6. RÓWNANIA NIEROZDZIELNOŚCI ODKSZTAŁCEŃ

- liniowe równania geometryczne (rów. Cauchy'ego)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

- 6 równań różniczkowych ze wzg. na niewiadome 3 funkcje przemieszczeń
- rozwiązanie istnieje tylko wówczas, gdy między odkształceniami zachodzą związki zwane **równaniami nierozdzielności.**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right.$$

$$\varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2}\left(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}\right)$$

przestawienia wskaźników :

$$\varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2}\left(u_{k,lij} + u_{l,kij}\right)$$

$$\varepsilon_{ik,jl} = \frac{1}{2}\left(u_{i,kjl} + u_{k,ijl}\right) \qquad \left| \times(-1) \right.$$

$$\varepsilon_{jl,ik} = \frac{1}{2}\left(u_{j,lik} + u_{l,jik}\right) \qquad \left| \times(-1) \right.$$

$$+$$

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

★ liczba równań (liczba 4 elementowych wariacji ze zbioru 3 elementowego) wynosi 3^4 = 81, ale **liczba równań niezależnych wynosi 6**

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

$$\varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} - 2\varepsilon_{13,13} = 0$$

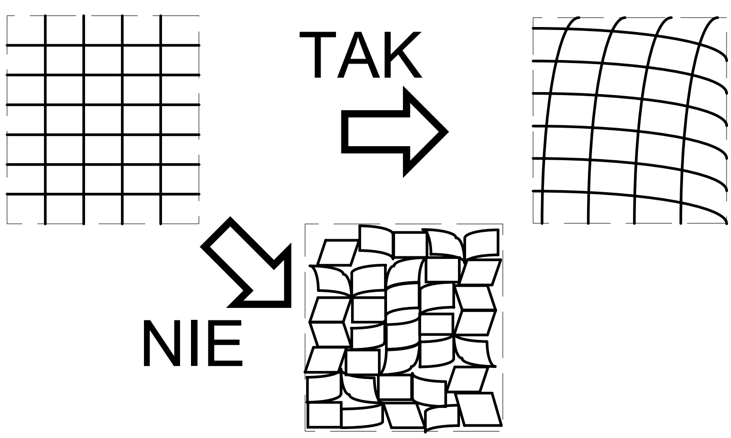
$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} - 2\varepsilon_{23,23} = 0$$

$$\varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{13,12} = 0$$

$$\varepsilon_{22,13} + \varepsilon_{13,22} - \varepsilon_{21,23} - \varepsilon_{23,21} = 0$$

$$\varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{31,32} - \varepsilon_{32,31} = 0$$

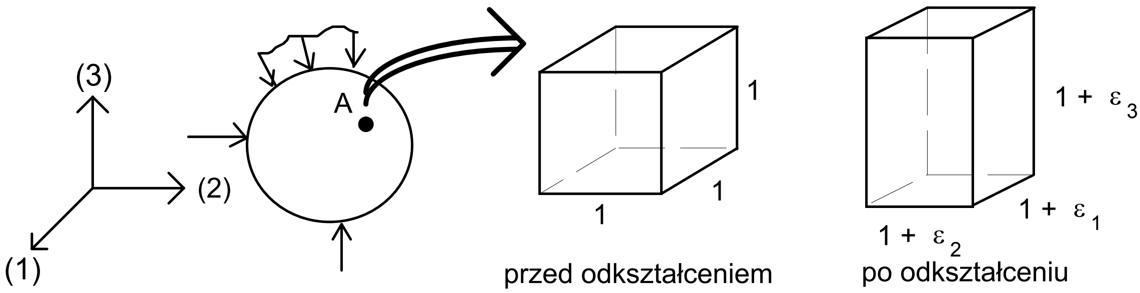
★ interpretacja geometryczna



7. DEFORMACJA SZEŚCIANU JEDNOSTKOWEGO

Problem : Określić deformację sześcianu o jednostkowych krawędziach ("obraz" punktu materialnego tzn. punktu o przypisanej masie).

A. W układzie współrzędnych określonym przez osie główne tensora odkształcenia



★ długości krawędzi sześcianu jednostkowego po odkształceniu

$$\varepsilon_i = \frac{L^i_k - L^i_o}{L^i_o} \qquad i = 1,2,3$$

$$L^i_o = 1 \qquad \Rightarrow \qquad L^i_k = 1 + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,3$$

★ zmiana objętości sześcianu

$$\Delta V = V_k - V_o = \left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_3\right) - 1 =$$

$$= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1 \quad \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_i$$

★ zmiana kątów między krawędziami sześcianu - **nie występuje**, gdyż dla $i \neq j$, ε_{ij}=0.

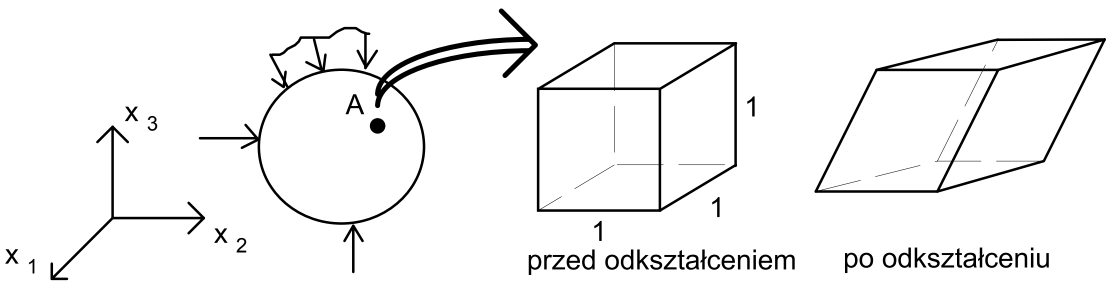
WNIOSEK :

1) zmiana objętości zwana dylatacją jest równa I niezmiennikowi tensora, jest więc taka sama w każdym układzie współrzędnych

$$\Delta V = \varepsilon_i = \varepsilon_{ii}$$

2) nie występuje zmiana postaci

B. W dowolnym układzie współrzędnych



★ długości krawędzi sześcianu jednostkowego po odkształceniu

$$\varepsilon_i = \frac{L^i_k - L^i_o}{L^i_o} \qquad i = 1,2,3$$

$$L^i_o = 1 \qquad \Rightarrow \qquad L^i_k = 1 + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,3$$

★ zmiana objętości sześcianu - dylatacja

$$\Delta V = \varepsilon_{ii}$$

★ zmiana kątów między krawędziami sześcianu

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{ij}\right) \quad \Rightarrow \quad \beta_{ij} = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{ij}$$

WNIOSEK :

1) **zmianę objętości, niezależnie od ukł. współrzędnych opisuje I niezmiennik**

$$\Delta V = \varepsilon_i = \varepsilon_{ii}$$

2) **występowanie zmiany postaci zależy od układu współrzędnych.**

8. DEWIATOR I AKSJATOR SYMETRYCZNEGO TENSORA II RZĘDU

TWIERDZENIE :każdy tensor symetryczny II rzędu można przedstawić w postaci sumy dwóch tensorów symetrycznych w postaci :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^A + \mathbf{T}^D \quad \Rightarrow \quad t_{ij} = t_{ij}^A + t_{ij}^D$$

★ aksjator $\quad \mathbf{T}^A = t_m \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad t_{ij}^A = t_m \delta_{ij}$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad t_m = \frac{1}{3}\left(t_{11} + t_{22} + t_{33}\right)$$

$$\mathbf{T}^A = \begin{bmatrix} t_m & 0 & 0 \\ 0 & t_m & 0 \\ 0 & 0 & t_m \end{bmatrix}$$

★ dewiator $\quad \mathbf{T}^D = \mathbf{T} - \mathbf{T}^A \quad \Rightarrow \quad t_{ij}^D = t_{ij} - t_m \delta_{ij}$

$$\mathbf{T}^D = \begin{bmatrix} t_{11} - t_m & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} - t_m & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} - t_m \end{bmatrix}$$

9. AKSJATOR I DEWIATOR TENSORA ODKSZTAŁCENIA

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

★ I niezmiennik (zmiana objętości) aksjatora i dewiatora

dla aksjatora $\quad \Delta V = \varepsilon_m + \varepsilon_m + \varepsilon_m = 3\varepsilon_m = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

dla dewiatora $\quad \Delta V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\varepsilon_m = 0$

WNIOSKI :

1) całą **zmianę objętości opisuje aksjator** tensora odkształcenia, nie opisuje on zmiany postaci

2) **zmianę postaci opisuje dewiator** tensora odkształcenia, nie opisuje on zmiany objętości