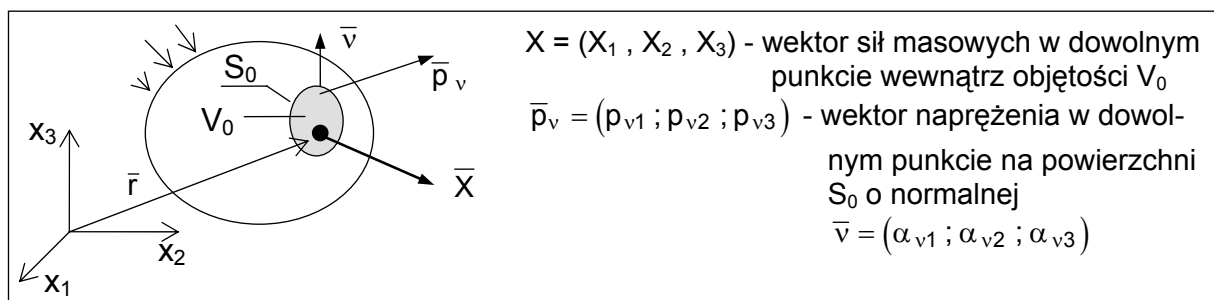


## RÓWNANIA RÓWNOWAGI (RÓWNANIA NAVIERA)

- ★ Sformułowanie zagadnienia: Dowlone ciało obciążone ukł. sił zewętrznych  $(Z) \equiv 0$  pozostaje w równowadze. Z wnętrza ciała wycinamy element o objętości  $V_0$  i powierzchni  $S_0$ . Określić warunki równowagi wyciętego elementu.



- ★ tw. o równoważności układu sił zewętrznych i wewętrznych

**ukł. sił działających na wycięty element jest układem zerowym**

$$\bar{S} = \iint_{S_0} \bar{p}_v dS_0 + \iiint_{V_0} \bar{X} dV_0 = \bar{0}$$

$$\bar{M} = \iint_{S_0} \bar{r} \times \bar{p}_v dS_0 + \iiint_{V_0} \bar{r} \times \bar{X} dV_0 = \bar{0}$$

- ★ warunek równowagi sił

$$S_i = \iint_{S_0} p_{vi} dS_0 + \iiint_{V_0} X_i dV_0 = 0$$

$$S_i = \iint_{S_0} \sigma_{ij} \alpha_{vj} dS_0 + \iiint_{V_0} X_i dV_0 = 0$$

Twierdzenie Gaussa

$$\iint_{S_0} \sigma_{ij} \alpha_{vj} dS_0 = \iint_{S_0} \sigma_{ij} \cos(\bar{v}, x_j) dS_0 = \iiint_{V_0} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV_0$$

$$S_i = \iiint_{V_0} \sigma_{ij,j} dV_0 + \iiint_{V_0} X_i dV_0 = \iiint_{V_0} (\sigma_{ij,j} + X_i) dV_0 = 0$$

## RÓWNANIA RÓWNOWAGI - RÓWNANIA NAVIERA

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + X_1 = 0$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + X_2 = 0$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + X_3 = 0$$

★ warunek równowagi momentów

$$M_i = \iint_{S_0} e_{ijk} x_j p_{vk} dS_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j X_k dV_0 = 0$$

$$M_i = \iint_{S_0} e_{ijk} x_j \sigma_{km} \alpha_{vm} dS_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j X_k dV_0$$

$$M_i = \iiint_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_m} (e_{ijk} x_j \sigma_{km}) dV_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j X_k dV_0$$

$$M_i = \iiint_{V_0} (e_{imk} \sigma_{km} + e_{ijk} x_j \sigma_{km,m}) dV_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j X_k dV_0$$

$$M_i = \iiint_{V_0} [e_{imk} \sigma_{km} + e_{ijk} x_j (\sigma_{km,m} + X_k)] dV_0 = 0$$

$$e_{imk} \sigma_{km} = 0$$

np.  $i = 1$

$$\begin{aligned} e_{1mk} \sigma_{km} &= e_{11k} \sigma_{k1} + e_{12k} \sigma_{k2} + e_{13k} \sigma_{k3} = e_{111} \sigma_{11} + e_{112} \sigma_{21} + e_{113} \sigma_{31} + \\ &+ e_{121} \sigma_{12} + e_{122} \sigma_{22} + e_{123} \sigma_{32} + e_{131} \sigma_{13} + e_{132} \sigma_{23} + e_{133} \sigma_{33} = \\ &= e_{123} \sigma_{32} + e_{132} \sigma_{23} = \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}$$

### SYMETRIA TENSORA NAPRĘŻENIA

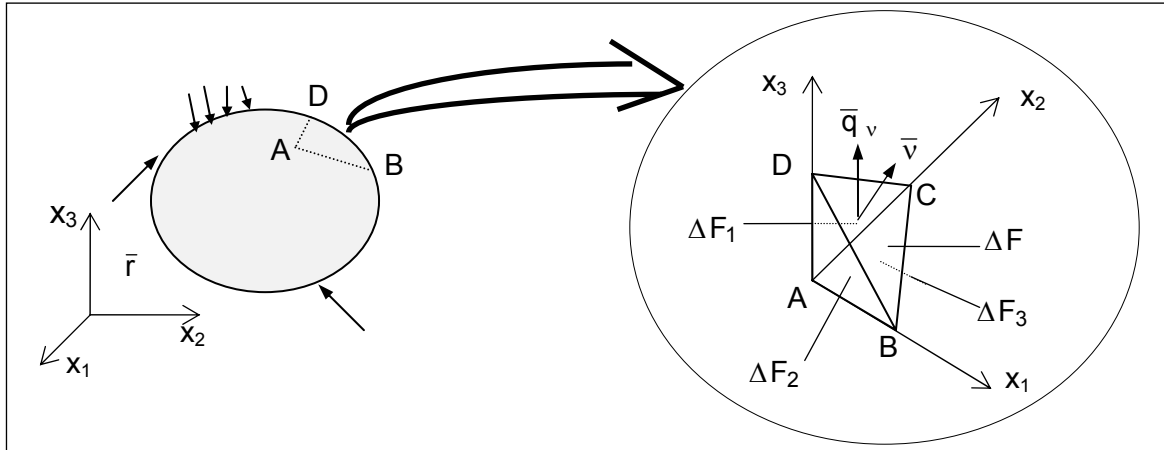
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

★ WNIOSKI

- 1) Tensor naprężenia zawiera 6 nieznanymi składowymi, których **nie można** wyznaczyć korzystając tylko z równań Naviera, których jest jedynie 3.
- 2) Równania Naviera są równaniami różniczkowymi, przy ich całkowaniu pojawią się zatem stałe całkowania. Wyznacza się je na podstawie analizy elementu ciała zawierającego część jego powierzchni zewnętrznej. Dzięki temu możliwe jest powiązanie naprężeń w punktach na powierzchni z obciążeniem zewnętrznym. **Relacje wiążące naprężenia z obciążeniem zewnętrznym ciała noszą nazwę STATYCZNYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH.**

STATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

W celu powiązania naprężeń z obciążeniem zewnętrznym wycinamy z ciała element objętościowy w kształcie czworościanu, którego 3 ścianki są równoległe do płaszczyzn układu współrzędnych, a ścianka ukośna aproksymuje część powierzchni zewnętrznej ciała.



- ★  $\bar{q}_v$  - uśredniona gęstość obciążenia zewnętrznego na ściance  $\Delta F$  o zewnętrznym wersorze normalnym  $\bar{v}$

$$\bar{q}_v = (q_{v1}, q_{v2}, q_{v3})$$

$$\bar{v} = (\alpha_{v1}, \alpha_{v2}, \alpha_{v3})$$

- ★  $\bar{p}_i$  - uśrednione wektory naprężenia na ściankach  $\Delta F_i$

$$\bar{p}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$$

- ★ warunek równowagi sił działających na czworościan  $\bar{S} = \bar{0}$

Zauważmy, że poszukiwanie związku wektora  $\bar{q}_v$  z wektorami naprężenia  $\bar{p}_i$  jest formalnie identyczne z zadaniem wyznaczania wektora naprężenia na ściance  $\Delta F$  jako funkcji wektorów naprężenia na ściankach  $\Delta F_i$  (czyli składowymi tensora naprężenia). Mamy zatem:

$$q_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj}$$

$$q_{v1} = \sigma_{11} \alpha_{v1} + \sigma_{12} \alpha_{v2} + \sigma_{13} \alpha_{v3}$$

$$q_{v2} = \sigma_{21} \alpha_{v1} + \sigma_{22} \alpha_{v2} + \sigma_{23} \alpha_{v3}$$

$$q_{v3} = \sigma_{31} \alpha_{v1} + \sigma_{32} \alpha_{v2} + \sigma_{33} \alpha_{v3}$$

- ★ WARUNKI KONIECZNE tego, aby dowolny tensor symetryczny II rzędu był tensorem naprężenia :

- 1) składowe tensora muszą spełniać równania Naviera,
- 2) składowe tensora muszą spełniać statyczne warunki brzegowe.