1. RÓWNANIA FIZYCZNE (KONSTYTUTYWNE)

Zadanie : Określić związek między odkształceniami i siłami wewnętrznymi, reprezentowanymi przez naprężenia.

★ zmienne stanu mechanicznego :czas " t ", temperatura " T " ....

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(x_k, t, T\right)$$
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(x_k, t, T\right)$$
$$u_i = u_i\left(x_k, t, T\right)$$

★ równania Naviera, równania Cauchy 'ego

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \qquad \text{dla} \qquad t = t^*, \; T = T^*$$
$$\varepsilon_{ij} = 1/2\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad \text{dla} \qquad t = t^*, \; T = T^*$$

★ równania konstytutywne

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, t, T\right)}$$

2. RÓWNANIA FIZYCZNE LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI (R. HOOKE 'A)

★ założenia:

1. jawna zależność odkształceń wyłącznie od naprężeń $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}\right)$
2. liniowy związek między odkształceniami i naprężeniami

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{S}\,\mathbf{T}_\sigma + \mathbf{T}_{\varepsilon o} \qquad \mathbf{T}_\sigma = \mathbf{Q}\,\mathbf{T}_\varepsilon + \mathbf{T}_{\varepsilon o}$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \varepsilon^{o}_{ij} \qquad \sigma_{ij} = Q_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} + \sigma^{o}_{ij}$$

S - macierz podatności (macierz współczynników materiałowych)
Q - macierz sztywności (macierz współczynników materiałowych)
$\mathbf{T}_{\varepsilon o}$, $\mathbf{T}_{\sigma o}$ - macierze stałych

3. sprężystość - po zdjęciu obciążenia znikają odkształcenia : $\mathbf{T}_{\varepsilon o} = \mathbf{0}$ $\qquad \mathbf{T}_{\sigma o} = \mathbf{0}$

★ macierze współczynników materiałowych (przypadek ogólny - 81 współcz. materiałowych)

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & S_{81} \end{bmatrix}$$

★ uproszczenia w liczbie stałych materiałowych

1) symetria tensorów naprężenia i odkształcenia $\Rightarrow$ 36 współczynników

$$\underset{6\times1}{\mathbf{T}_\sigma} = \underset{6\times6}{\mathbf{Q}}\;\underset{6\times1}{\mathbf{T}_\varepsilon} \qquad \underset{6\times1}{\mathbf{T}_\varepsilon} = \underset{6\times6}{\mathbf{S}}\;\underset{6\times1}{\mathbf{T}_\sigma}$$

najogólniejszy przypadek **anizotropii**

2) analiza gęstości energii odkształcenia sprężystego $\Rightarrow$ symetria macierzy **Q** i **S**
$\Rightarrow$ 21 współczynników [(36-6)/2 + 6] = 21
najogólniejszy przypadek materiału **liniowo sprężystego**

3) analiza możliwych płaszczyzn symetrii własności materiału

* 1 płaszczyzna symetrii - materiał **monokliniczny** $\Rightarrow$ 13 stałych
* 3 płaszczyzny symetrii - materiał **ortotropowy** $\Rightarrow$ 9 stałych
* 1 płaszczyzna, w której własności materiału są jednakowe w każdym kierunku
  - materiał **poprzecznie izotropowy** $\Rightarrow$ 5 stałych
* w każdym punkcie własności materiału są jednakowe w każdym kierunku
  - - materiał **izotropowy i jednorodny** $\Rightarrow$ 2 stałe

3. RÓWNANIA FIZYCZNE DLA IZOTROPOWEGO, JEDNORODNEGO MATERIAŁU LINIOWO SPRĘŻYSTEGO

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}}$$

G, λ - stałe Lame 'go

$$\sigma_{11} = 2G\,\varepsilon_{11} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)$$

$$\sigma_{22} = 2G\,\varepsilon_{22} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)$$

$$\sigma_{33} = 2G\,\varepsilon_{33} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)$$

$$\sigma_{12} = 2G\,\varepsilon_{12} \qquad \sigma_{13} = 2G\,\varepsilon_{13} \qquad \sigma_{23} = 2G\,\varepsilon_{23}$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (2G+\lambda) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (2G+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (2G+\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

4. ODWROTNA POSTAĆ RÓWNAŃ FIZYCZNYCH

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{T}_\sigma \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{S}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}\right)$$

$$i = j \qquad \sigma_{ii} = 2G\,\varepsilon_{ii} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ii} = 2G\,\varepsilon_{ii} + 3\lambda\,\varepsilon_{kk}$$

$$i = k \qquad \sigma_{kk} = \left(2G + 3\lambda\right)\varepsilon_{kk} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{kk} = \frac{1}{2G + 3\lambda}\,\sigma_{kk}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2G + 3\lambda}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3} \qquad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}$$

$$\sigma_{kk} = \left(2G + 3\lambda\right)\varepsilon_{kk} \quad \Rightarrow \quad \sigma_m = \left(2G + 3\lambda\right)\varepsilon_m$$

★ wprowadźmy następujące definicje

$$\frac{1}{2G} \overset{def}{=} \frac{1+\nu}{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$ moduł ścinania, mod. odkszt. postaciowego

$$\frac{\lambda}{2G+3\lambda} \overset{def}{=} \frac{\nu}{1+\nu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

$$K \overset{def}{=} \frac{2G+3\lambda}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$ moduł ściśliwości, mod. odkszt. objętościowego

★ ograniczenia na stałe materiałowe

1) z termodynamiki wynika, że stałe G, λ, K i **E (MODUŁ YOUNG'A)** muszą być dodatnie
2) dodatnie wartości modułów ścinania i ściśliwości oznaczają, że zachodzą relacje:

$$1+\nu > 0 \qquad \nu > -1$$
$$1-2\nu > 0 \qquad \nu < 0.5$$

$\boxed{-1 < \nu < 0.5}$ ograniczenia na stałą ν **(WSPÓŁCZYNNIK POISSON'A)**

★ zmiana objętości $\Delta V = \varepsilon_{ii} = 3\,\varepsilon_m = \dfrac{3}{(2G+3\lambda)}\,\sigma_m = \dfrac{3(1-2\nu)}{E}\,\sigma_m$

- jeżeli $\nu \to 0.5$ to $\Delta V \to 0$ - materiał nieściśliwy (guma)
- materiały o $\nu < 0$ nie są znane
- maksymalna zmiana objętości dla $\nu = 0$ (~ korek)

★ równania fizyczne c.d.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2G+3\lambda}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right)$$

$$\frac{1}{2G} \overset{def}{=} \frac{1+\nu}{E} \qquad \frac{\lambda}{2G+3\lambda} \overset{def}{=} \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right]}$$ tzw. „odwrotna postać prawa Hooke'a"

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{12} \qquad \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{13} \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{23}$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu)/E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu)/E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu)/E \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}$$

5. PRAWO ZMIANY POSTACI I OBJĘTOŚCI

- rozkład tensorów odkształcenia na aksjator i dewiator

$$\mathbf{T}^{\sigma} = \mathbf{D}^{\sigma} + \mathbf{A}^{\sigma} \qquad \mathbf{T}^{\varepsilon} = \mathbf{D}^{\varepsilon} + \mathbf{A}^{\varepsilon}$$

$$A^{\sigma}_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} \qquad A^{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_m \delta_{ij}$$

$$D^{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \qquad D^{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}$$

$$\sigma_m = \left(2G + 3\lambda\right)\varepsilon_m = 3K\,\varepsilon_m \qquad \Big|\times\delta_{ij}$$

$$-$$

$$\sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + 3\lambda\,\varepsilon_m\,\delta_{ij} - \left(2G + 3\lambda\right)\varepsilon_m\,\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_m\,\delta_{ij}\right)$$

★ prawo zmiany postaci $\mathbf{D}^{\sigma} = 2G\,\mathbf{D}^{\varepsilon}$

★ prawo zmiany objętości $\mathbf{A}^{\sigma} = 3K\,\mathbf{A}^{\varepsilon}$

★ nazwy równań wynikają z interpretacji geometrycznej tensora odkształcenia:

1) całą **zmianę objętości opisuje aksjator** tensora odkształcenia

2) **zmianę postaci opisuje dewiator** tensora odkształcenia

★ nazwy stałych G i K wynikają stąd, że:

1) moduł G jest współczynnikiem proporcjonalności w prawie zmiany postaci - stąd G jest modułem odkształcenia postaciowego (efekt ścinania)

2) moduł K jest współczynnikiem proporcjonalności w prawie zmiany objętości - stąd K jest modułem odkształcenia objętościowego (efekt ściśliwości)

★ prawo zmiany postaci i prawo zmiany objętości są inną postacią **równań fizycznych dla materiału liniowo sprężystego (pr. Hooke'a)**