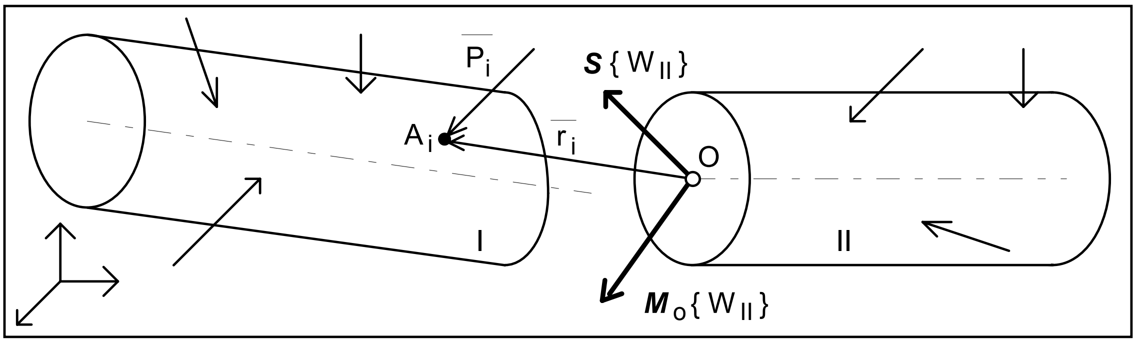
8. Siły przekrojowe w konstrukcjach prętowych

- **Pręt** - bryła, której jeden wymiar (długość) jest nieporównywalnie duży w stosunku do dwu pozostałych (wymiary przekroju poprzecznego)
- **Oś pręta** - miejsce położenia punktów będących środkami ciężkości przekrojów pręta płaszczyznami przecinającymi tworzące pręta
- **Przekrój poprzeczny** - przekrój pręta płaszczyzną prostopadłą do osi pręta-

Zadanie : Wyznaczyć zredukowany układ sił wewnętrznych { W_{II} }, tzn. wyznaczyć wektor sumy ***S*** { W_{II} } i wektor momentu $\boldsymbol{M}_O$ { W_{II} }.

Zredukowanego układu sił wewnętrznych, poszukujemy w przekroju poprzecznym pręta, a środkiem redukcji jest środek ciężkości przekroju "O"

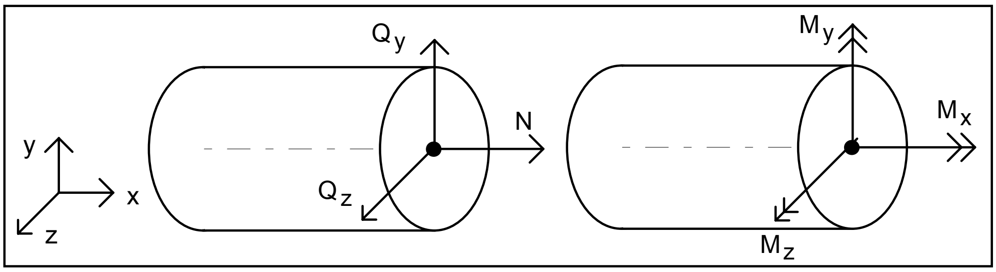


Rozwiązanie: Korzystając z twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych, a także uwzględniając zasadę zesztywnienia, możemy zapisać:

$$\boldsymbol{S}\{W_{II}\} = \sum \overline{P}_i\{Z_I\} \qquad \boldsymbol{M}_o\{W_{II}\} = \sum \overline{r}_i \times \overline{P}_i\{Z_I\}$$

Składowe tak wyznaczonego wektora sumy i momentu nazywamy siłami przekrojowymi

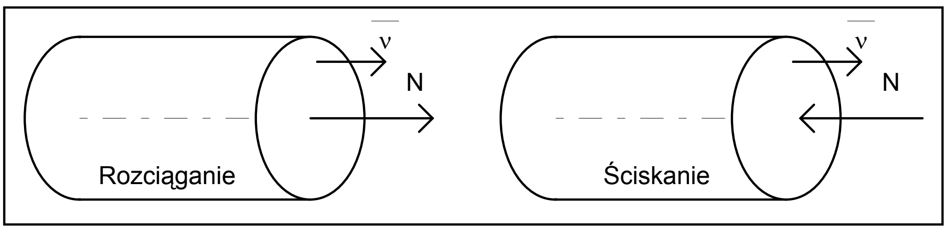
$$\boldsymbol{S} \equiv \overline{S}\left(N, Q_y, Q_z\right) \qquad \boldsymbol{M}_o \equiv \overline{M}\left(M_x, M_y, M_z\right)$$



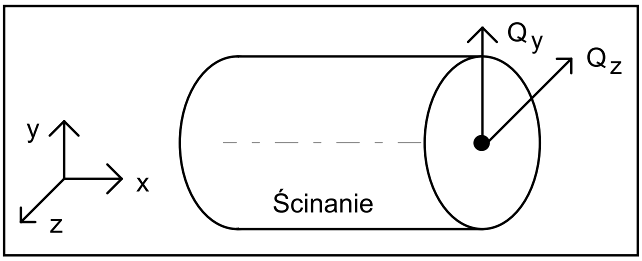
8.1. Podstawowe przypadki redukcji

Układ sił zewnętrznych { Z_I }≡ { W_{II} } może redukować się w środku ciężkości przekroju poprzecznego do:

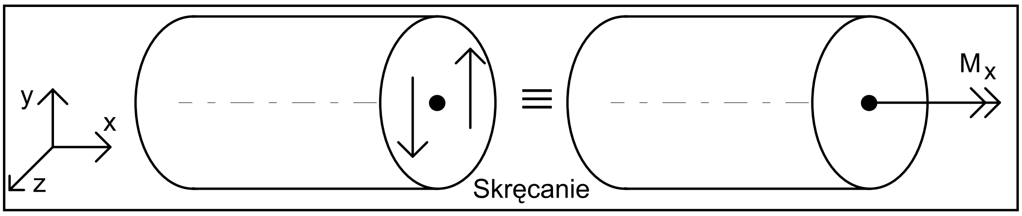
- wypadkowej, prostopadłej do przekroju poprzecznego (siła **osiowa, normalna, podłużna**)



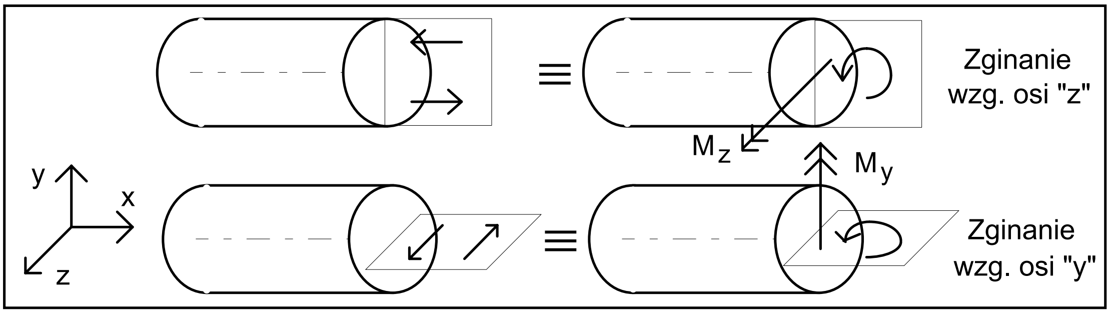
✶ wypadkowej, leżącej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego (siła **poprzeczna, ścinająca, tnąca**)



✶ pary sił leżącej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, a zatem pary o wektorze momentu normalnym do przekroju (**moment skręcający**)

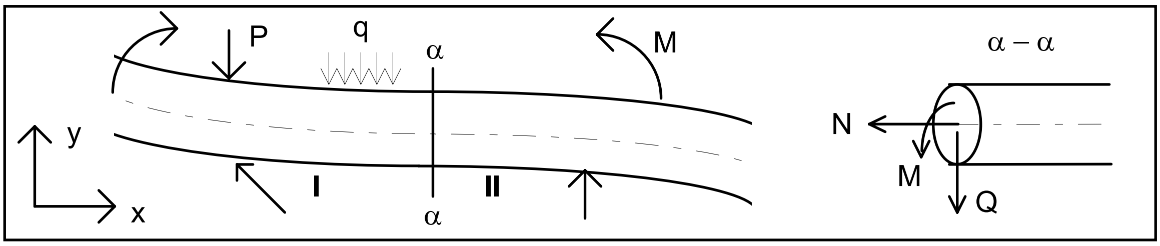


✶ pary sił leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju poprzecznego, a zatem pary o wektorze momentu leżącym w płaszcz. przekroju (**moment zginający**)



9. Statycznie wyznaczalne płaskie konstrukcje prętowe

Definicja: konstrukcje składające się z prętów, których osie leżą w jednej płaszczyźnie, obciążone układem sił określonym w tej samej płaszczyźnie i tak połączone z podłożem, że reakcje podporowe można wyznaczyć na podstawie jedynie równań równowagi.



9.1. Reakcje

$$\sum Z \equiv 0 \qquad \sum M_{ox} \equiv 0 \qquad \sum M_{oy} \equiv 0$$

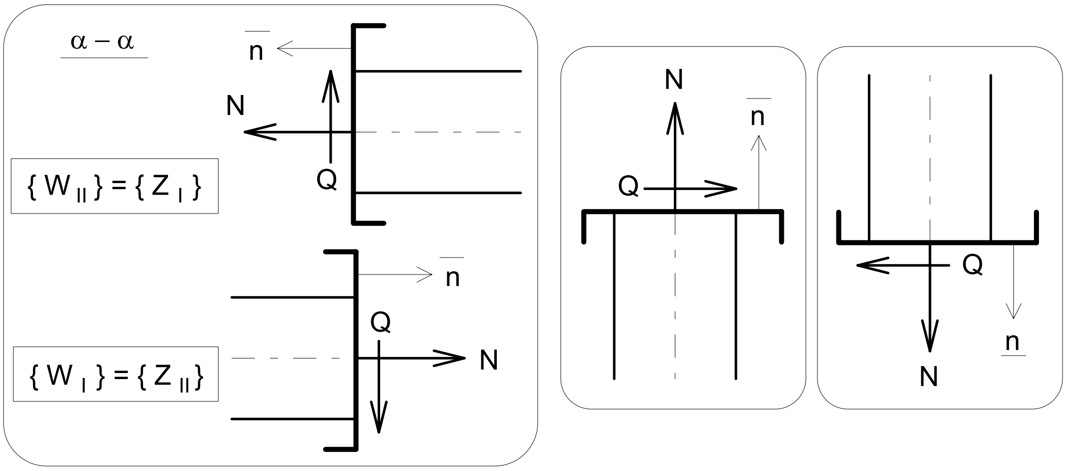
$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum M_{oz} = \sum M = 0$$

9.2. Siły przekrojowe

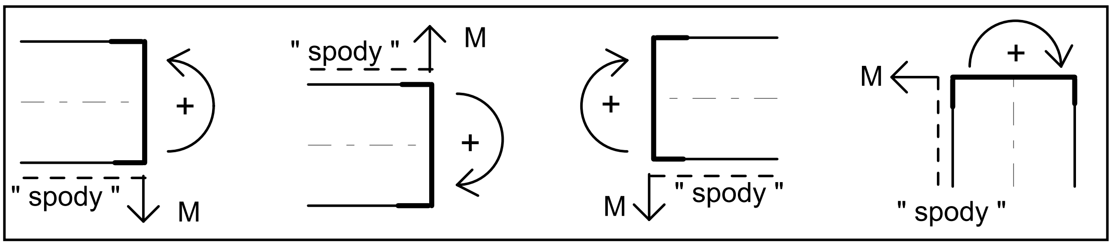
$$\overline{S}\left(N, Q \equiv Q_y, 0\right) = \left(N, Q\right) \qquad \overline{M}\left(0, 0, M_z \equiv M\right) = \left(M\right)$$

9.3 Układ własny przekroju poprzecznego

Przy poszukiwaniu sił przekrojowych (poprzez redukcję obciążenia zewnętrznego) rezygnuje się z globalnego układu współrzędnych (x,y) na rzecz układu lokalnego związanego z przekrojem poprzecznym. Układ taki nosi nazwę **ukł. własnego** przekroju poprzecznego.



9.4. Konwencja znakowania momentu od pary sił, spody.

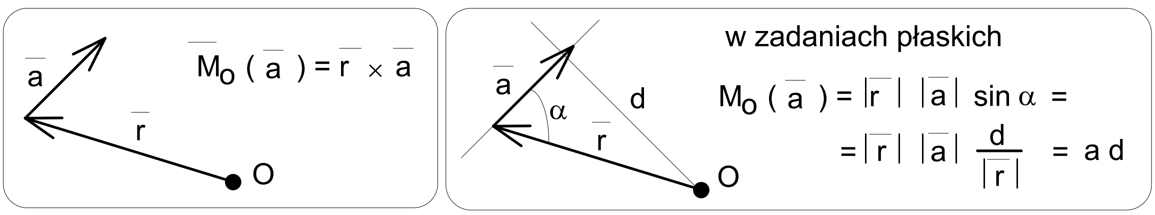


Umowa 1: graficznym reprezentatem momentu od pary sił będzie łuk skierowany. Za dodatni zwrot momentu przyjmujemy taki, który powoduje rozciąganie dowolnie wyróżnionych włókien pręta, zwanych **spodami**.

Umowa 2: Oś liczbową, na której będziemy odkładać wartości momentów przekrojowych przyjmuje,y w ten sposób, że jest on prostopadła do przyjętych spodów, a jej dodatni zwrot "jest zgodny ze spodami".

9.5. Obliczanie momentu.

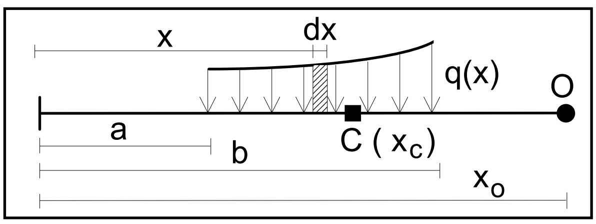
✶ wektora $\overline{a}$ względem punktu O



$$\overline{M}_O(\overline{a}) = \overline{r} \times \overline{a}$$

$$M_O(\overline{a}) = |\overline{r}|\,|\overline{a}|\,\sin\alpha = |\overline{r}|\,|\overline{a}|\,\frac{d}{|\overline{r}|} = a\,d$$

✶ od obciążenia ciągłego wzg. pkt. O

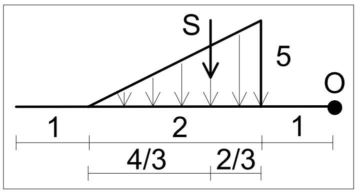


$$S = \int_a^b q(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{\int_a^b q(x)\,x\,dx}{\int_a^b q(x)\,dx}$$

$$M_o = \int_a^b q(x)\,dx\,(x_o - x) = \int_a^b q(x)\,x_o\,dx - \int_a^b q(x)\,x\,dx =$$

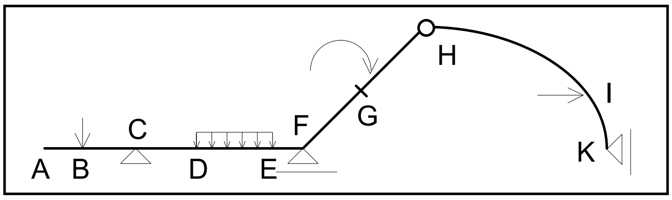
$$= x_o \int_a^b q(x)\,dx - x_c \int_a^b q(x)\,dx = S\,(x_o - x_c)$$

Przykład



$$M_o = 1/2 \times 5 \times 2 \times (1/3 \times 2 + 1) = 8.33$$

10. Punkty, przedziały charakterystyczne w konstrukcjach prętowych



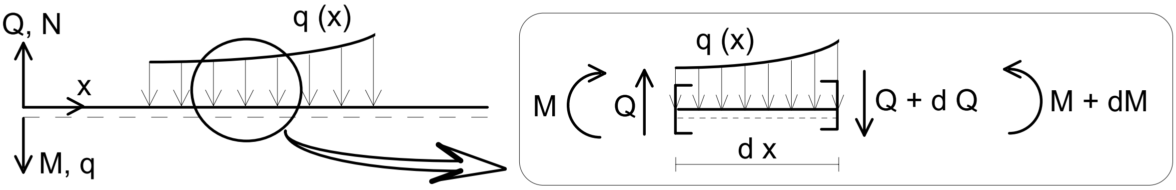
✶ **Punkty charakterystyczne**

- początek, koniec pręta: A, K
- podpory: C, F, K
- punkty przyłożenia obciążenia: B, G, I
- początek i koniec obciążenia ciągłego: D, E
- miejsca zmiany geometrii pręta i punkty nieciągłości: H

✶ **Przedziały charakterystyczne** - przedziały położone między pkt. charakteryst.

11. Zależności różniczkowe dla pręta prostego

Definicja: pręt prosty to pręt, którego oś jest linią prostą.



$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q - q(x)\,dx - Q - dQ = 0 \qquad\qquad \frac{dQ}{dx} = -\,q(x)$$

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad Q\,dx + M - q(x)\,dx\,\frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

$$(dx)^2 \cong 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dM}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -\,q(x)$$

Wnioski:

1. jeżeli q=0 to wykres funkcji Q(x) jest stały, a funkcji M(x) jest liniowy
2. jeżeli q=const., to wykres funkcji Q(x) jest liniowy, a funkcji M(x) paraboliczny (2°)
3. między M i Q zachodzą wszystkie zależności, jakie wynikają z własności pochodnej