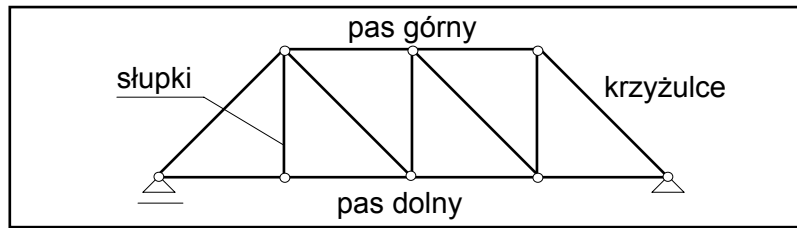
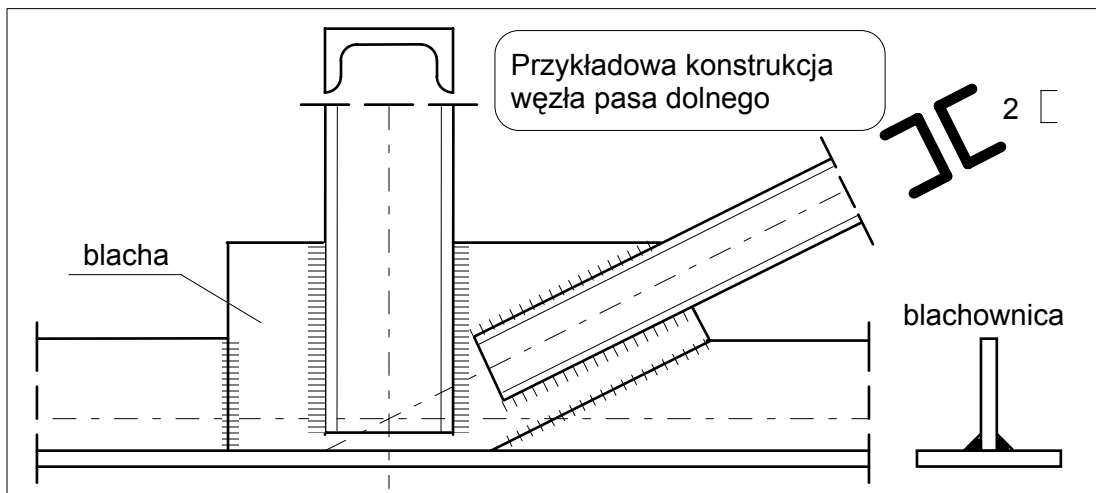


Definicja: konstrukcja prętowa, składająca się z prętów prostych połączonych ze sobą przegubami

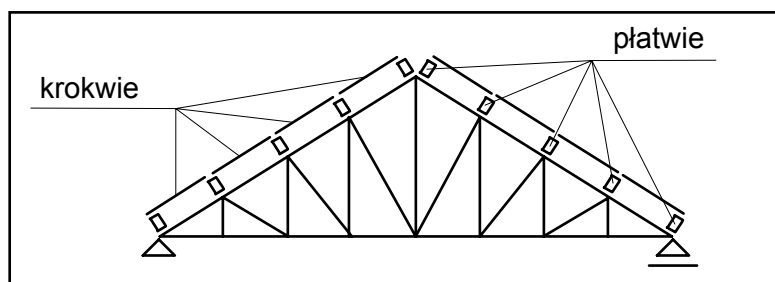
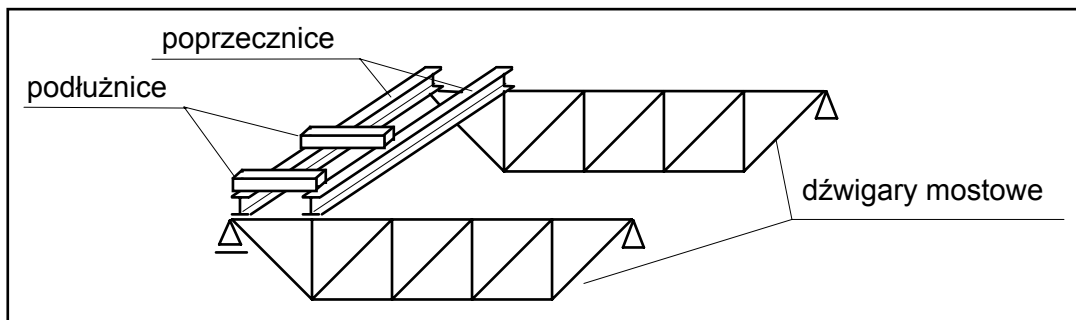


Założenia:

- ★ pręty są połączone w węzłach przegubami idealnymi (brak tarcia)

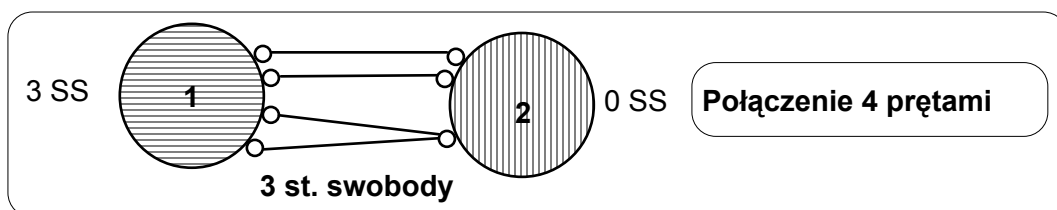
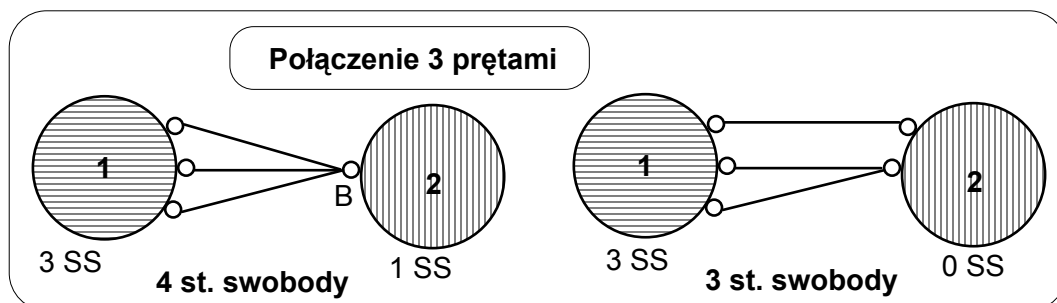
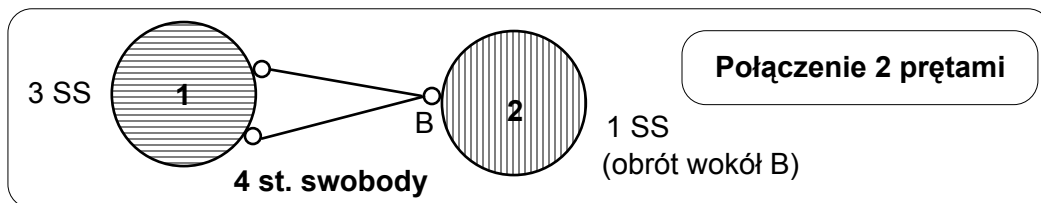
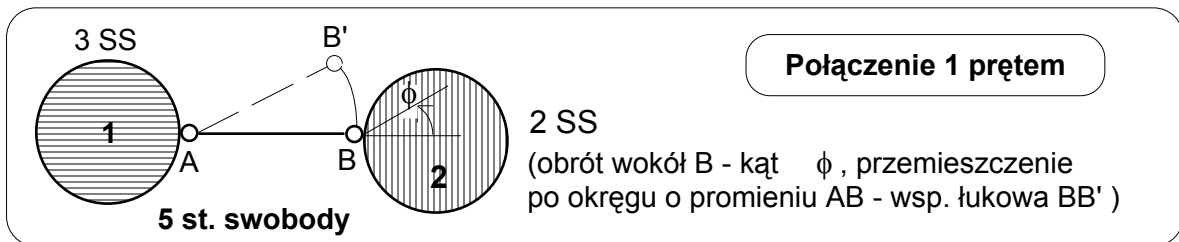
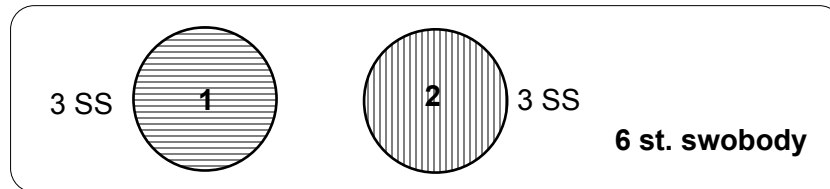


- ★ osie prętów przecinają się w węzle w jednym punkcie
- ★ obciążenie zewnętrzne przyłożone jest tylko w węzłach kratownicy



Podstawowe informacje nt. geometrycznej niezmienności ciał płaskich

- ★ **stopień swobody** - niezależny parametr określający położenie ciała na płaszczyźnie
- ★ **pojedyncza tarcza** - 3 stopnie swobody: dwa przemieszczenia i jeden obrót. "T" niezależnych tarcz ma razem 3 T stopni swobody
- ★ **dwie tarcze**



Wniosek : dodatkowy pręt łączący dwie tarcze nie zawsze musi odbierać jeden stopień swobody. Zawsze prawdziwy jest natomiast warunek, mówiący, że:

jeżeli 2 tarcze połączone są tak, że tworzą układ o 3 stopniach swobody (geometrycznie niezmienny) , to prawdziwy jest związek

$$3 \times 2 - p \leq 3 \quad p - \text{liczba prętów}$$

W przypadku połączonych T tarcz tworzących układ o 3 stopniach swobody

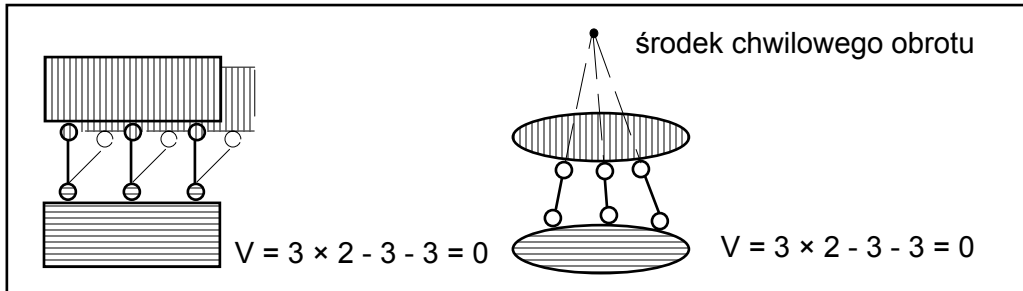
$$3 \times T - p \leq 3$$

Stopień geometrycznej niezmienności V

$$V = 3 \times T - p - 3$$

Warunek konieczny (ale nie wystarczający) geometrycznej niezmienności układu

$$V \begin{cases} = 0 & \text{układ sztywny} \\ < 0 & \text{układ przesztywniony} \\ > 0 & \text{układ geometrycznie zmienny} \end{cases} \quad \text{UKŁAD GEOM.NIEZMIENNY}$$

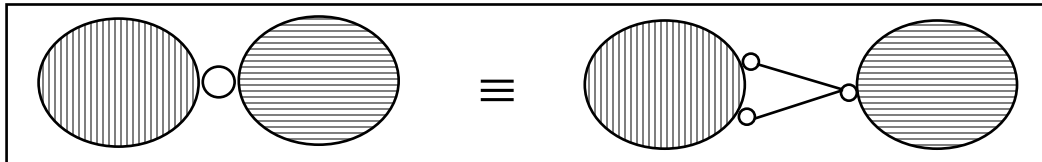


Twierdzenia o geometrycznie niezmiennym połączeniu 2 i 3 tarcz

- ★ warunkiem koniecznym i wystarczającym połączenia 2 tarcz w sposób geometrycznie niezmienny jest połączenie ich co najmniej trzema prętami ($V \leq 0$), które nie są równoległe, ani ich kierunki nie przecinają się w jednym punkcie (środek chwilowego obrotu)
- ★ warunkiem koniecznym i wystarczającym połączenia 3 tarcz w sposób geometrycznie niezmienny jest połączenie każdych dwóch co najmniej dwoma prętami ($V \leq 0$) w taki sposób, aby pręty te nie były równoległe, ani też punkty przecięcia się kierunków prętów łączących każde dwie tarcze nie leżały na jednej prostej, oraz aby nie schodziły się w jednym punkcie.

Kratownice

W kratownicach - tarcze (każdy pręt kratownicy stanowi jedną tarczę) połączone są przegubami, co odpowiada połączeniu 2 prętami



w - liczba węzłów (punktów, w których schodzą się co najmniej 2 tarcze, tzn. pręty kratownicy)

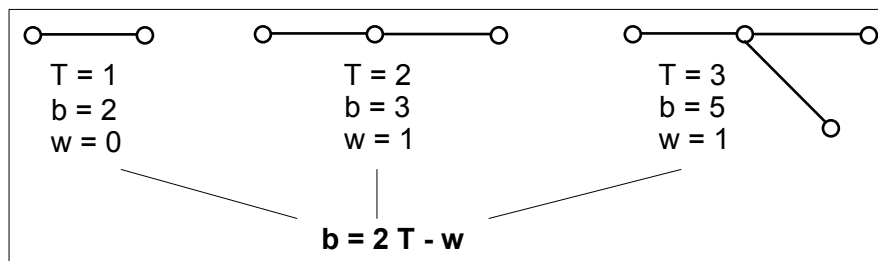
T - liczba tarcz (prętów kratownicy)

b - liczba biegunów prostych

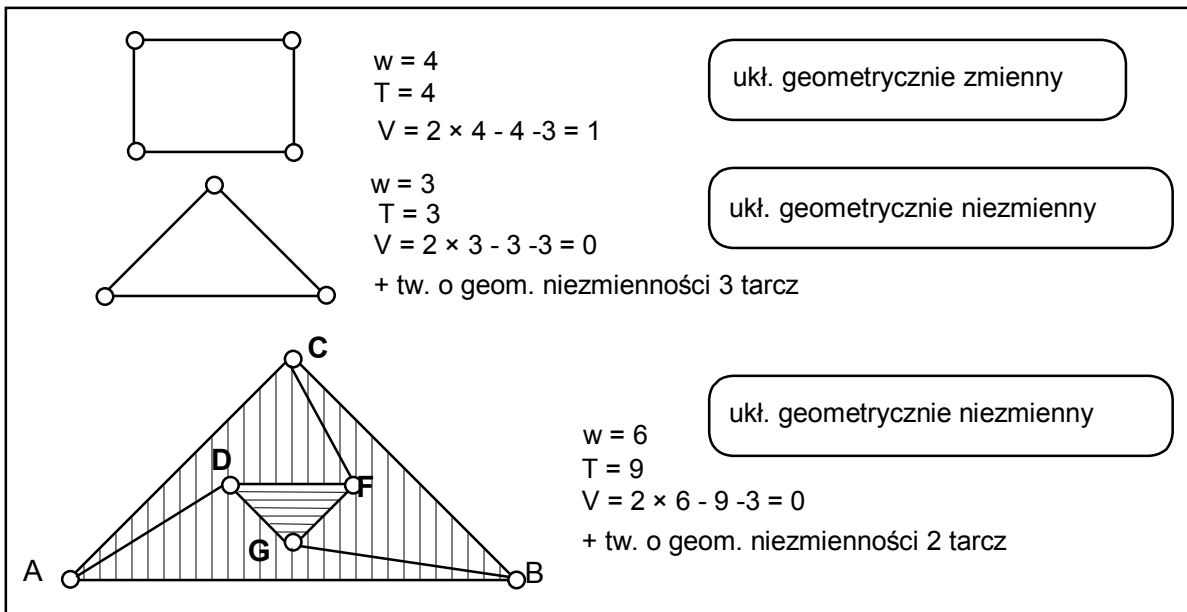
$$V = 3 \times T - p - 3$$

⇒

$$V = 3 \times T - 2 \times b - 3$$

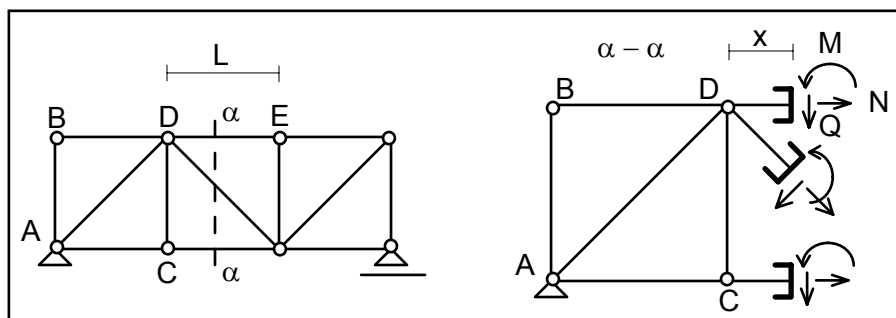


$$V = 2w - T - 3$$



- * **wewnętrzna geometryczna niezmiennosc kratownicy** - niezmiennosc kratownicy bez uwzględniania sposobu jej połączenia z podłożem
- * **zewnętrzna geometryczna niezmiennosc kratownicy** - geometryczna niezmiennosc połączenia kratownicy z podłożem

Zredukowany układ sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym pręta kratownicy



na długości pręta DE $q(x) = 0$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = 0 \Rightarrow M(x) = ax + b$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$M \equiv 0, \quad Q \equiv 0$$

WNIOSEK: układ sił wewnętrznych redukuje się w przekroju poprzecznym każdego pręta kratownicy do siły podłużnej N.

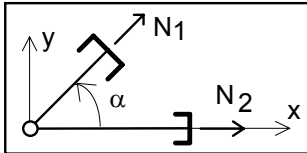
Twierdzenia o prętach zerowych

Definicja : pręt zerowy to pręt, w którym siła $N=0$

Twierdzenie : jeżeli kratownica obciążona dowolnym układem sił zewnętrznych pozostaje w równowadze, to w równowadze pozostaje również każdy węzeł obciążony siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi występującymi w przekrojach prętów schodzących się w tym węźle.

*** twierdzenie 1**

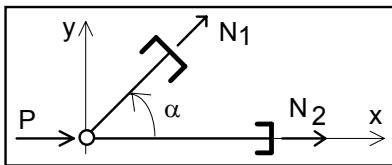
Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 2 pręty i węzeł jest nieobciążony, to siły wewnętrzne w obu prętach są równe zero



$$\begin{aligned} \sum X &= N_1 \cos \alpha + N_2 = 0 \\ \sum Y &= N_1 \sin \alpha = 0 \end{aligned} \Rightarrow N_1, N_2 = 0$$

*** twierdzenie 2**

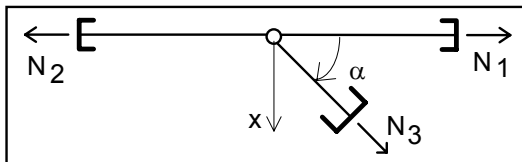
Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 2 pręty i węzeł jest obciążony siłą leżącą na kierunku jednego z nich, to siła wewnętrzna w drugim pręcie jest równa zero



$$\sum Y = N_1 \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

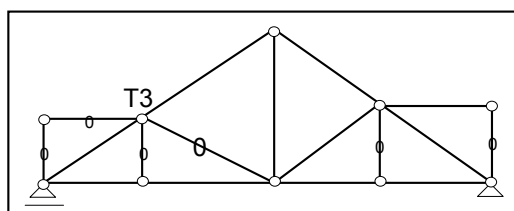
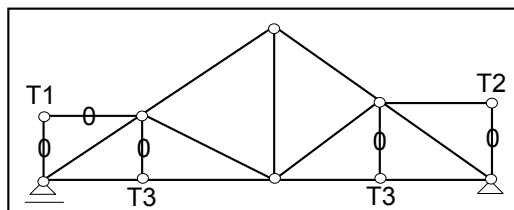
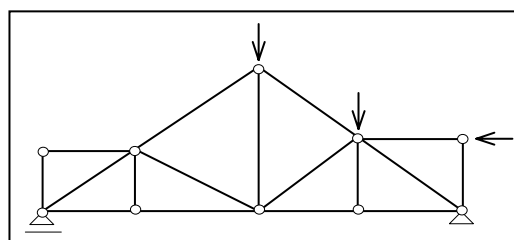
*** twierdzenie 3**

Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 3 pręty, z których dwa leżą na tej samej prostej i węzeł jest nieobciążony, to siła w trzecim pręcie jest równa zero



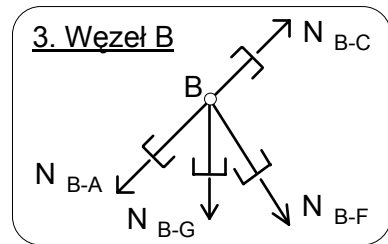
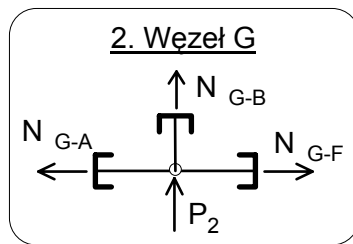
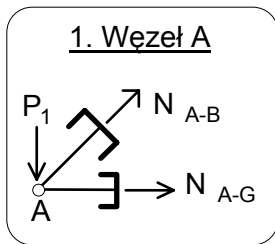
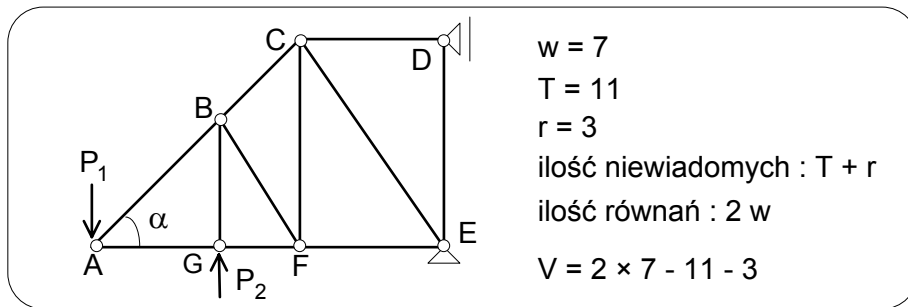
$$\sum X = N_3 \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

*** ilustracja zastosowania twierdzeń o prętach zerowych**



Metody rozwiązywania kratownic

★ metoda równoważenia prętów



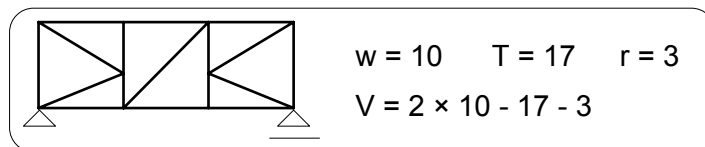
rów. równowagi węzła A

$$\sum Y = N_{A-B} \sin \alpha - P_1 = 0$$

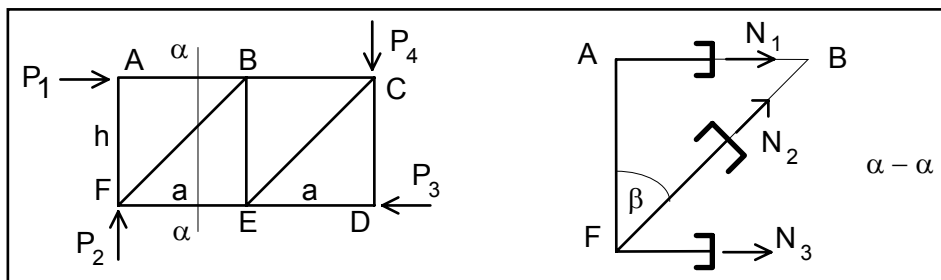
$$\sum X = N_{A-B} \cos \alpha + N_{A-G} = 0$$

itd.

- wady metody:**
1. kolejność rozwiązywania jest zdeterminowana układem prętów,
 2. duża liczba "rachunków"
 3. kratownica bez węzła o 2 prętach nie może być "ręcznie" rozwiązana



★ metoda Rittera - przekrój kraty przez 3 pręty nie schodzące się w jednym węźle



$$\sum M_F = N_1 h + P_1 h = 0 \Rightarrow N_1 = \dots$$

$$\sum M_B = -N_3 h + P_2 a = 0 \Rightarrow N_3 = \dots$$

$$\sum X = 0 \text{ lub } \sum Y = 0 ; \sum Y = P_2 + N_2 \cos \beta = 0 \Rightarrow N_2 = \dots$$

★ metoda Cremony (graficzny odpowiednik metody równoważenia węzłów)