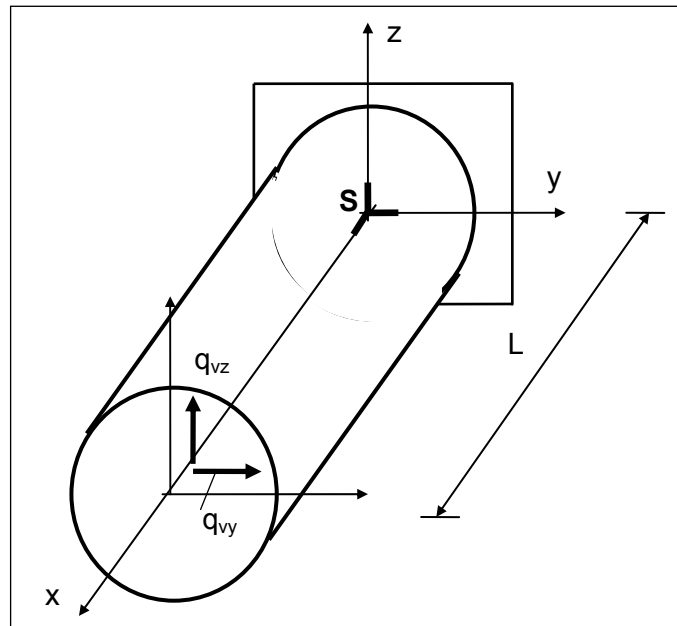


**1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA**

- ★  $x$  - oś pręta,  $y, z$  - osie główne, centralne przekroju poprzecznego pręta
- ★ pręt pryzmatyczny, utwierdzony "punktowo" w pkt.  $S(0, 0, 0)$
- ★ pobocznica wolna od obciążeń
- ★ denko  $x = L$  obciążone siłami o gęstości  $\mathbf{q}(0, q_{vx}, q_{vy})$ . Obciążenie redukuje się do pary sił o momencie  $M_s$ , działającej w płaszczyźnie  $(y, z)$
- ★ siły masowe  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

**2. ROZWIĄZANIE PROBLEMU SKRĘCANIA****Podejście kinematyczne**

$$\mathbf{u} \text{ (+ kin. war. brzeg.) } \Rightarrow \mathbf{T}_\varepsilon \Rightarrow \mathbf{T}_\sigma \text{ (rów. Naviera + stat. war. brzeg.)}$$

- ★ kinematyczne warunki brzegowe w pkt.  $S(0, 0, 0)$

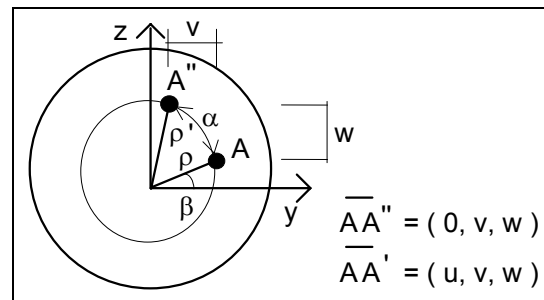
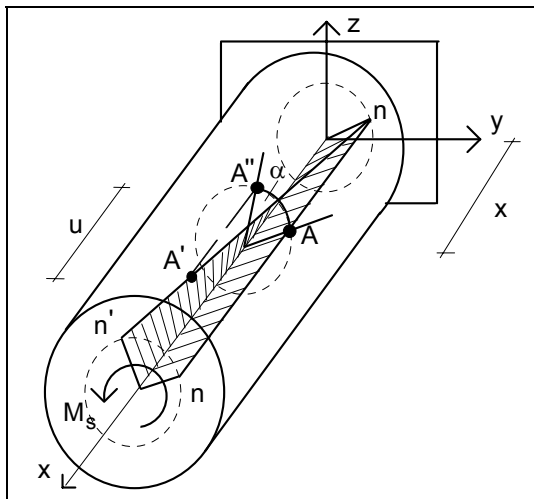
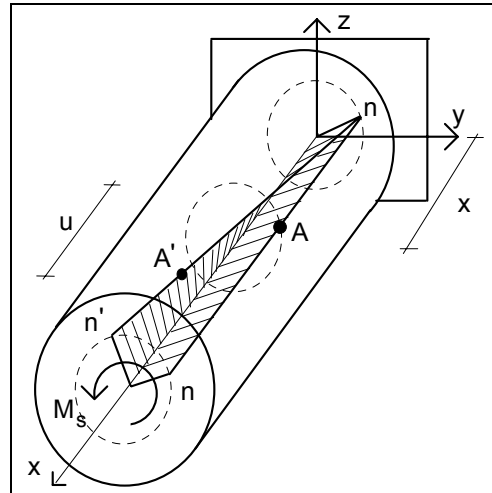
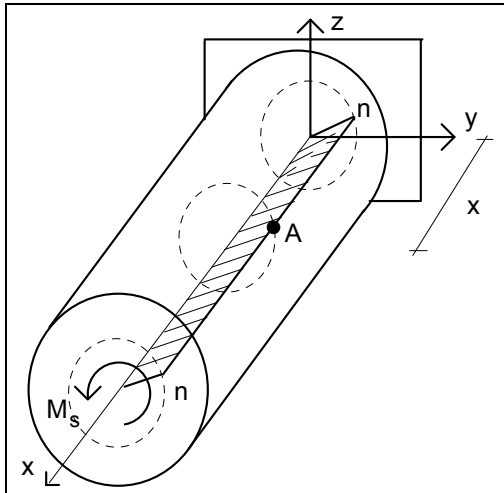
$$u = v = w = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{brak obrotu wzg. osi } x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{brak obrotu wzg. osi } y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{brak obrotu wzg. osi } z$$

FUNKCJE PRZEMIESZCZEŃ



★ kąt skręcenia przekroju  $\alpha = \alpha(x)$

założenie :

$$\alpha = \theta x$$

$\theta$  - jednostkowy kąt skręcenia

★ funkcje przemieszczeń pkt. A

$$v = -[\rho \cos \beta - \rho' \cos(\alpha + \beta)] = -\rho \cos \beta + \rho' \cos \alpha \cos \beta - \rho' \sin \alpha \sin \beta$$

$$w = [\rho' \sin(\alpha + \beta) - \rho \sin \beta] = \rho' \sin \alpha \cos \beta + \rho' \sin \beta \cos \alpha - \rho \sin \beta$$

zał. o małych przemieszczeniach

$$\rho = \rho' ; \sin \alpha \approx \alpha ; \cos \alpha \approx 1$$

$$v = -\rho \alpha \sin \beta$$

$$w = \rho \alpha \cos \beta$$

$$\rho \sin \beta = z$$

$$\rho \cos \beta = y$$

$$v = -\theta x z$$

$$w = \theta x y$$

Funkcja u związana jest ze "spaczeniem" (deplanacją) przekroju i dla różnych kształtów jest ona odmienna. Dla ustalonego kształtu przekroju pręta nie obserwuje się jednak różnic w spaczeniu poszczególnych przekrojów poprzecznych pręta. Tak więc  $u = u(y, z)$ .

założenie

$$u(y, z) = \theta \varphi(y, z)$$

- ★ sprawdzenie kinematycznych warunków brzegowych

$$\text{dla } S(0, 0, 0) \quad u = 0 \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad w = 0 \Leftrightarrow \varphi(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}_{(0,0,0)} = 0$$

- ★ wyznaczenie składowych tensora odkształcenia

$$\varepsilon_x = u_{,x} = 0$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} = 0$$

$$\varepsilon_z = w_{,z} = 0$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = -\theta x + \theta x = 0$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right)$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right)$$

- ★ wyznaczenie składowych tensora naprężenia

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} = G \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) \quad ; \quad \tau_{xz} = G \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right)$$

- ★ sprawdzenie równań równowagi

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \Rightarrow G \theta \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

pozostałe dwa równania Naviera są spełnione tożsamościowo

- ★ sprawdzenie statycznych warunków brzegowych

pobocznicza  $\bar{v} = (0, \alpha_{vy}, \alpha_{vz})$

$$\tau_{xy} \alpha_{vy} + \tau_{xz} \alpha_{vz} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) \alpha_{vy} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) \alpha_{vz} = 0$$

pozostałe dwa warunki są spełnione tożsamościowo

ścianki poprzeczne  $\bar{v} = (\pm 1, 0, 0)$

$$q_{vx} = 0$$

$$q_{vy} = \pm \tau_{yx} = \pm G \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right)$$

$$q_{vz} = \pm \tau_{zx} = \pm G \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right)$$

**Podsumowanie** : funkcja  $\varphi(y, z)$  musi być taka, że spełnia :

1. równanie harmoniczne  $\nabla^2 \varphi = 0$
2. statyczne warunki brzegowe  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z\right) \alpha_{vy} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\right) \alpha_{vz} = 0$
3. kinematyczne warunki brzegowe  $\varphi(0, 0) = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z(0,0)} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y(0,0)} = 0 \qquad (W1)$$

Muszą ponadto być spełnione relacje między składowymi obc. zewnętrznego i funkcją  $\varphi(y, z)$

$$q_{vy} = \pm G \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z\right) \qquad q_{vz} = \pm G \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\right) \qquad (W2)$$

★ zagadnienie Neumanna

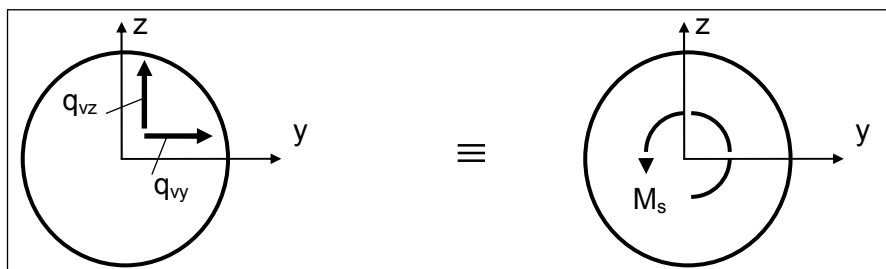
$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad + \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z\right) \alpha_{vy} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\right) \alpha_{vz} = 0$$

Istnieje tylko jedno rozwiązanie zag. Neumanna z dokładnością do stałej, którą wyznacza się z warunku  $\varphi(0, 0) = 0$ .

Warunki (W1) dla przekroju z co najmniej jedną osią symetrii są spełnione, a dla innych z wystarczającą dokładnością.

Obciążenie zewnętrzne musi być takie, aby spełnione były warunki (W2), gdzie  $\theta$  jest parametrem obciążenia.

**Obciążenie ścianki poprzecznej momentem skręcającym**



Rozwiązanie uzyskane dla obciążenia  $\mathbf{q}(0, q_{vx}, q_{vy})$  może być przy wykorzystaniu zasady de Saint-Venanta zastosowane dla obciążenia w postaci momentu skręcającego  $M_s$  pod warunkiem, że obciążenia są statycznie równoważne, tzn .

$$M_s = \iint_A (q_{vz} y - q_{vy} z) dA = \theta G \iint_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} z + y^2 + z^2\right) dA$$

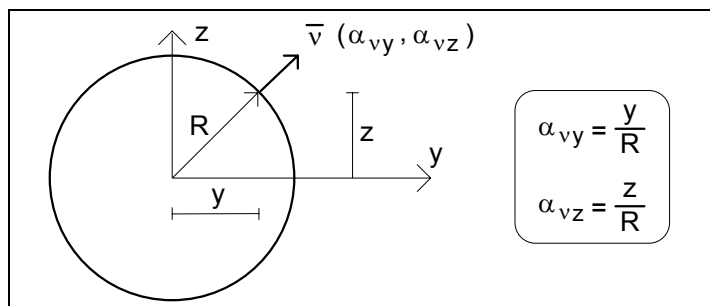
$$I_s \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} z + y^2 + z^2\right) dA$$

$$\boxed{M_s = \theta G I_s}$$

$$\boxed{\theta = \frac{M_s}{G I_s}}$$

**Inne więzy kinematyczne**

Stosując podejście statyczne można wykazać, że tensory odkształcenia i naprężenia **nie zmieniają się**. Inne są jedynie funkcje przemieszczeń.

**3. SKRĘCANIE PRĘTA O PRZEKROJU KOŁOWYM**

★ zagadnienie Neumanna

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \\ + \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z &= 0 \\ + \\ \varphi(0,0,0) &= 0 \end{aligned}$$

Jednorodność równania harmonicznego i warunków brzegowych prowadzi do rozwiązania

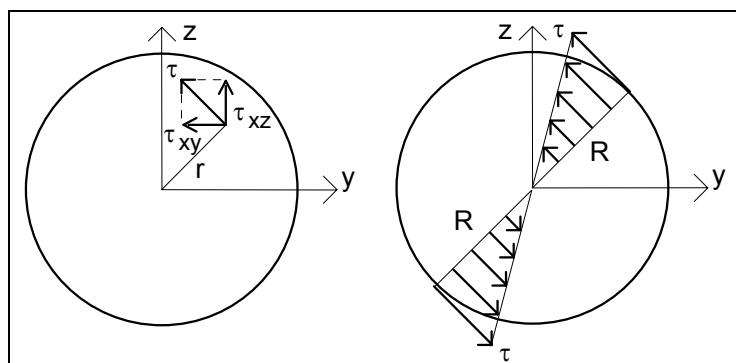
$$\varphi(y, z) \equiv 0$$

★ funkcje przemieszczeń

$$u \equiv 0 \quad ; \quad v = -\frac{M_s}{G I_s} xz \quad ; \quad w = \frac{M_s}{G I_s} xy$$

**WNIOSEK:** przekrój kołowy nie ulega deplanacji

★ naprężenia



$$\tau_{xy} = -\frac{M_s}{I_s} z \quad ; \quad \tau_{xz} = \frac{M_s}{I_s} y$$

↓

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{M_s}{I_s} r$$

★ kierunek wektora naprężenia

$$\bar{\tau}(0, \tau_{xy}, \tau_{xz}) \quad ; \quad \bar{v}(0, y/r, z/r) \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau} \circ \bar{v} = 0$$

**WNIOSEK:** wektor naprężenia stycznego jest prostopadły do promienia wodzącego punktu

★ naprężenie maksymalne

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{I_s} R$$

$$I_s = \iint_A (y^2 + z^2) dA \stackrel{\text{def}}{=} I_o = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}$$

★ warunki projektowania

1. warunek wytrzymałościowy

$$\tau_{\max} \leq R_t$$

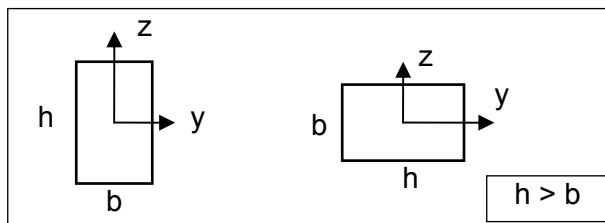
$$\frac{M_s}{W_o} \leq R_t$$

$$W_o = \frac{I_o}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

2. warunek geometryczny

$$\theta_{\max} \leq \theta_{\text{dop}}$$

$$\frac{M_s}{G I_o} \leq \theta_{\text{dop}}$$

**4. SKRĘCANIE PRĘTA O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM**

- ★ warunki brzegowe na krawędziach  $y = \pm b/2$  ( $\alpha_{vy} = \pm 1, \alpha_{vz} = 0$ )

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) (\pm 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z$$

- ★ warunki brzegowe na krawędziach  $z = \pm h/2$  ( $\alpha_{vy} = 0, \alpha_{vz} = \pm 1$ )

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) (\pm 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -y$$

- ★ zagadnienie Neumanna

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad + \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -y \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z \quad + \quad \varphi(0,0,0) = 0$$

**Szkic rozwiązania**

- wprowadzamy funkcję

$$\vartheta(y, z) = y z - \varphi(y, z)$$

- zagadnienie Neumanna

$$\nabla^2 \vartheta = 0 \quad + \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 2y \quad ; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \quad + \quad \vartheta(0,0,0) = 0$$

- przyjmujemy funkcję  $\vartheta$  w postaci szeregu

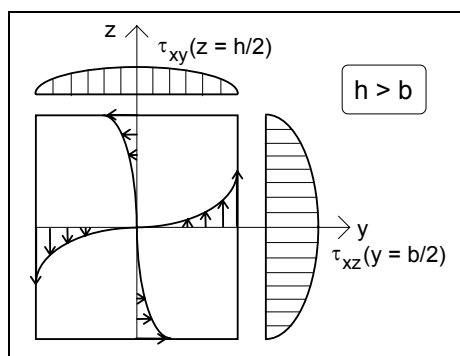
$$\vartheta(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) g_n(z)$$

- obliczenia prowadzą do rezultatu

$$\varphi(y, z) = y z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{k_n \cosh \frac{h}{2} k_n} \operatorname{sink}_n y \operatorname{cosh} k_n z$$

$$B_n = (-1)^n \frac{8b}{(2n+1)^2 \pi^2} \quad ; \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}$$

- ★ rozkład naprężeń stycznych



$$\tau_{\max} = \tau_{xz}(b/2)$$

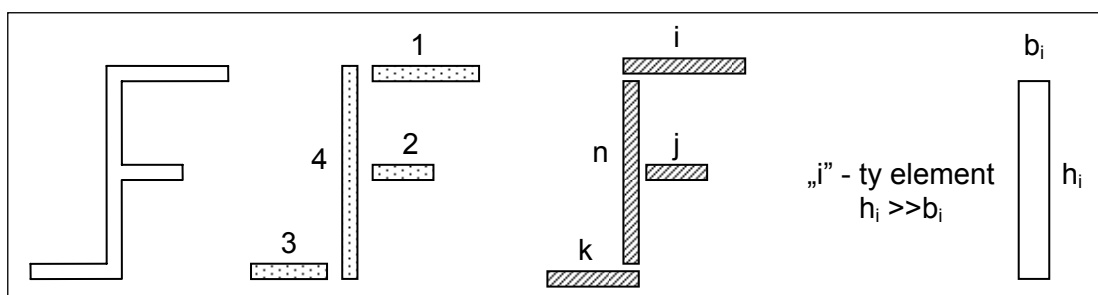
max. napr. styczne

w połowie dłuższego boku

- ★ moment bezwładności na skręcanie  $I_s = \beta \left( \frac{h}{b} \right) h b^3$
- ★ wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu  $W_s = \alpha \left( \frac{h}{b} \right) h b^2$
- ★ warunki projektowania
  1. warunek wytrzymałościowy  $\tau_{\max} \leq R_t \Rightarrow \boxed{\frac{M_s}{W_s} \leq R_t}$
  2. warunek geometryczny  $\theta_{\max} \leq \theta_{\text{dop}} \Rightarrow \boxed{\frac{M_s}{G I_s} \leq \theta_{\text{dop}}}$

## 5. PRZYBLIŻONE ROZWIĄZANIE SKRĘCANEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO

### Pręty o profilu otwartym



#### ★ Założenia :

1. Jednostkowy kąt skręcenia każdej części jest taki sam i równy jednostkowemu kątowi skręcenia całego przekroju

$$\theta = \frac{M_s}{G I_s} \Rightarrow \theta = \theta_i = \frac{M_{si}}{G I_{si}} = \frac{M_{si}}{G \beta_i h_i b_i^3}$$

2. Całkowity moment skręcający jest sumą momentów skręcających poszczególne części przekroju

$$M_s = \sum_{i=1}^n M_{si} = \sum_{i=1}^n \theta G I_{si} = \theta G \sum_{i=1}^n \beta_i h_i b_i^3$$

$$\boxed{I_s = \sum_{i=1}^n \beta_i h_i b_i^3}$$

#### ★ maksymalne naprężenie styczne

$$\max \tau_i = \tau_{i \max} = \frac{M_{si}}{W_{si}} \Rightarrow \boxed{\tau_{i \max} = \frac{M_s}{I_s} \frac{\beta_i}{\alpha_i} b_i}$$

- ★ uproszczenie dla przekrojów o częściach składowych spełniających warunek  $h_i \geq 5 b_i$

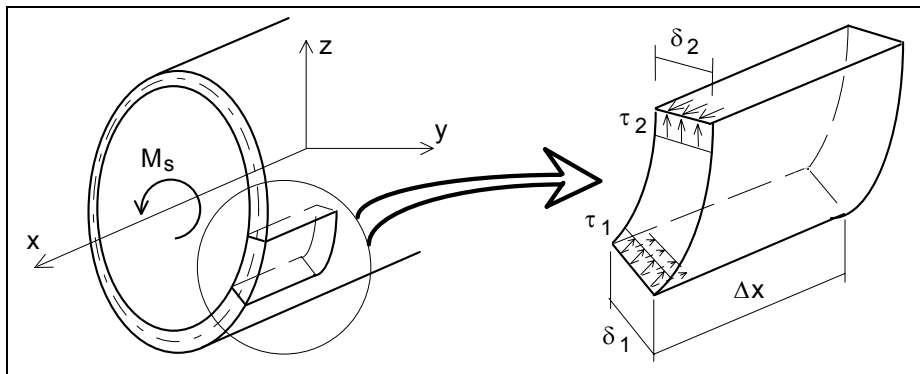
$$\alpha_i = \beta_i$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_s}{I_s} b_{\max}}$$

Pręty o profilu zamkniętym

★ Założenie :

1. Rozkład naprężeń stycznych na grubości ścianki jest równomierny

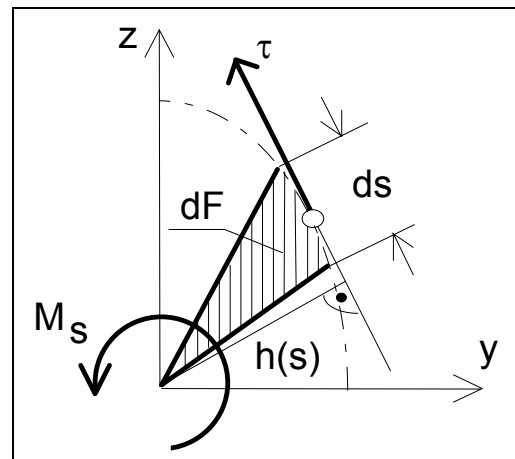
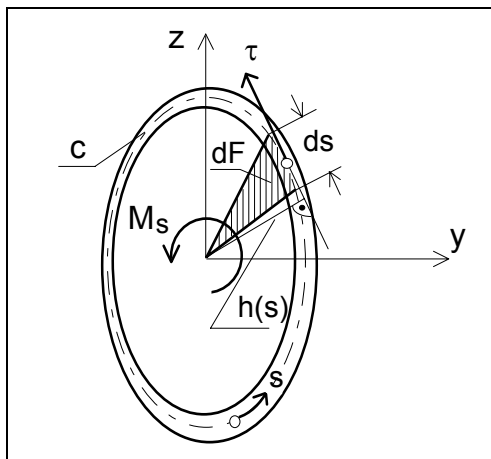


★ Równowaga sił w kierunku osi x

$$\tau_1 \delta_1 \Delta x - \tau_2 \delta_2 \Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$$

$$\tau \delta = \text{const.}$$

★ Warunek równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych



$$M_s = \oint_c dP h(s) = \oint_c \tau \delta h(s) ds$$

$$dF = 1/2 h(s) ds$$

$$M_s = \tau \delta \oint_c 2 dF = 2 \tau \delta F$$

F - pole obszaru ograniczonego linią środkową "c"

★ Naprężenie styczne

$$\tau = \frac{M_s}{2 \delta F}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2 F \delta_{\min}}$$