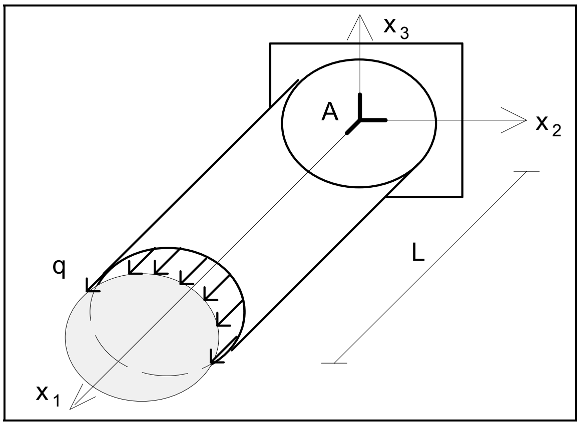
## 1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA TZW."CZYSTEGO ROZCIĄGANIA"




- pręt pryzmatyczny, utwierdzony "punktowo w pkt. A (0,0,0)
- $x_1$ - oś podłużna pręta, $x_2$, $x_3$ - osie centralne przekroju
- obciążenie zewnętrzne: denko $\overline{q}\left(q,0,0\right)$ $q=\mathrm{const}$

  pobocznica $\overline{q}\left(0,0,0\right)$
- siły masowe $\overline{P}\left(0,0,0\right)$

**ZADANIE:** wyznaczyć tensor napręż. $T_{\sigma}$, tensor odkszt. $T_{\varepsilon}$ i wektor przemieszczenia $\overline{u}$.

## 2. ROZWIĄZANIE

### 2.1. Komplet równań TS

$$\sigma_{ij,j}=0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_{ij}-\nu\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right] \tag{3}$$

\+ **statyczne war. brzegowe** $q_{\nu i}=\sigma_{ij}\,\alpha_{\nu j}$

denko $x_1 = L$, $\overline{\nu}\left(1,0,0\right)$

$$\begin{cases} q=\sigma_{11}\times 1 \\ 0=\sigma_{21}\times 1 \\ 0=\sigma_{31}\times 1 \end{cases} \tag{4a}$$

pobocznica $\overline{\nu}\left(0,\alpha_{\nu 2}\neq 0,\alpha_{\nu 3}\neq 0\right)$

$$\begin{cases} 0=\sigma_{12}\,\alpha_{\nu 2}+\sigma_{13}\,\alpha_{\nu 3} \\ 0=\sigma_{22}\,\alpha_{\nu 2}+\sigma_{23}\,\alpha_{\nu 3} \\ 0=\sigma_{32}\,\alpha_{\nu 2}+\sigma_{33}\,\alpha_{\nu 3} \end{cases} \tag{4b}$$

\+ **kinematyczne war. brzegowe** w pkt. utwierdzenia A (0, 0,0)

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}=0 \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}=0 \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}=0 \end{cases}$$

### 2.2. Podejście statyczne do zagadnienia brzegowego

"wymyślić" $T_\sigma$
sprawdzić stat. war. brzeg.
sprawdzić równ. Naviera

wyznaczyć odkształcenia
$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})$
sprawdzić równ. nierozdz. odkszt.

wyznaczyć przemieszczenia
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
+ kinematyczne war. brzegowe

✶ **- macierz naprężenia**

$$\begin{aligned}\overline{S}(W_{II}) &= \overline{S}(Z_{I})\\ \overline{M}(W_{II}) &= \overline{M}(Z_{I})\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} q & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

Macierz naprężenia (6) spełnia równania równowagi (1) i statyczne warunki brzegowe (4)

✶ **- macierz odkształceń (r.Hooke'a)**

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] = \frac{1}{E}q$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] = -\frac{\nu}{E}q$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] = -\frac{\nu}{E}q$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{12}\right] = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/E & 0 & 0\\ 0 & -\nu/E & 0\\ 0 & 0 & -\nu/E\end{pmatrix} \times q \tag{7}$$

Macierz (7) spełnia równania nierozdzielności odkształceń, gdyż

$$\varepsilon_{ij} = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_{ij,kl} \equiv 0$$

✶ **- funkcje przemieszczeń (rów. Cauchy'ego)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{q}{E} & \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\nu\frac{q}{E} & \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0\\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -\nu\frac{q}{E} & \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Ukł. (8) to układ 6 równań różniczkowych cząstkowych liniowych I rzędu

$$\text{" CORN"} = \text{"CORJ"} + \text{"CSRN"} \quad \Rightarrow \quad u_i = u_i^o + u_i^s$$

Całka ogólna równania jednorodnego opisuje przemieszczenia punktów ciała sztywnego (rów. jednorodne tzn. $\varepsilon_{ij}$ =0, a to oznacza brak odkształceń ciała, czyli zarazem ciało sztywne). W każdym zagadnieniu teorii sprężystości całka ogólna jest identyczna.

- całka ogólna

$$u_1^o\left(x_2, x_3\right) = a + b\,x_2 + c\,x_3$$

$$u_2^o\left(x_1, x_3\right) = d - b\,x_1 + f\,x_3$$

$$u_3^o\left(x_1, x_2\right) = g - c\,x_1 - f\,x_2$$

- całka szczególna równania niejednorodnego : metoda przewidywania
- funkcje przemieszczeń

$$u_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{q}{E} x_1 + a + b\,x_2 + c\,x_3$$

$$u_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = -\nu \frac{q}{E} x_2 + d - b\,x_1 + f\,x_3 \qquad (9)$$

$$u_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = -\nu \frac{q}{E} x_3 + g - c\,x_1 - f\,x_2$$

Stałe całkowania a, b, c, d, f, g należy wyznaczyć z kinematycznych war. brzegowych (5).

$$a = b = c = d = f = g = 0$$

$$u_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{q}{E} x_1$$

$$u_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = -\nu \frac{q}{E} x_2 \qquad (10)$$

$$u_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = -\nu \frac{q}{E} x_3$$

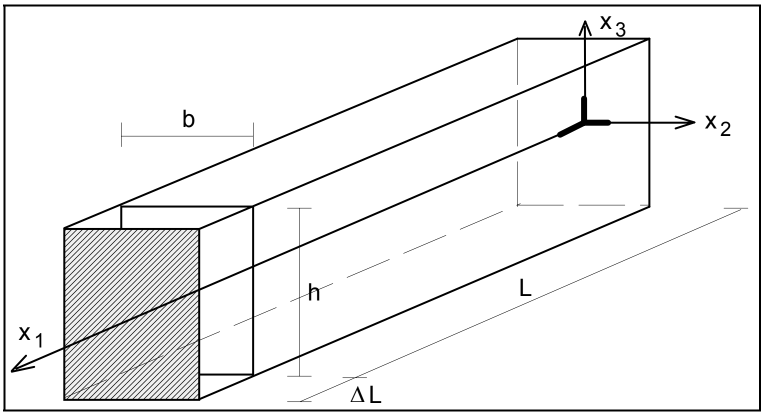
**WNIOSEK :** Macierz naprężenia (6) macierz odkształcenia (7) i wektor przemieszczenia (10) spełniają ściśle komplet równań teorii sprężystości wraz ze statycznymi i kinematycznymi war. brzegowymi. Są więc **ścisłym rozwiązaniem zagadnienia czystego rozciągania** dla pręta stanowiącego przedmiot analizy.

## 3. ANALIZA ROZWIĄZANIA

1. Stan naprężenia opisany przez macierz (6) to **jednorodny** (identyczny w każdym punkcie ciała) i **jednoosiowy** (tylko jeden element macierzy naprężenia jest niezerowy) **stan naprężenia.**
2. Diagonalna postać macierzy naprężenia świadczy o tym, że jedyne niezerowe naprężenie $\sigma_{11}$ **jest maksymalnym naprężeniem normalnym** spośród wszystkich możliwych odpowiadających dowolnym płaszczyznom przekroju pręta.
3. Stan odkształcenia opisany przez macierz (7) to **jednorodny** (identyczny w każdym punkcie ciała) i **trójosiowy** (niezerowe składowe w 3 wzajemnie prostopadłych kierunkach) **stan odkształcenia.**
4. Diagonalna postać macierzy odkształcenia świadczy, że czystemu rozciąganiu towarzyszą jedynie odkształcenia liniowe. Włókna równoległe do osi $x_1$ wydłużają się najbardziej, a równoległe do $x_2$ i $x_3$ najmniej.

5. Analiza deformacji pręta.

✶ wydłużenie pręta



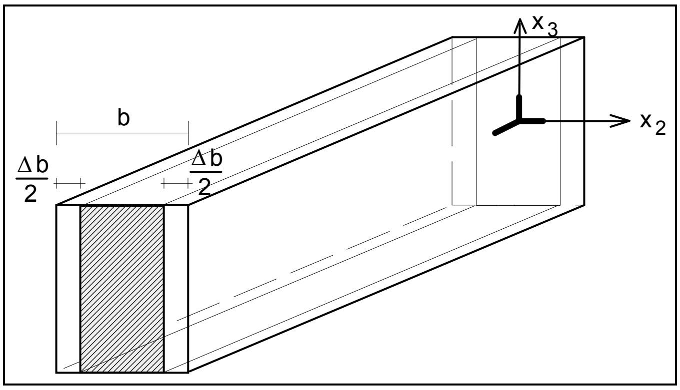

$$u_1 = \frac{q}{E} x_1$$

$$u_1\left(x_1 = L\right) \stackrel{def}{=} \Delta L = \frac{q}{E} L$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{q}{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}}$$

✶ przemieszczenia punktów przekroju poprzecznego (na przykładzie przekroju prostokątnego o wymiarach początkowych b x h)

Funkcje przemieszczeń $u_2$ i $u_3$ nie zależą od zmiennej $x_1$ (tzn. położenia przekroju poprzecznego), tak więc deformacja każdego przekroju poprzecznego jest identyczna.

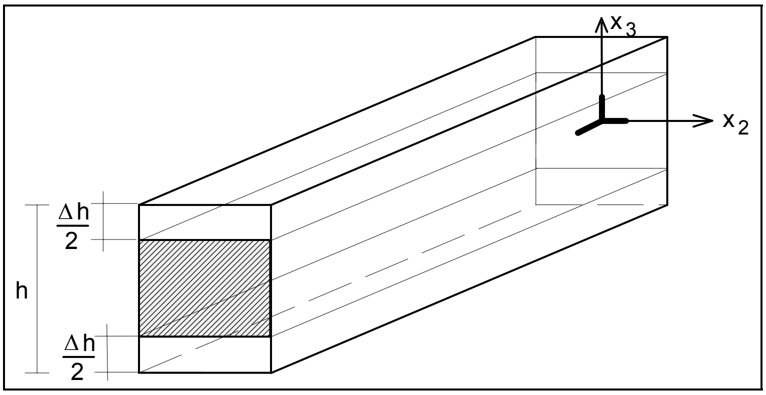



$$u_2 = -\nu \frac{q}{E} x_2$$

$$u_2\left(x_2 = \pm b/2\right) = \mp \nu \frac{q}{E} \frac{b}{2}$$

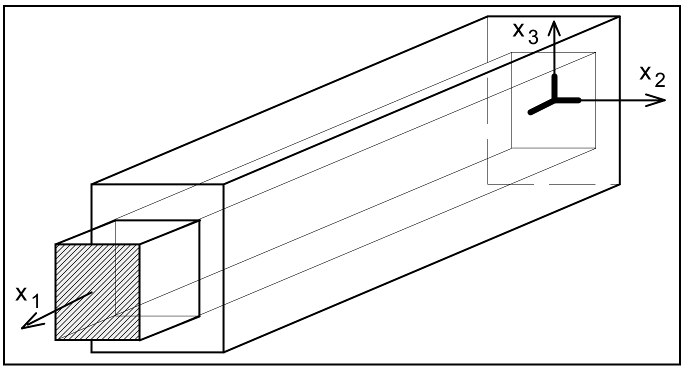
$$\Delta b = \left|u_2\left(\frac{b}{2}\right)\right| + \left|u_2\left(\frac{-b}{2}\right)\right| = \nu \frac{q}{E} b$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \nu \frac{q}{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_2 = -\frac{\Delta b}{b}}$$




$$u_3 = -\nu \frac{q}{E} x_3$$

$$\boxed{\varepsilon_3 = -\frac{\Delta h}{h}}$$

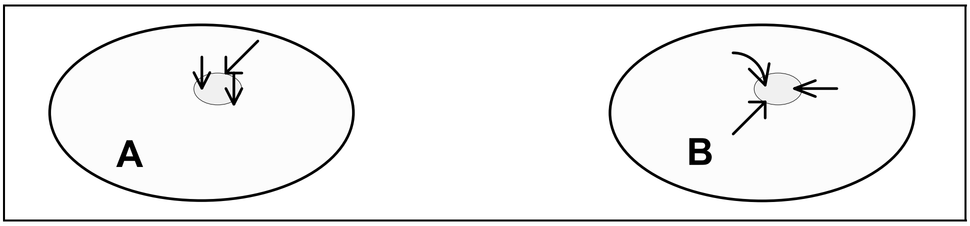


## 4. INNE WIĘZY KINEMATYCZNE DLA PRĘTA PODDANEGO CZYSTEMU ROZCIĄGANIU

1. Jeżeli więzy są takie, że narzucają 6 warunków, to tensory naprężenia (6) i odkształcenia (7) nadal są ścisłym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego. Funkcje przemieszczeń są opisane równaniami (9), z których należy wyznaczyć uprzednio 6 stałych z 6 war. kinem.
2. Jeżeli więzy są takie, że narzucają mniej niż 6 warunków, to pręt jest układem geometrycznie zmiennym.
3. Jeżeli więzy są takie, że narzucają więcej niż 6 warunków, to rów. Cauchy'ego muszą prowadzić do innych "prawych" stron niż w ukł. (8), bowiem całka szczególna musi "wprowadzić" dodatkowe stałe (te powyżej 6 "standardowych"). "Prawe" strony to odkształcenia, które wynikają z przyjętej macierzy naprężenia. Tak więc macierz naprężenia musi być przyjęta odmiennie od tej w postaci (6).

## 5. INNE PRZYPADKI OBCIĄŻENIA ROZCIĄGAJĄCEGO (PROSTE ROZCIĄGANIE)

### 5.1. Zasada de Saint-Venant'a




✶ znane jest rozwiązanie dla układu sił jak na rys. A

✶ obciążamy ciało innym układem sił (rys. B), ale statycznie równoważnym (tzn. $\mathbf{S_A} \equiv \mathbf{S_A}$ ; $\mathbf{M_A} \equiv \mathbf{M_A}$ )

**Zasada de Saint-Venanta** : $\mathbf{T}_\sigma$, $\mathbf{T}_\varepsilon$, $\mathbf{u}$ nie zmieniają się z wyjątkiem niewielkiego obszaru wokół miejsca przyłożenia obciążenia.

### 5.2. Redukcja obciążenia przy czystym rozciąganiu do środka ciężkości przekroju

$$\bar{q}(q,0,0) \qquad \bar{r}(0,x_2,x_3)$$

$$S_1 = \iint_A q\,dA = q\,A \qquad M_1 = \iint_A (x_2\,0 - x_3\,0)\,dA = 0$$

$$S_2 = \iint_A 0\,dA = 0 \qquad M_2 = \iint_A x_3\,q\,dA = q\iint_A x_3\,A = 0$$

$$S_3 = \iint_A 0\,dA = 0 \qquad M_3 = \iint_A -x_2\,q\,dA = -q\iint_A x_2\,dA = 0$$

**WNIOSEK:** obciążenie przy czystym rozciąganiu redukuje się w środku ciężk. przekroju poprzecz. do wypadkowej **N** (q A, 0, 0), a zatem do siły osiowej (podłużnej).

**DEFINICJA:** każdy przypadek takiego obciążenia pręta, które redukuje się do siły osiowej nazywamy prostym rozciąganiem lub krótko **rozciąganiem.**

### 5.3. Składowe tensora naprężenia i odkształcenia w prostym rozciąganiu

$$\sigma_{11} \equiv \sigma_x = \frac{N}{A} \qquad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{11} \equiv \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA} \qquad \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E} = -\nu\,\frac{N}{EA} \qquad \tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$$