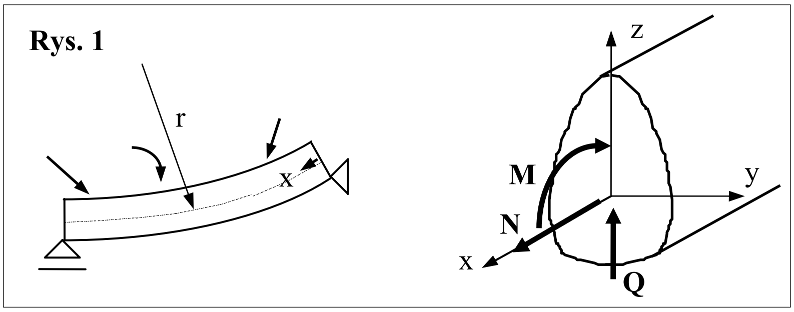
1. DEFINICJA

Prętem silnie zakrzywionym nazywamy pręt, którego oś jest płaską krzywą, a stosunek wymiaru przekroju poprzecznego „h” (leżącego w płaszczyźnie krzywizny) do promienia krzywizny osi ciężkości „r(x)” pręta spełnia warunek

$$h/r > \tfrac{1}{6}$$

2. ZAŁOŻENIA

* y, z - osie główne centralne przekroju poprzecznego
* oś „z” leżąca w płaszczyźnie osi pręta jest osią symetrii przekroju
* obciążenie leży w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny osi pręta i jest symetryczne wzg. osi „z”
* jedynymi niezerowymi naprężeniami są σ_x i τ_{xz}
* obowiązuje hipoteza Bernouliego (hipoteza płaskich przekrojów)



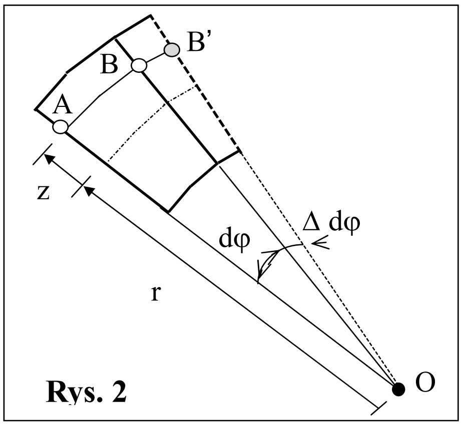
3. NAPRĘŻENIE NORMALNE σ_x

* zasada superpozycji

$$\sigma_x = \sigma_{xN} + \sigma_{xM}$$

3.1. Naprężenia od siły osiowej N

* odkształcenie polega na zmianie kąta wierzchołkowego o $\Delta\, d\varphi$, nie zmienia się krzywizna osi pręta



$$\overline{AB} = ds = (r + z)\, d\varphi \tag{2}$$

$$\overline{AB'} = ds' = (r + z)\,(d\varphi + \Delta\, d\varphi) \tag{3}$$

$$\overline{BB'} = ds' - ds = \Delta\, ds = (r + z)\, \Delta\, d\varphi \tag{4}$$

$$\varepsilon_{xN} = \frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} = \text{const.}\,(z) \tag{5}$$

$$\varepsilon_{xN} = \sigma_{xN}/E \qquad \left(\sigma_y \cong 0, \sigma_z \cong 0\right)$$

$$\sigma_{xN} = E\, \varepsilon_{xN} = C \tag{6}$$

* z twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych

$$N = \iint_A \sigma_{xN}\, dA \tag{7}$$

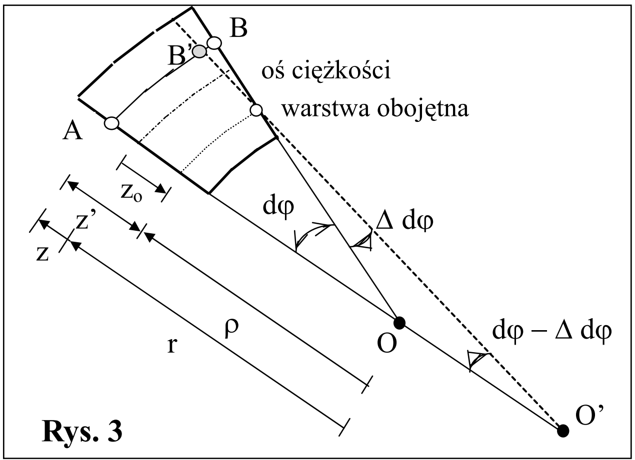
$$\sigma_{xN} = \frac{N}{A} \tag{8}$$

3.2. Naprężenia od momentu zginającego M

* odkształcenie polega na zmianie krzywizny pręta (obrót przekroju wokół osi obojętnej) - rysunek 3

Oznaczenia :

ρ - promień krzywizny osi obojętnej
z_o - położenie osi obojętnej wzg. osi ciężkości
z' - odległość dowolnego włókna AB od warstwy obojętnej
r - promień krzywizny osi obojętnej
z - współrzędna dowolnego włókna AB (liczona od osi ciężkości)



Rys. 3

$$\overline{AB} = ds = (\rho + z')\, d\varphi \tag{9}$$

$$\overline{BB'} = \Delta\, ds = -z'\, \Delta\, d\varphi \tag{10}$$

$$\varepsilon_{xM} = \frac{\Delta\, ds}{ds} = -\frac{z'}{\rho + z'}\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} \tag{11}$$

$$\sigma_{xM} = E\,\varepsilon_{xM} = -E\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi}\frac{z'}{\rho + z'} \tag{12}$$

$$-E\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} = \text{const} = K$$

$$\sigma_{xM} = K\frac{z'}{\rho + z'} \tag{13}$$

$$\sigma_{xM} = K\frac{r + z - \rho}{\rho + r + z - \rho} = K\frac{r + z - \rho}{r + z} \tag{13a}$$

* z twierdzenia o równoważności układu sił zewn. i wewn. zapisanego w osiach głównych centralnych

$$N = \iint_A \sigma_{xM}\, dA = K\iint_A \frac{z'}{\rho + z'}\, dA = 0 \tag{14)}$$

$$M = \iint_A \sigma_{xM}\, z\, dA = K\iint_A \left(1 - \frac{\rho}{r + z}\right) z\, dA \tag{15}$$

lub też po wykorzystaniu osi obojętnej

$$M = \iint_A \sigma_{xM}\, z'\, dA = K\iint_A \frac{z'^2}{\rho + z'}\, dA \tag{15a}$$

Przekształćmy równanie (15)

$$M = K\iint_A \left(1 - \frac{\rho}{r + z}\right) z\, dA = K\iint_A z\, dA - K\rho\iint_A \frac{z}{r + z}\, dA = 0 - K\rho\iint_A \frac{z}{r}\frac{r + z - z}{r + z}\, dA =$$

$$= -K\rho\iint_A \frac{zr + z^2 - z^2}{r(r + z)}\, dA = -K\rho\iint_A \frac{z}{r}\, dA + K\rho\iint_A \frac{z^2}{r(r + z)}\, dA = 0 + K\rho\frac{1}{r^2}\iint_A \frac{r}{r + z} z^2\, dA$$

$$J^* \overset{\text{def}}{=} \iint_A \frac{r}{r + z} z^2\, dA$$

$$M = K\rho\frac{J^*}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{M}{J^*\rho} r^2 \tag{16}$$

Przekształćmy także równanie (15a). W wyniku podzielenia wielomianów występujących w funkcji podcałkowej otrzymujemy

$$\frac{z'^2}{\rho + z'} = z' - \frac{z'\rho}{\rho + z'} \tag{17}$$

Wstawiając (17) do (15a) otrzymujemy

$$M = K \iint_A z'\, dA - K\rho \iint_A \frac{z'}{\rho + z'}\, dA = K\, S_{yo} - K\rho \iint_A \frac{z'}{\rho + z'} \tag{18}$$

S_{y0} oznacza moment statyczny przekroju względem osi obojętnej ($\neq 0$, gdyż oś obojętna nie pokrywa się z osią ciężkości) i wynosi : $S_{yo} = A\ z_o$

Ostatnia całka występująca w (18) wynosi zero - wynika to wprost z warunku równoważności (14). Stad ostatecznie mamy następujące równanie

$$M = K\,A\,z_o \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{M}{A\,z_o} = \frac{M}{A\,(r-\rho)} \tag{19}$$

Możemy teraz wyznaczyć ze wzoru (13a) naprężenia wywołane działaniem momentu zginającego.

$$\sigma_{xM} = \frac{M}{A\,(r-\rho)}\,\frac{r+z-\rho}{r+z}$$

Pomnóżmy licznik i mianownik przez r , a następnie dodajmy i odejmijmy od licznika iloczyn ρ z. Otrzymujemy wówczas:

$$\sigma_{xM} = \frac{M}{A\,(r-\rho)\,r}\,\frac{r^2 + r\,z - r\,\rho + \rho\,z - \rho\,z}{r+z} = \frac{M\left[r\,(r-\rho) + z\,(r-\rho) + \rho\,z\right]}{A\,r\,(r-\rho)\,(r+z)} =$$

$$= \frac{M\left[(r-\rho)\,(r+z) + \rho\,z\right]}{A\,r\,(r-\rho)\,(r+z)} = \frac{M}{A\,r} + \frac{\rho}{A\,(r-\rho)\,r^2}\,M\,r\,\frac{z}{r+z} \tag{20}$$

Przyrównując wartość stałej K z równania (16) do tej z równania (19) otrzymujemy

$$\frac{M}{A\,(r-\rho)} = \frac{M}{J^*\,\rho}\,r^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho}{A\,(r-\rho)\,r^2} = \frac{1}{J^*} \tag{21}$$

Po wstawieniu (21) do (20) mamy

$$\sigma_{xM} = \frac{M}{A\,r} + \frac{M\,r}{J^*}\,\frac{z}{r+z} \tag{22}$$

3.3. Całkowite naprężenia normalne

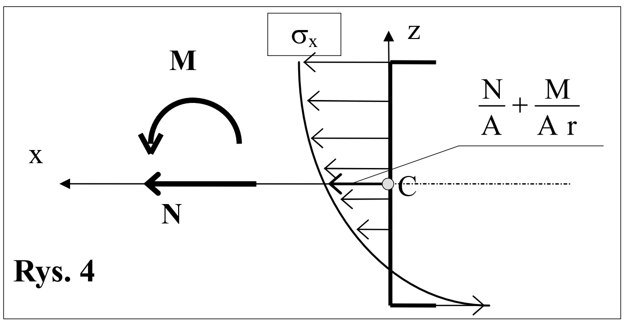
Całkowite naprężenie normalne będące sumą naprężenia wywołanego siłą osiową N i momentem zginającym M otrzymujemy przez wysumowanie (8) i (22). Ostatecznie otrzymujemy:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{A\,r(x)} + \frac{M(x)\,r(x)}{J^*}\,\frac{z}{r(x)+z}} \tag{23}$$

$$\boxed{J^* \overset{\text{def}}{=} \iint_A \frac{r(x)}{r(x)+z}\,z^2\,dA} \tag{24}$$

Znaki I i III członu równania (23) ustala się jak w klasycznym mimośrodowym rozciąganiu pręta prostego. Przy ustalaniu znaku członu II można posługiwać się „regułką” mówiącą, że jeżeli moment M powoduje wzrost krzywizny pręta to znak jest „+”, jeżeli natomiast moment prostuje pręt to znak jest „-” .

Z równania (23) widać, że rozkład naprężeń - rysunek 4 - normalnych jest **hiperboliczny** , mimo że korzystaliśmy z równań liniowej teorii sprężystości. Jest to spowodowane krzywoliniowym kształtem pręta.



Rys. 4

3.4. „Moment bezwładności” J^*

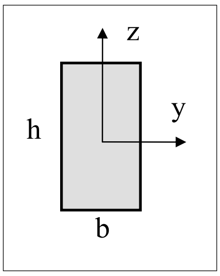
Całka J^* - równanie (24) - może być przedstawiona w postaci zamkniętej tylko dla prostych kształtów jak np. prostokąt i trapez. We wszystkich innych przypadkach należy skorzystać z rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg potęgowy i całkować wyraz po wyrazie.

$$J^* = \iint_A z^2 \frac{1}{1+\dfrac{z}{r(x)}} dA = \iint_A z^2 \left(1 - \frac{z}{r} + \frac{z^2}{r^2} - \frac{z^3}{r^3} + \ldots\right) dA =$$

$$= \iint_A z^2\, dA - \frac{1}{r}\iint_A z^3\, dA + \frac{1}{r^2}\iint_A z^4\, dA - \frac{1}{r^3}\iint_A z^4\, dA + \ldots \tag{25}$$

3.5. Przekrój prostokątny

Całka J^* dla przekroju prostokątnego wynosi: $$J^* = b\, r^2 \left(r \ln\frac{2r+h}{2r-h} - h \right)$$



wówczas $$\frac{M r}{J^*} = \frac{M r}{b r^2 \left(r \ln\dfrac{2r+h}{2r-h} - h \right)} = \frac{M}{b h r \left(\dfrac{r}{h} \ln\dfrac{2r+h}{2r-h} - 1 \right)} = \frac{M}{A r \psi}$$

$$\psi = \frac{r}{h} \ln\frac{2r+h}{2r-h} - 1 \tag{26}$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\, r} + \frac{1}{\psi}\frac{M}{A\, r}\frac{z}{r+z}} \tag{27}$$

∗ **Analiza naprężeń w pręcie o przekroju prostokątnym**

r / h	1	2	4	6
J^* / J_y	1.183	1.039	1.009	1.004

$$J_y = \frac{b h^3}{12}$$

Widać, że dla stosunku $(r\ /\ h) \geq 6$ moment J^* jest praktycznie równy „klasycznemu” momentowi bezwładności dla prostokąta J_y.

Naprężenie normalne ma wówczas postać

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\, r} + \frac{M r}{J_y}\frac{z}{r+z} \tag{28}$$

Zakładając, że $r \to \infty$, co oznacza że pręt zakrzywiony staje się prętem prostym otrzymujemy następujące warunki:

$$\frac{M}{A\, r} \to 0$$

$$\frac{r z}{r+z} = \frac{z}{1+\dfrac{z}{r}} \to z$$

Naprężenie normalne określone jest teraz zależnością:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{J_y} z \tag{29}$$

Otrzymaliśmy zatem wzór jak w klasycznym zadaniu pręta prostego mimośrodowo rozciąganego.

W praktyce już przy stosunku **(r / h) ≥ 6** pręty **zakrzywione** liczy się **jak** pręty **proste**. Jako dowód potraktujmy oszacowanie błędu, jaki popełnia się przy takim sposobie potraktowania pręta zakrzywionego.

* pręt prosty

$$\sigma_x^{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{J_y}\frac{h}{2} = \frac{N}{A} + \frac{12\,M}{b\,h^3}\frac{h}{2} = \frac{N}{A} + 6\,\frac{M}{A\,h}$$

$$\sigma_x^{min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{J_y}\frac{h}{2} = \frac{N}{A} - 6\,\frac{M}{A\,h}$$

* pręt zakrzywiony

$$\sigma_x^{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\,6\,h} + \frac{12\,M}{b\,h^3}\,\frac{6\,h\,\frac{h}{2}}{6\,h + \frac{h}{2}} = \frac{N}{A} + 5.705\,\frac{M}{A\,h}$$

$$\sigma_x^{min} = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\,6\,h} + \frac{12\,M}{b\,h^3}\,\frac{6\,h\left(-\frac{h}{2}\right)}{6\,h - \frac{h}{2}} = \frac{N}{A} - 6.379\,\frac{M}{A\,h}$$

* **WNIOSEK :** zastosowanie teorii pręta prostego daje oszacowanie naprężeń z nadmiarem (a więc bezpieczne) ok. 4.9% dla naprężenia maksymalnego i ok. 6.3% dla naprężenia minimalnego.