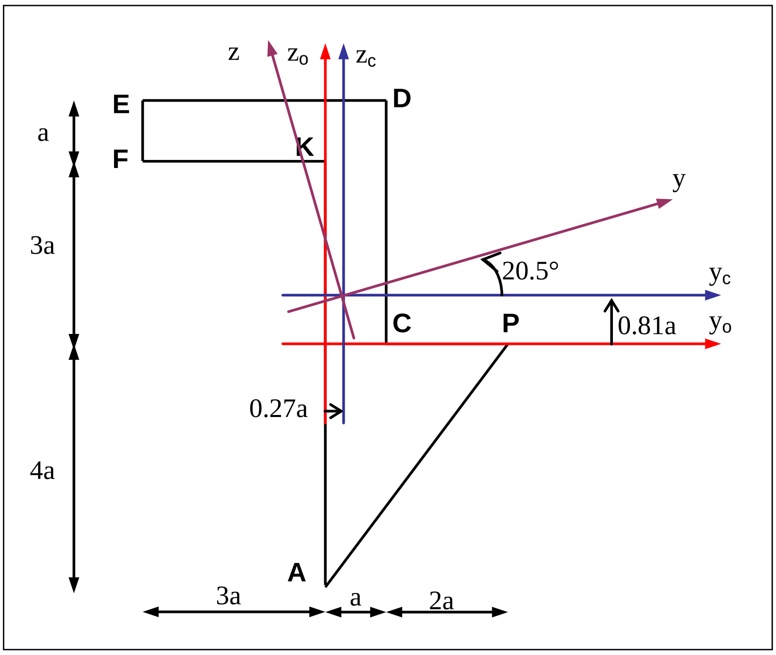
ZADANIE: Wyznaczyć wymiar „a” przekroju mimośrodowo rozciąganego siłą P=300 kN. Wyznaczyć i narysować oś obojętną, rdzeń przekroju i bryłę naprężeń.



1. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI (w ukł. wyjściowym (y_o, z_o))

$$A = 4a^2 + 3a^2 + \tfrac{1}{2}\,3a\,4a = 13a^2$$

$$S_{yo} = 4a^2\,3.5a + 3a^2\,1.5a + 6a^2\left(-\tfrac{1}{3}4a\right) = 10.5a^3$$

$$S_{zo} = 4a^2(-a) + 3a^2\,0.5a + 6a^2\,\tfrac{1}{3}3a = 3.5a^3$$

$$y_c = \frac{3.5a^3}{13a^2} = 0.27\,a \qquad z_c = \frac{10.5a^3}{13a^2} = 0.81a$$

2. CENTRALNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI (w ukł. (y_c, z_c))

$$I_{yc} = \frac{4a\times a^3}{12} + 4a^2\times(3.5-0.81)^2\,a^2 + \frac{a\times(3a)^3}{12} + 3a^2\times(1.5-0.81)^2\,a^2 + $$
$$+\frac{3a\times(4a)^3}{36} + 6a^2\times\left(\frac{1}{3}4+0.81\right)^2 a^2 = 65.9\,a^4$$

$$I_{zc} = \frac{(4a)^3\times a}{12} + 4a^2\times(1.27)^2\,a^2 + \frac{a^3\times 3a}{12} + 3a^2\times(0.5-0.27)^2\,a^2 + $$
$$+\frac{4a\times(3a)^3}{36} + 6a^2\times\left(\frac{1}{3}3-0.27\right)^2 a^2 = 18.4\,a^4$$

$$I_{yczc} = 4a^2\times(3.5-0.81)^2\times(-1.27)a^2 + 3a^2\times(0.5-0.27)(1.5-0.81)a^2 + $$
$$+\frac{(4a)^2\times(3a)^2}{72} + 6a^2\times(1-0.27)a\times\left[-\left(\frac{4}{3}+0.81\right)\right]a = -20.6\,a^4$$

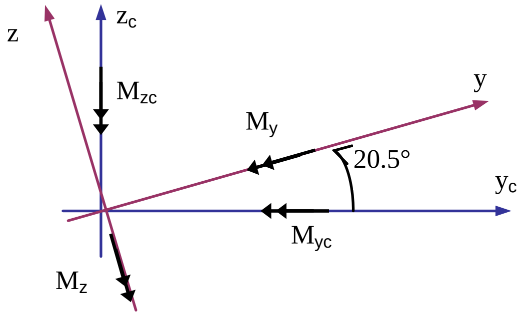
3. GŁÓWNE, CENTRALNE MOMENTY I OSIE BEZWŁADNOŚCI (ukł. (y, z))

$$I_{1,2} = \frac{65.9+18.4}{2}a^4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(65.9-18.4)^2 + 4\times(20.6)^2}\;a^4$$

$$I_1 = 73.6\,a^4 = I_y \qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{-20.6}{18.4-73.6} \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 = 20.5^\circ$$

$$I_2 = 10.7\,a^4 = I_z \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{-20.6}{18.4-10.7} \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 = -69.5^\circ$$

4. WYMIAROWANIE PRZEKROJU



$N = 300\ \text{kN}$

$M_{yc} = 300\times0.81\,a = 243\,a$

$M_{zc} = 300\times(3a - 0.27a) = 819\,a$

$M_y = 243a \times \cos 20.5° + 819a \times \sin 20.5° = 514.4\,a$

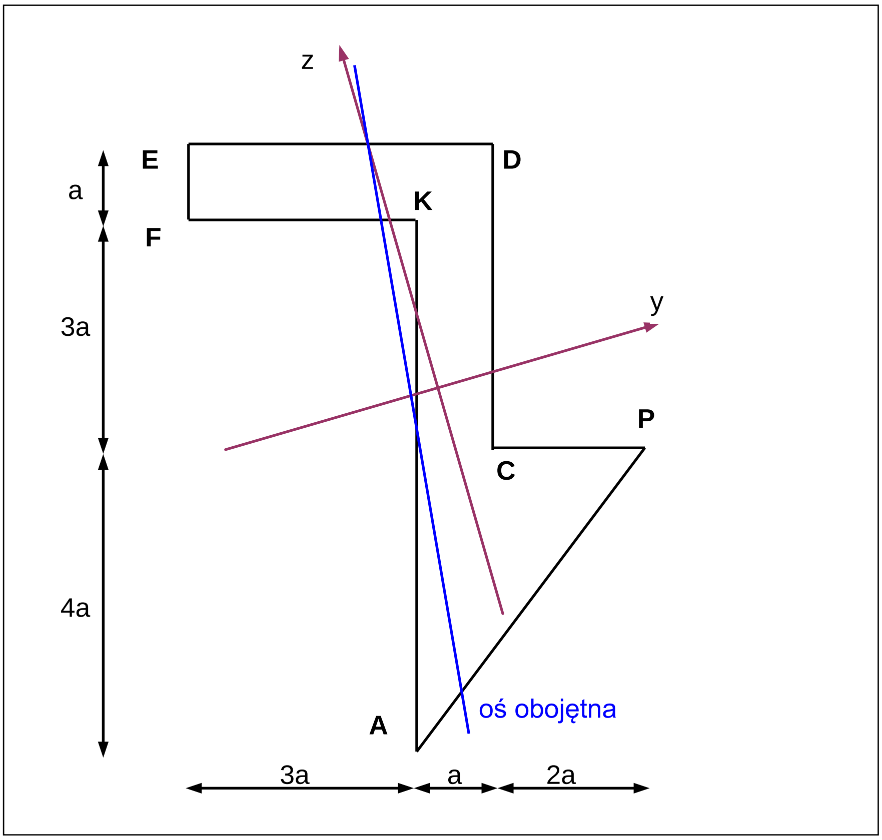
$M_z = 819a \times \cos 20.5° - 243a \times \sin 20.5° = 682.0\,a$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_x = \frac{300}{13a^2} - \frac{514.4a}{73.6a^4} z + \frac{682a}{10.7a^4} y = \frac{23.08}{a^2} - \frac{6.99}{a^3} z + \frac{63.74}{a^3} y$$

4.1. Oś obojętna

$$\sigma_x = \frac{23.08}{a^2} - \frac{6.99}{a^3} z + \frac{63.74}{a^3} y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{z}{3.3a} + \frac{y}{-0.362a} = 1$$



4.2. Maksymalne naprężenie normalne, wymiarowanie przekroju

Punktem najdalej położonym od osi obojętnej jest punkt P. W tym punkcie naprężenie normalne jest zatem największe.

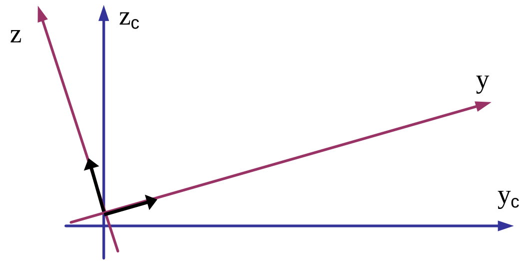
$$\sigma_x^{max} = \frac{23.08}{a^2} - \frac{6.99}{a^3} z^P + \frac{63.74}{a^3} y^P$$

W celu wyznaczenia współrzędnych punktu P (i wszystkich innych) w ukł. głównym, centralnym najwygodniej jest dokonać transformacji współrzędnych z układu (y_c, z_c).

$$a_i' = \alpha_{ik}\, a_k$$

$$\alpha_{ik} = \begin{bmatrix} \cos 20{,}5 & \sin 20{,}5 \\ -\sin 20{,}5 & \cos 20{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.937 & 0.35 \\ -0.35 & 0.937 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y^P \\ z^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.937 & 0.35 \\ -0.35 & 0.937 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.73\,a \\ -0.81a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.27\,a \\ -1.71a \end{Bmatrix}$$



$$\sigma_x^{max} = \frac{179.7}{a^2} \le R_o = 200 \times 10^3 \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{przyjęto } \mathbf{a = 3\ cm}$$

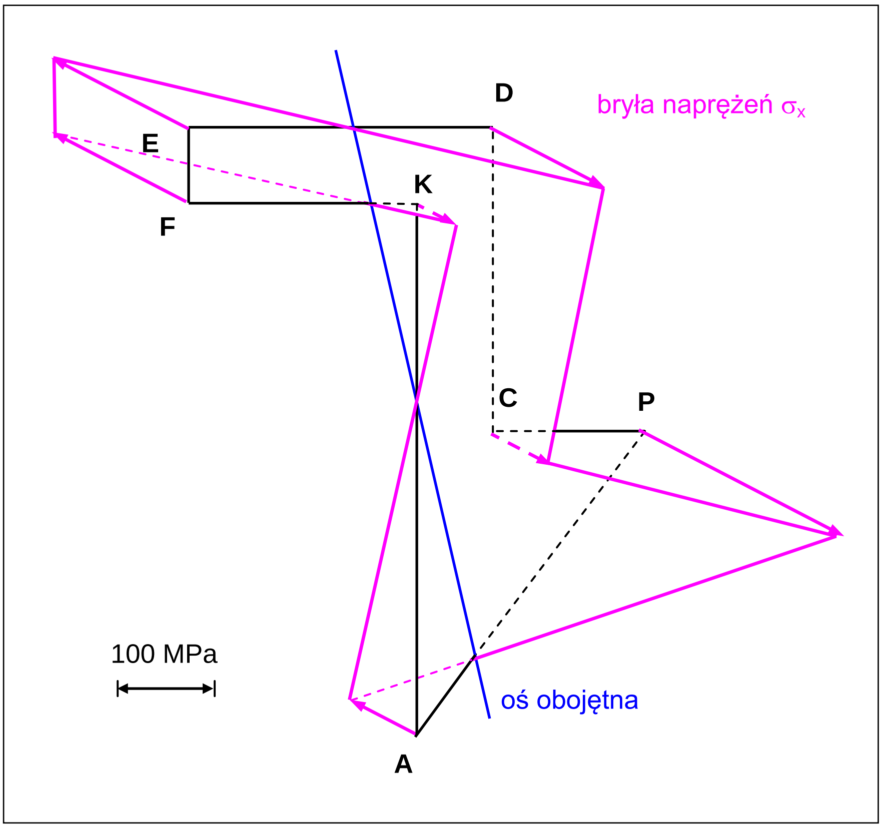
oś obojętna

$$\frac{z}{3{,}3 \times 3} + \frac{y}{-0{,}362 \times 3} = \frac{z}{9{,}9} + \frac{y}{-1{,}09} = 1 \quad [\text{cm}]$$

5. BRYŁA NAPRĘŻEŃ

$$\sigma_x = \frac{23.08}{0{,}03^2} - \frac{6.99}{0{,}03^3} z + \frac{63.74}{0{,}03^3} y = 25.6 - 259\, z + 2361\, y$$

Punkt	A	P	C	D	E	F	K
y [m]	- 0.058	0.068	0.012	0.054	- 0.058	- 0.069	0.015
z [m]	- 0.144	- 0.051	- 0.030	0.082	0.124	0.096	0.064
σ_x [MPa]	- 77.3	200.0	61.9	131.9	- 144.5	- 162.0	45.3



6. RDZEŃ PRZEKROJU

6.1. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty (ukł. (y, z)) $P_1(y_1, z_1)$ i $P_2(y_2, z_2)$

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1}(y - y_1)$$

6.2. Równanie osi obojętnej (ukł. (y, z))

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1 \qquad a_y = -\frac{i_z^2}{y_o} \quad ; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_o}$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{5962}{117} = 50.96\ \text{cm}^2 \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{867}{117} = 7.41\ \text{cm}^2$$

prosta AP

$$z + 14.4 = \frac{-5.1 + 14.4}{6.8 + 5.8}(y + 5.8) \Rightarrow \frac{y}{13.71} + \frac{z}{-10.12} = 1$$

$$a_y = 13.71 = -\frac{7.41}{y_o} \Rightarrow y_o = -0.54\ \text{cm}$$

$$a_z = -10.12 = -\frac{50.96}{z_o} \Rightarrow z_o = 5.04\ \text{cm} \Rightarrow$$ **P_1 (- 0.54 ; 5.04)**

prosta PD

$$z + 5.1 = \frac{8.2 + 5.1}{5.4 - 6.8}(y - 6.8) \Rightarrow \frac{y}{6.26} + \frac{z}{59.5} = 1$$

$$a_y = 6.26 = -\frac{7.41}{y_o} \Rightarrow y_o = -1.18\ \text{cm}$$

$$a_z = 59.52 = -\frac{50.96}{z_o} \Rightarrow z_o = -0.86\ \text{cm} \Rightarrow$$ **P_2 (- 1.18 ; - 0.86)**

prosta DE

$$z - 8.2 = \frac{12.4 - 8.2}{-5.8 - 5.4}(y - 5.4) \Rightarrow \frac{y}{27.27} + \frac{z}{10.23} = 1$$

$$a_y = 27.27 = -\frac{7.41}{y_o} \Rightarrow y_o = -0.27\ \text{cm}$$

$$a_z = 10.23 = -\frac{50.96}{z_o} \Rightarrow z_o = -4.98\ \text{cm} \Rightarrow$$ **P_3 (- 0.27 ; - 4.98)**

prosta EF

$$z - 12.4 = \frac{9.6 - 12.4}{-6.9 + 5.8}(y + 5.8) \Rightarrow \frac{y}{-10.67} + \frac{z}{27.16} = 1$$

$$a_y = -10.67 = -\frac{7.41}{y_o} \Rightarrow y_o = 0.69\ \text{cm}$$

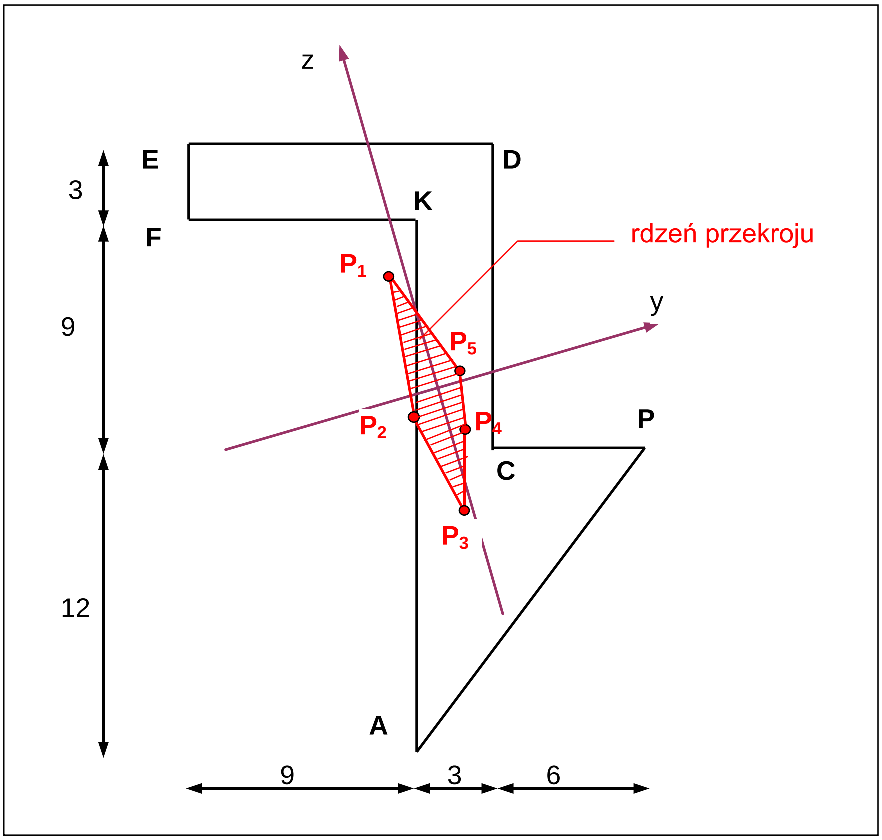
$$a_z = 27.16 = -\frac{50.96}{z_o} \Rightarrow z_o = -1.88\ \text{cm} \Rightarrow$$ **P_4 (0.69 ; - 1.88)**

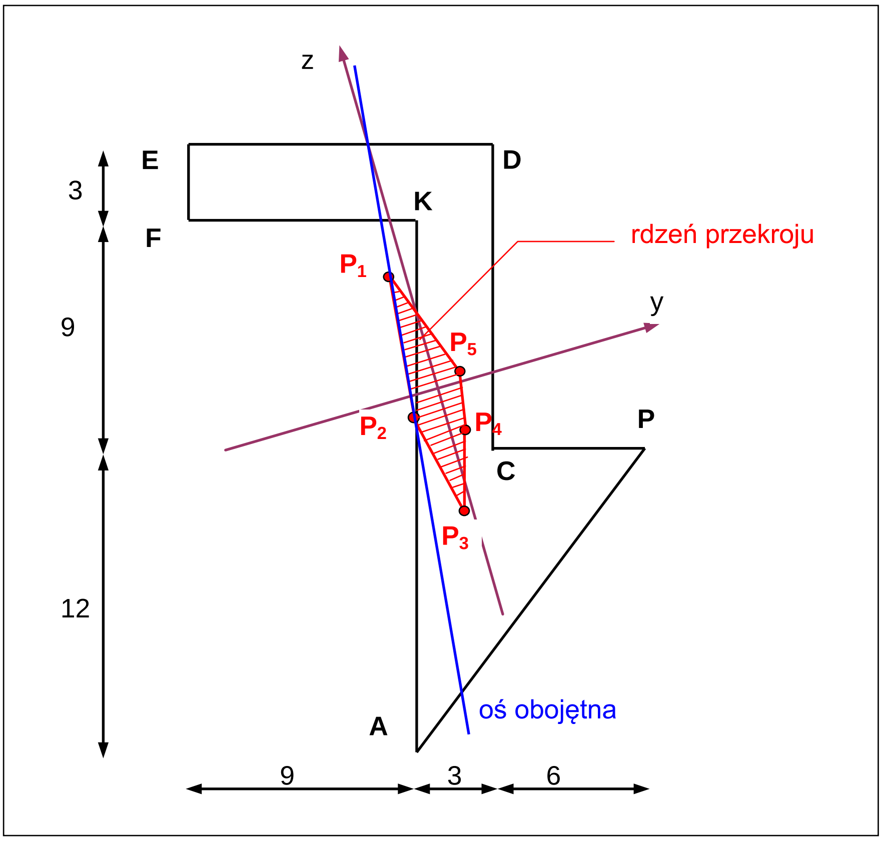
prosta FA

$$z - 9.6 = \frac{-14.4 - 9.6}{-5.8 + 6.9}(y + 6.9) \Rightarrow \frac{y}{-6.46} + \frac{z}{-140.95} = 1$$

$$a_y = -6.46 = -\frac{7.41}{y_o} \Rightarrow y_o = 1.15\ \text{cm}$$

$$a_z = -140.95 = -\frac{50.96}{z_o} \Rightarrow z_o = 0.36\ \text{cm} \Rightarrow$$ **P_5 (1.15 ; 0.36)**


z
E
D
3
K
F
rdzeń przekroju
P_1
y
9
P_5
P_2
P_4
P
C
P_3
12
A
9
3
6


z
E
D
3
K
F
rdzeń przekroju
P_1
y
9
P_5
P_2
P_4
P
C
P_3
12
oś obojętna
A
9
3
6