

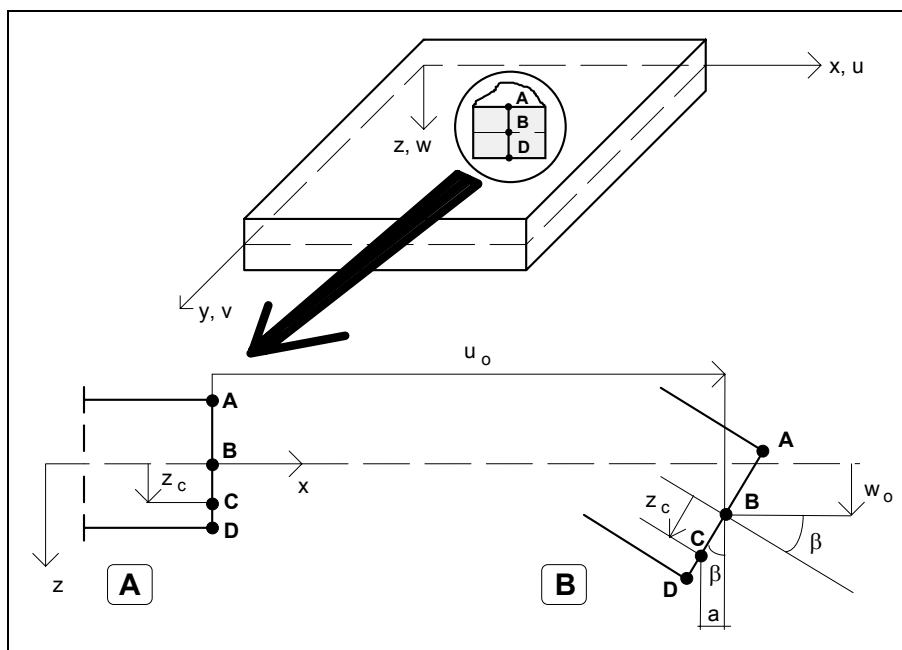
# NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W LAMINACIE

## KLASYCZNA TEORIA LAMINATÓW

- Warstwy w laminacie są tak ustawione względem siebie i zarazem przyjętego arbitralnie układu odniesienia, aby uzyskać takie charakterystyki sztywnościowe laminatu, które umożliwiają formowanie elementów konstrukcyjnych zdolnych do przenoszenia obciążenia o dowolnym kierunku.
- O cechach sprężystych laminatu decydują dwa czynniki – materiału i sekwencja ułożenia warstw
- W przypadku kompozytów wielowarstwowych opis zawsze odbywa się w dowolnie przyjętym układzie współrzędnych, który z punktu widzenia poszczególnych warstw jest z reguły układem nieosiowym.
- Metoda uwzględniania własności indywidualnych warstw tworzących kompozyt i pozwalająca na tej podstawie opisać własności kompozytu nosi nazwę **klasycznej teorii laminatów** (klasyczna teoria płyt laminatowych).

### Założenia i podstawy teorii laminatowych płyt cienkich

- ♦ laminat składa się z warstw połączonych ze sobą w sposób nierozrywalny, a połączenia są nieskończenie cienkie i nie zezwalają na ścinanie międzywarstwowe. Oznacza to, że odkształcenia przebiegające po grubości kompozytu są ciągłe i żadna warstwa nie może przemieszczać się względem innej (nie występują poślizgi). Kompozyt jako całość tworzy makroskopowo jedną warstwę, ale o własnościach będących wypadkową własności tworzących go warstw,
- ♦ obowiązuje teoria płyt cienkich, tzn. przyjmuje się hipotezę Kirchhoffa-Love'a, mówiącą, że
  - linia prosta i prostopadła do powierzchni środkowej pozostaje prosta i prostopadła po przyłożeniu obciążenia działającego w płaszczyźnie środkowej (tzw. **stan tarczowy**), jak i obciążenia wywołującego zginanie (tzw. **stan giętny**)
- ♦ obowiązuje założenie o małych przemieszczeniach.



Przemieszczenie punktów w płaszczyźnie (x, y). A. Stan przed odkształceniem. B. Stan po odkształceniu.

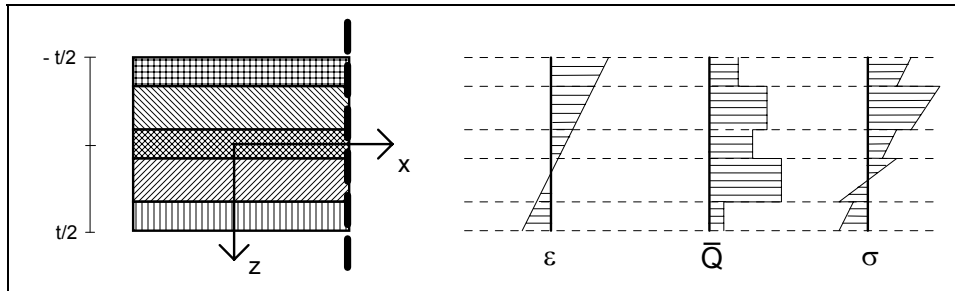
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$\{\varepsilon_i^0\}$  tensor odkształceń powierzchni środkowej  
 $\{\kappa_i^0\}$  tensor krzywizn powierzchni środkowej

Równania fizyczne zapisać dla "k-tej" warstwy laminatu ma postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}]_k z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

Uwzględniając liniową zmianę odkształceń po grubości laminatu i fakt, że sztywności warstw go tworzących są z reguły różne, otrzymuje się to rozkłady odkształceń i naprężeń po grubości laminatu jak na rysunku



Przykładowy rozkład naprężeń po grubości laminatu.

### Wypadkowe siły i momenty w laminacie

Naprężenia w laminacie określa się jako wielkość uśrednioną naprężeń warstwowych po grubości laminatu

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k dz$$

gdzie  $\bar{\sigma}_i$  oznacza "i-tą" składową naprężenia średniego w laminacie,  $\sigma_i^k$  - "i-tą" składową naprężenia w "k-tej" warstwie laminatu, zaś  $t$  jest grubością laminatu.

**Siły i momenty wypadkowe** (siły i momenty na jednostkę szerokości przekroju).

$$N_i = \bar{\sigma}_i t = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k dz \quad M_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k z dz$$

Wypadkowe siły i momenty dla laminatu można przedstawić w postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$A_{ij}$  – symetryczna macierz sztywności tarczowej  
 $B_{ij}$  – symetryczna macierz sztywności sprzężeń  
 $D_{ij}$  – symetryczna macierz sztywności zginania

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

Macierz  $B_{ij}$  wywołuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego w laminacie. Tak więc w ogólnym przypadku laminatu o całkowicie dowolnej budowie - stanom tarczowym (dla przykładu siła skupiona działająca w płaszczyźnie laminatu) towarzyszą stany giętne (zginanie, zwichrzenie) i odwrotnie.

W większości przypadków, typowych i najczęściej stosowanych klas laminatów symetrycznych sprzężenie stanów tarczowych i giętnych nie występuje, w wyniku czego stany tarczowe można opisać macierzą sztywności tarczowej  $[A]$ , a stany giętne macierzą  $[D]$ .

## Podatność w laminatach

W przypadku pojedynczej warstwy kompozytowej, czy to w konfiguracji osiowej, czy też zupełnie dowolnej, macierz podatności jest macierzą odwrotną do odpowiedniej macierzy sztywności.

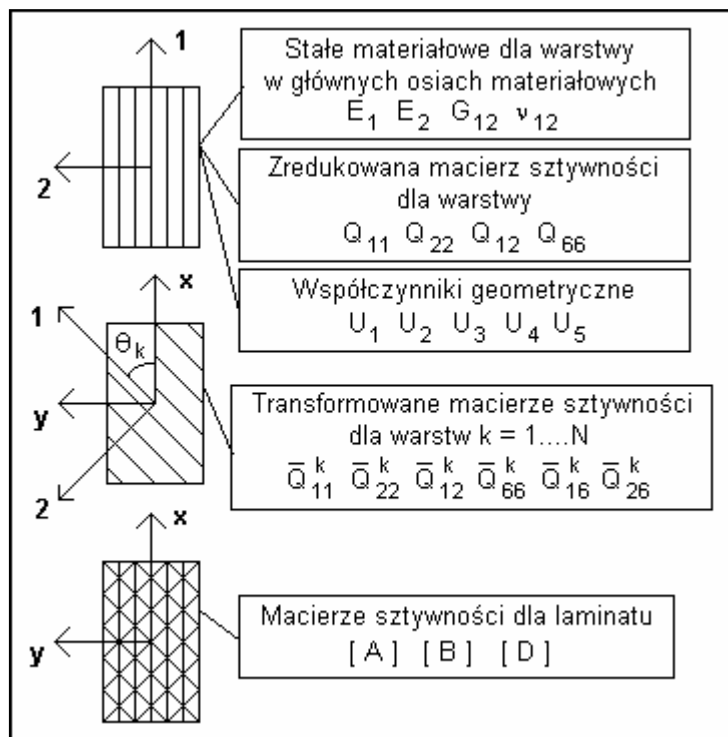
W przypadku laminatu nie operuje się w ogólnym przypadku pojęciem macierzy podatności.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

Żadna z macierzy  $[A']$ ,  $[B']$ ,  $[D']$  nie jest macierzą odwrotną do "odpowiadającej" jej macierzy sztywności, za wyjątkiem laminatów, w których nie występuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego, tzn. gdy macierz sztywności  $[B] = [0]$ . Wówczas:

$$[A'] = [A]^{-1} \quad [B'] = [0] \quad [D'] = [D]^{-1}$$

## Algorytm wyznaczania macierzy sztywności



Ogólna procedura wyznaczania macierzy sztywności dla laminatu.

## Stałe inżynierskie

Ze względu na możliwości doświadczalnej weryfikacji stałych inżynierskich, zostanie tu podany sposób określania tych stałych tylko dla laminatów, w których nie występuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego. Zakłada się jednocześnie, że obciążenie laminatu stanowią siły (naprężenia), działające w jego płaszczyźnie. Mówiąc bardzo precyzyjnie, należałoby zatem mówić o tarczowych stałych inżynierskich.

$$E_x^L = \frac{1}{A'_{11}t} \quad E_y^L = \frac{1}{A'_{22}t} \quad G_{xy}^L = \frac{1}{A'_{66}t}$$

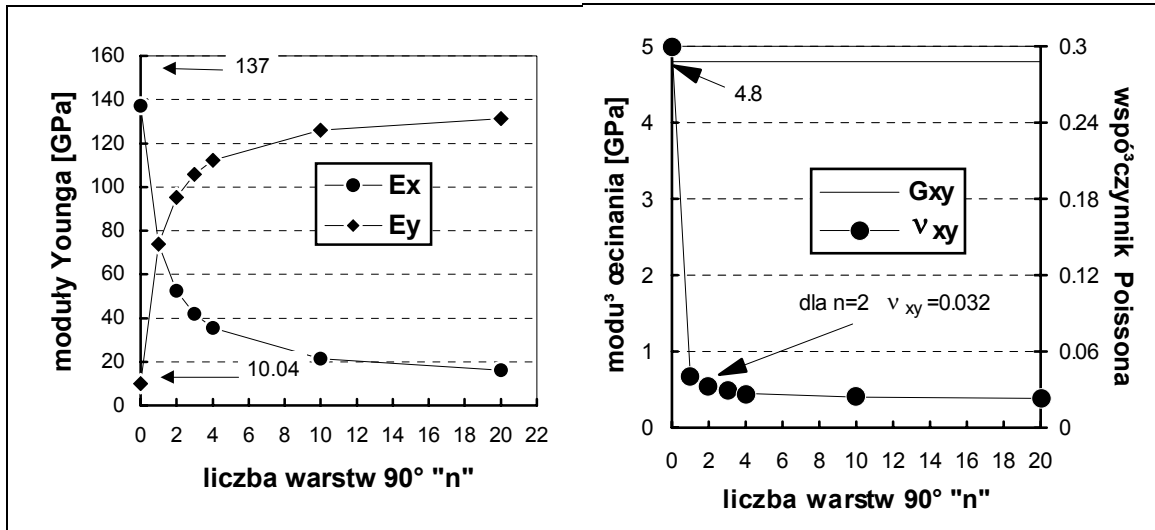
$$\nu_{xy}^L = -A'_{21}t E_x^L \quad \eta_{x,xy}^L = A'_{61}t E_x^L \quad \eta_{y,xy}^L = A'_{62}t E_y^L$$

Pozostałe 3 stałe inżynierskie wynikają z symetrii macierzy  $[A']$  i są liniowo zależne od w.w. 6 stałych

## Przykłady

### ◆ Przykład 1

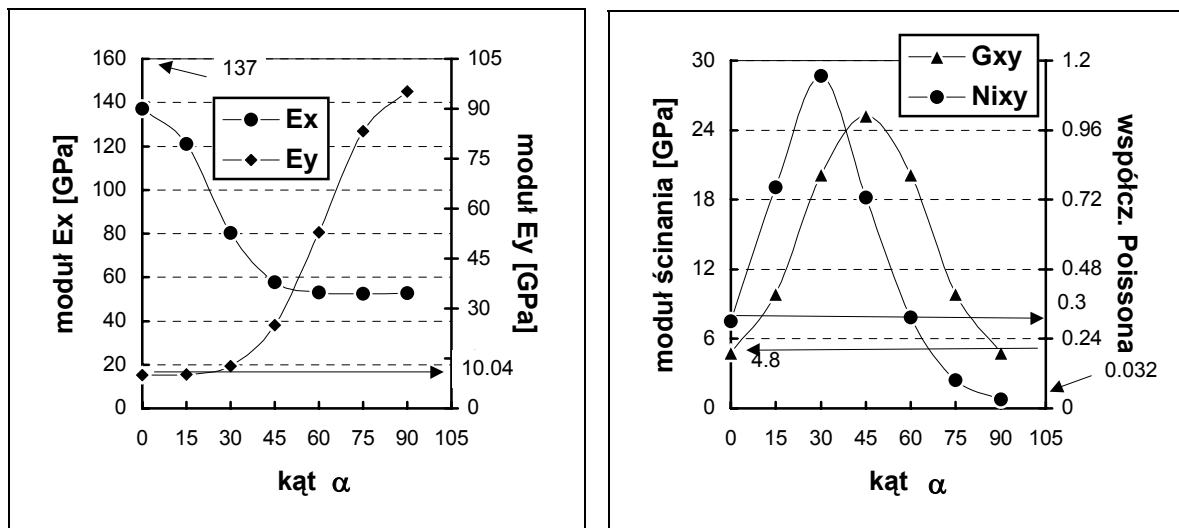
Wyznaczyć wartości stałych inżynierskich dla laminatu o kodzie  $[0, 90_n]_s$  w zależności od ilości warstw  $90^\circ$  dla kompozytu grafit/epoksyd (T 300 / epoksyd Vicotex 174), dla którego stałe materiałowe wynoszą  $E_1=137$  GPa,  $E_2=10.04$  GPa,  $G_{12}=4.8$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ .



Zależność stałych inżynierskich dla laminatu  $[0, 90_n]_s$  od liczby warstw  $90^\circ$

### ◆ Przykład 2

Wyznaczyć wartości stałych inżynierskich dla laminatu o kodzie  $[0, \alpha, -\alpha]_s$  w zależności od kąta  $\alpha$  dla kompozytu grafit/epoksyd (T300/epoksyd Vicotex174), dla którego stałe materiałowe wynoszą:  $E_1=137$  GPa,  $E_2=10.04$  GPa,  $G_{12}=4.8$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ .

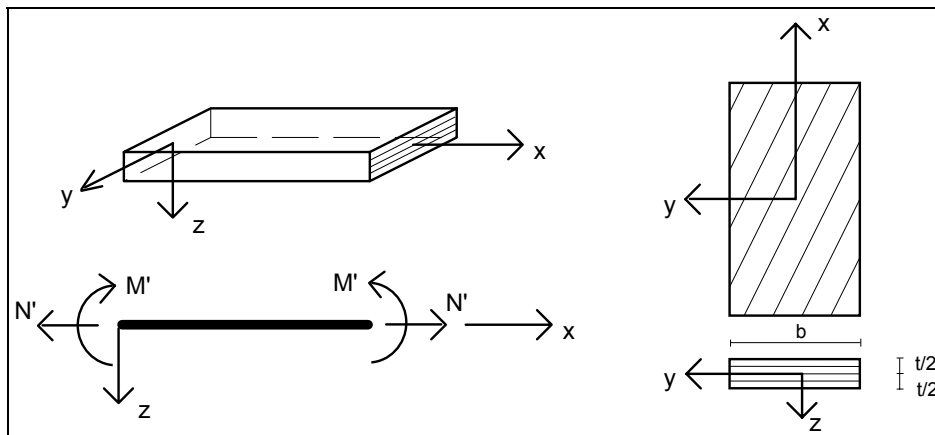


Zależność stałych inżynierskich dla laminatu  $[0, \alpha, -\alpha]_s$  od kąta  $\alpha$ .

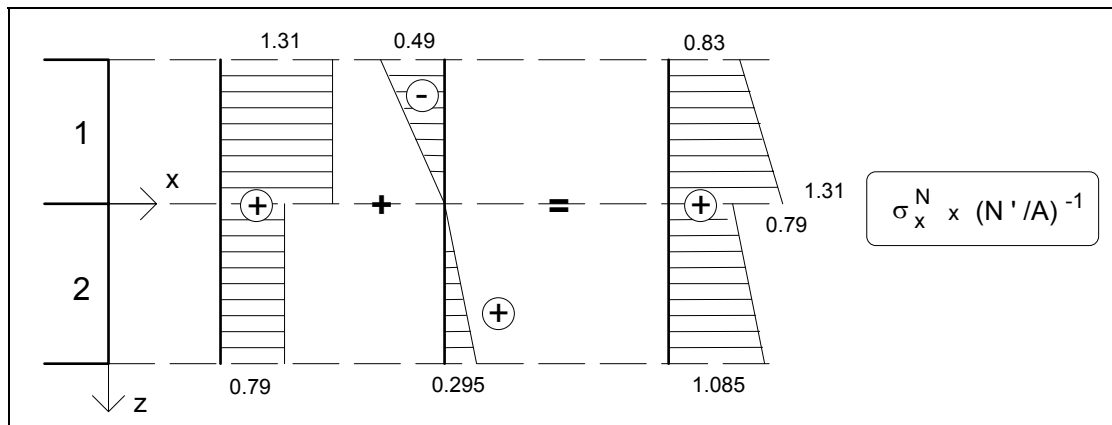
Wykresy zamieszczone w obu przykładach pokazują, jak silnie stałe sprężyste zależą od układu warstw laminatu, a jednocześnie wskazują jak ważną rolę ma do spełnienia projektant, który znając wymagania stawiane konstrukcji może tak dobrać budowę laminatu, aby spełnić je optymalnie.

◆ Przykład 3

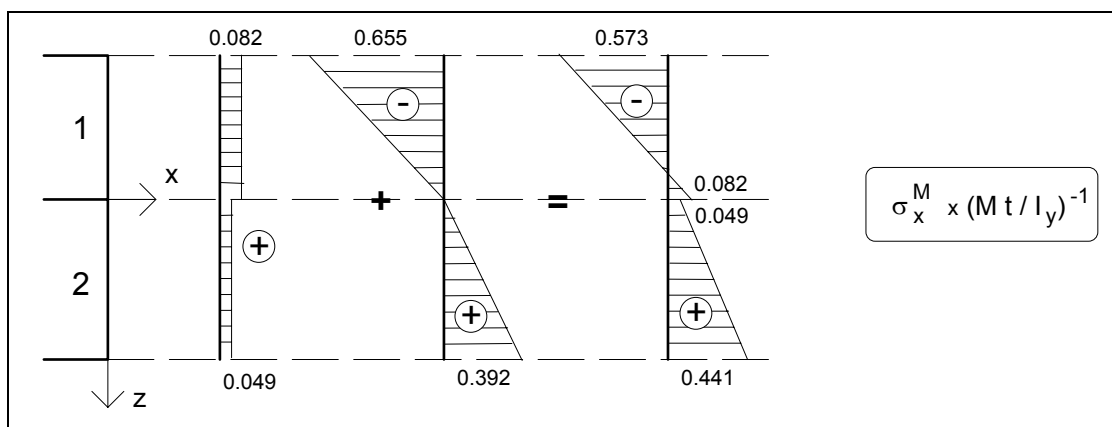
Wyznaczyć rozkłady naprężeń i odkształceń w belce o przekroju prostokątnym, poddanej zginaniu momentem  $M'$  i rozciąganiu siłą podłużną  $N'$ . Belka składa się z dwu warstw izotropowych o modułach sprężystości  $E_1=200$  GPa,  $E_2=120$  GPa,  $\nu_1=\nu_2=0.3$  (podane stałe odpowiadają odpowiednio stali i miedzi).



Belka laminatowa poddana zginaniu i rozciąganiu.

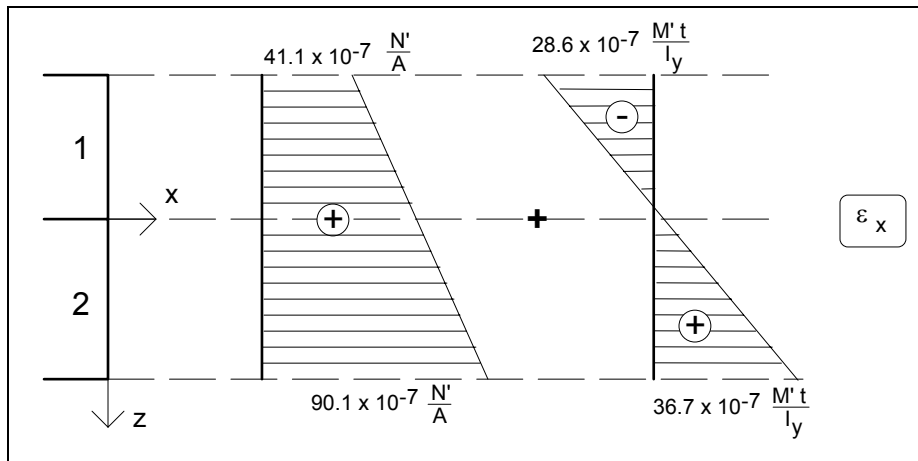


Naprężenia normalne przy rozciąganiu.



Naprężenia normalne przy zginaniu

W przypadku rozciągania, widać że oprócz naprężeń skokowo zmieniających się w miejscu połączenia warstw (skutek różnych sztywności warstw), ale stałych na ich wysokości, występują naprężenia o liniowym przebiegu, charakterystyczne dla zginania. Jest to bezpośredni skutek sprzężenia stanu tarczowego i giętnego. Sprzężenie stanu tarczowego i giętnego widoczne jest także w przypadku naprężeń normalnych wywołanych wyłącznie zginaniem. Tu oprócz składowej liniowo zmiennej po wysokości, występuje dodatkowo składowa stała na wysokości warstwy, charakterystyczna dla rozciągania.



Rozkład odkształceń podłużnych.