

## RÓWNANIA FIZYCZNE DLA KOMPOZYTÓW

### Równania fizyczne dla materiałów anizotropowych

- Równania fizyczne liniowej teorii sprężystości można zapisać w ogólnej postaci

$$\sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

lub po odwróceniu

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

gdzie  $Q_{ijkl}$  są elementami **macierzy sztywności**, a  $S_{ijkl}$  elementami **macierzy podatności**.

- Zapis zwężony, zwany też notacją Voigta

ZAPIS TENSOROWY		ZAPIS VOIGTA	
Naprężenia	Odształcenia	Naprężenia	Odształcenia
$\sigma_{11}$	$\varepsilon_{11}$	$\sigma_1$	$\varepsilon_1$
$\sigma_{22}$	$\varepsilon_{22}$	$\sigma_2$	$\varepsilon_2$
$\sigma_{33}$	$\varepsilon_{33}$	$\sigma_3$	$\varepsilon_3$
$\tau_{23}$	$2\varepsilon_{23} = \gamma_{23}$	$\sigma_4$	$\varepsilon_4$
$\tau_{13}$	$2\varepsilon_{13} = \gamma_{13}$	$\sigma_5$	$\varepsilon_5$
$\tau_{12}$	$2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$	$\sigma_6$	$\varepsilon_6$

Tabela 1. Konwencja zapisu tensorowego i zwężonego naprężeń i odkształceń.

Równania fizyczne mają w notacji zwężonej następujące postaci

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j$$

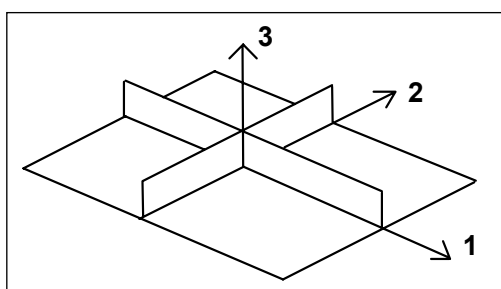
$$i, j = 1, 2, \dots, 6$$

Macierze  $Q_{ij}$  i  $S_{ij}$  mają w ogólnym przypadku materiału liniowo sprężystego po 36 elementów składowych, ale z analizy energii sprężystej wynika, że liczba składowych niezależnych wynosi 21.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{15} & Q_{25} & Q_{35} & Q_{45} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & Q_{46} & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

### Równania fizyczne dla materiałów ortotropowych

- Istotnym z punktu widzenia mechaniki kompozytów jest przypadek symetrii ortotropowej, gdyż większość kompozytów warstwowych o jednokierunkowym zbrojeniu zalicza się do tej klasy.



Rys. 1. Płaszczyzny symetrii ortotropowej

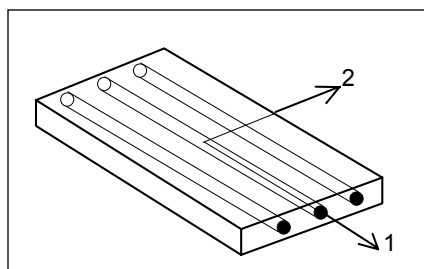
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Ortotropia jest takim szczególnym przypadkiem anizotropii, dla którego w głównych osiach materiałowych nie występuje sprzężenie naprężeń normalnych z odkształceniami stycznymi, naprężeń stycznych z odkształceniami normalnymi, ani też naprężeń stycznych z odkształceniami stycznymi odpowiadającymi różnym płaszczyznom. Mniejsza jest też niż dla anizotropii liczba niezależnych składowych macierzy sztywności, gdyż wynosi tylko 9.

## Związki fizyczne dla warstwy ortotropowej w płaskim stanie naprężenia

### Konfiguracja osiowa

- Konstrukcje wykonane z kompozytów laminatowych są generalnie konstrukcjami dwuwymiarowymi, toteż występuje w nich płaski stan naprężenia.



Rys. 2. Konfiguracja osiowa warstwy jednokierunkowo zbrojonej.

Dla płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie (1, 2), określonego warunkiem

$$\sigma_3 = 0 \quad \sigma_4 = 0 \quad \sigma_5 = 0$$

związki fizyczne upraszczają się do postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Macierz  $[Q_{ij}]$  to tzw. zredukowaną macierz sztywności

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

W funkcji stałych inżynierskich równania fizyczne mają postaci:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} mE_1 & m\nu_{21}E_1 & 0 \\ m\nu_{12}E_2 & mE_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$m = [1 - \nu_{12}\nu_{21}]^{-1}$$

Ilość niezależnych stałych w macierzach sztywności, podatności i stałych inżynierskich zmniejsza się do czterech, w porównaniu z dziewięcioma dla ogólnego przypadku ortotropii. Niezależne stałe inżynierskie, standardowo podawane dla danego typu materiału kompozytowego to

- ◆  $E_1$             tzw. podłużny moduł Younga
- ◆  $E_2$             tzw. poprzeczny moduł Younga
- ◆  $G_{12}$           moduł ścinania
- ◆  $\nu_{12}$           tzw. większy współczynnik Poissona.

Piąta stała inżynierska jest stałą zależną od pozostałych stałych i wynosi:

- ◆  $\nu_{21}$           tzw. mniejszy współczynnik Poissona

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}$$

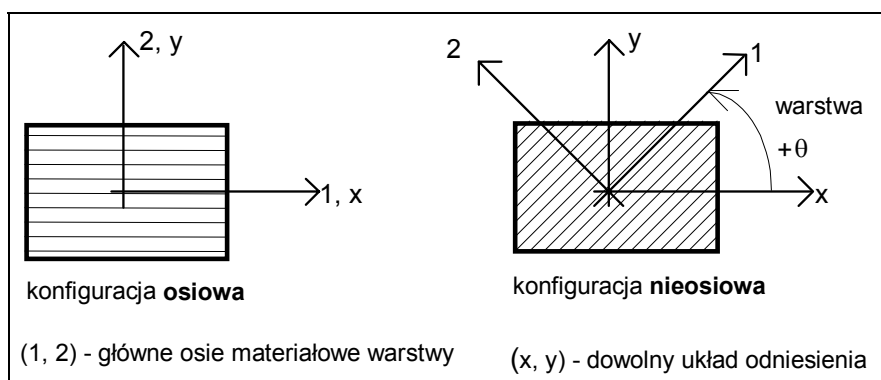
MATERIAŁ	STAŁE INŻYNIERSKIE			
	MODUŁ PODŁUŻNY $E_1$ [GPa]	MODUŁ POPRZECZNY $E_2$ [GPa]	MODUŁ ŚCINANIA $G_{12}$ [GPa]	WSPÓŁCZYNNIK POISSONA $\nu_{12}$
szkło E/epoksyd	45	12.0	5.5	.28
szkło S/epoksyd	55	16.0	7.6	.28
grafit/epoksyd WW**	145	10.0	4.8	.25
grafit/epoksyd WM**	220	6.9	4.8	.25
grafit/epoksyd UWM**	290	6.2	4.8	.25
Toray T300/epoksyd	121	10.2	4.8	.30
Kevlar 49	76	5.5	2.1	.34
boron/epoxy	210	19.0	4.8	.25

\*\* - skróty oznaczają: WW - kompozyt wysoko-wytrzymały, WM - wysoko-modułowy, UWM - ultrawysoko-modułowy

TABELA 2. Stałe inżynierskie dla typowych kompozytów jednokierunkowo zbrojonych.

## Związki fizyczne dla warstwy ortotropowej w płaskim stanie naprężenia

### Konfiguracja nieosiowa



Rys. 3. Konfiguracja osiowa i nieosiowa warstwy kompozytu.

### • Macierz sztywności warstwy w konfiguracji nieosiowej (transformowana macierz sztywności)

Związek fizyczny w konfiguracji nieosiowej ma postać

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Stosując procedurę transformacyjną Tsai'a i Pagano otrzymuje się

	1	$U_2$	$U_3$
$\bar{Q}_{11}$	$U_1$	$\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{22}$	$U_1$	$-\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{12}$	$U_4$	0	$-\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{66}$	$U_5$	0	$-\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{16}$	0	$1/2 \sin 2\theta$	$\sin 4\theta$
$\bar{Q}_{26}$	0	$1/2 \sin 2\theta$	$-\sin 4\theta$

TABELA 3. Wzory transformacyjne Tsai'a i Pagano dla macierzy sztywności

dla przykładu  $\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$

$$U_1 = 1/8 (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$U_2 = 1/2 (Q_{11} - Q_{22})$$

$$U_3 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_4 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_5 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

#### • Transformacja stałych inżynierskich

Obliczając transformowaną macierz podatności (poprzez odwrócenie transformowanej macierzy sztywności)

$$\bar{S}_{11} = (\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{26}^2) / \Delta$$

$$\bar{S}_{22} = (\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{16}^2) / \Delta$$

$$\bar{S}_{66} = (\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2) / \Delta$$

$$\bar{S}_{12} = (\bar{Q}_{16}\bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{66}) / \Delta$$

$$\bar{S}_{16} = (\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{16}) / \Delta$$

$$\bar{S}_{26} = (\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{16} - \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{26}) / \Delta$$

$$\Delta = \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{66} + 2\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}\bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{16}^2 - \bar{Q}_{66}\bar{Q}_{12}^2 - \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{26}^2$$

i wykorzystując związki tej macierzy ze stałymi inżynierskimi

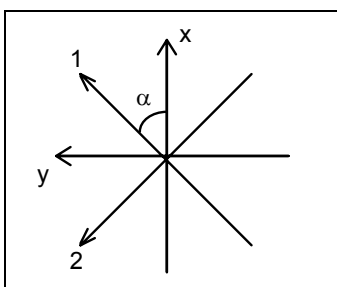
$$E_x = \frac{1}{\bar{S}_{11}} \quad E_y = \frac{1}{\bar{S}_{22}} \quad G_{xy} = \frac{1}{\bar{S}_{66}}$$

$$\nu_{xy} = -\bar{S}_{21}E_x \quad \eta_{x,xy} = -\bar{S}_{61}E_x \quad \eta_{y,xy} = -\bar{S}_{62}E_y$$

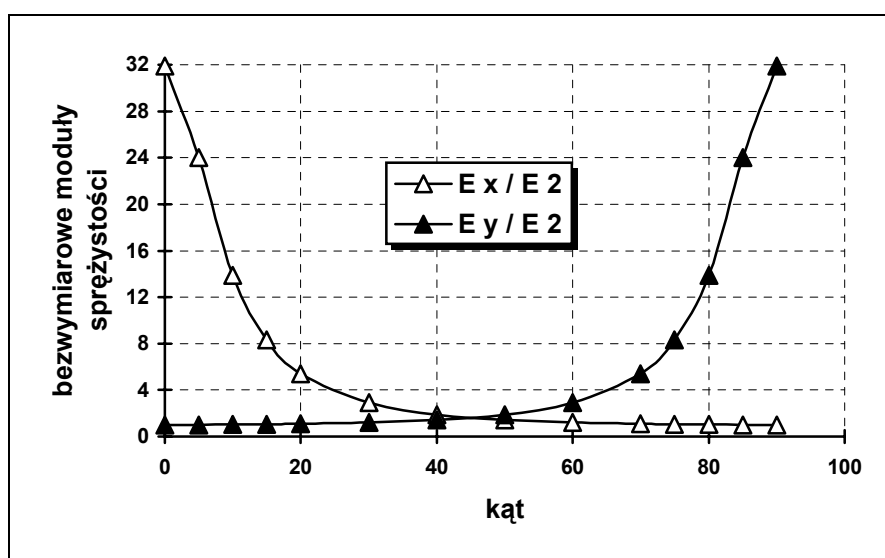
otrzymuje się stałe inżynierskie dla warstwy nieosiowej.

## ◆ Przykład 2

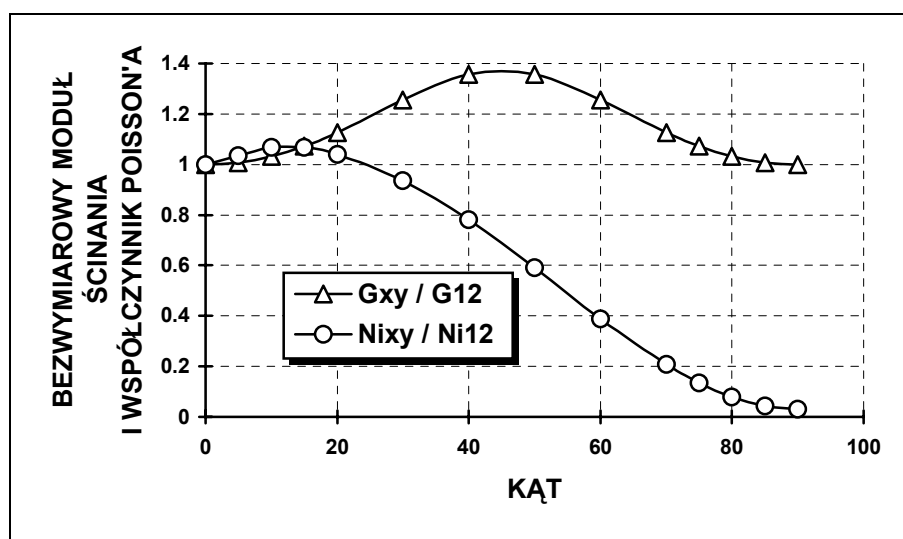
Wyznaczyć zależność stałych inżynierskich od kąta, jaki tworzą główne osie materiałowe (1, 2) z układem odniesienia (x, y) dla pojedynczej warstwy, jednokierunkowo zbrojonej wykonanej z wysoko-modułowego kompozytu grafit/epoksyd. Stałe materiałowe wynoszą:  $E_1=220$  GPa,  $E_2=6.9$  GPa,  $G_{12}=4.8$  GPa,  $\nu_{12}=0.25$ .



Zależność stałych inżynierskich od kąta  $\alpha$  przedstawiono na rys. 4 i 5.



Rys. 4. Zależność bezwymiarowych modułów Younga  $E_x / E_2$  i  $E_y / E_2$  od kąta  $\alpha$ .



Rys. 5. Zależność bezwymiarowego modułu ścinania  $G_{xy} / G_{12}$  i współczynnika Poisson'a  $\nu_{xy} / \nu_{12}$  od kąta  $\alpha$ .