1. BILANS ENERGETYCZNY

1.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

- **Układ fizyczny** - ciało (lub układ ciał) złożone z punktów materialnych
- **Otoczenie** - obszar otaczający układ fizyczny
- **Zmienne stanu termodynamicznego** - parametry charakteryzujące stan układu i otoczenia
  - **parametry zewnętrzne** (odnoszące się do otoczenia) - obciążenia, temperatura, wilgotność, ...
  - **parametry wewnętrzne** (odnoszące się do układu) – naprężenia, odkształcenia, przemieszczenia, uszkodzenia, gęstość,...
- **Równanie stanu** - funkcja, której zmiennymi są zmienne stanu
- **Proces termodynamiczny** – przejście od jednego stanu układu do drugiego w sposób odwracalny (tzn. taki, który pozwala przywrócić stan początkowy układu i otoczenia) lub nieodwracalny
- **Równowaga termodynamiczna układu** – stan układu, w którym parametry stanu nie zależą od czasu. Oznacza ona równowagę :
  - **mechaniczną** (brak niezrównoważonych sił)
  - **chemiczna** (zachowana jest stała masa i skład chemiczny)
  - **cieplna** (zależna od typu osłony oddzielającej układ od otoczenia np. adiabatycznej)
- **Proces adiabatyczny** – proces, w którym nie zachodzi wymiana ciepła między ciałem i jego otoczeniem, zaś praca sił zewnętrznych L przy przejściu od jednego stanu do drugiego nie zależy od sposobu przejścia. To oznacza, że istnieje funkcja stanu W nosząca nazwę energii wewnętrznej układu, której przyrost w czasie jest równy pracy dostarczonej układowi w tym czasie.

1.2. PIERWSZA ZASADA TERMODYNAMIKI

Zgodnie z zasadą zachowania energii, bilans energetyczny dla ciała poddanego działaniu dowolnego obciążenia, w warunkach procesu adiabatycznego, można zapisać w postaci równania:

$$\dot{L} = \dot{W} \tag{1}$$

Prędkość zmian energii wewnętrznej układu $\dot{W}$ w jednostce czasu jest równa pracy $\dot{L}$ wykonanej przez obciążenie zewnętrzne w tej jednostce (czyli mocy obciążenia zewnętrznego).

Energia wewnętrzna może być przedstawiona jako suma energii potencjalnej W_p i energii kinetycznej W_k.

$$W = W_p + W_k \qquad \Rightarrow \qquad \dot{W} = \dot{W}_p + \dot{W}_k \tag{2}$$

Ograniczając analizę do przypadku bardzo powolnej zmiany układu mechanicznego w czasie (obciążenie statyczne) można przyjąć, że prędkość zmian energii kinetycznej jest równa zero. Bilans energetyczny ma zatem postać:

$$\dot{L} = \dot{W}_p \tag{3}$$

2. RÓWNANIE STANU, POTENCJAŁ SIŁ WEWNĘTRZNYCH

Przyrost pracy sił zewnętrznych na przemieszczeniach u_i (tzn. moc sił zewnętrznych):

$$\dot{L} = \iint_S q_{vi}\,\dot{u}_i\,dS + \iiint_V X_i\,\dot{u}_i\,dV$$ q_{vi} – siły powierzchniowe, X_i – siły masowe

$$\dot{L} = \iint_S \sigma_{ij}\,\alpha_{vj}\,\dot{u}_i\,dS + \iiint_V X_i\,\dot{u}_i\,dV$$ $(q_{vi} = \sigma_{ij}\,\alpha_{vj})$

$$\dot{L} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}\,\dot{u}_i\right)dV + \iiint_V X_i\,\dot{u}_i\,dV$$ tw. Greena

$$\dot{L} = \iiint_V [(\sigma_{ij,j} + X_i)\,\dot{u}_i + \dot{u}_{i,j}\,\sigma_{ij}]\,dV$$

$$\dot{L} = \iiint_V \sigma_{ij}\,\dot{u}_{i,j}\,dV$$ (rów. Naviera $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$)

$\sigma_{ij}\,\dot{u}_{i,j} = \sigma_{ij}\,\frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}$ (rów. Cauchy'ego $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$)

2.1. RÓWNANIE STANU

$$\boxed{\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV = \dot{U}} \tag{4}$$

Przyrost pracy sił zewnętrznych $\dot{L}$ w jednostce czasu jest równy przyrostowi pracy sił wewnętrznych $\dot{U}$ (i zarazem równy przyrostowi energii potencjalnej $\dot{W}_p$)

Równanie (4) wiąże zmienne stanu : zewnętrzne (q_{vi} , P_i) i wewnętrzne (σ_{ij} , ε_{ij}) – **jest więc równaniem stanu**, w tym przypadku **stanu mechanicznego** (związek między wyłącznie parametrami mechanicznymi)

2.2. POTENCJAŁ SIŁ WEWNĘTRZNYCH

- **Gęstość energii** Φ - energia wewnętrzna na jednostkę objętości

$$W_p = \iiint_V \Phi\,dV \qquad \Rightarrow \qquad \dot{W}_p = \iiint_V \dot{\Phi}\,dV$$

$$\dot{\Phi} = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\,\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\,\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\,\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}$$

Wniosek : gęstość energii potencjalnej (wewnętrznej) jest potencjałem sił wewnętrznych

2.3. INNA POSTAĆ RÓWNANIA STANU MECHANICZNEGO

$$\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V \mathbf{T}_\sigma\,\dot{\mathbf{T}}_\varepsilon\,dV$$

$$\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma + \mathbf{A}_\sigma)(\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon + \dot{\mathbf{A}}_\varepsilon)\,dV = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon + \mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon)\,dV$$

Łatwo wykazać, że : $\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon = \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon = 0$.

np. $\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon = \left(\sigma_{ij} - \sigma_m\,\delta_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_m\,\delta_{ij} = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_m\,\delta_{ij} - \sigma_m\,\dot{\varepsilon}_m\,\delta_{ij}\,\delta_{ij} = \sigma_{kk}\,\dot{\varepsilon}_m - 3\sigma_m\,\dot{\varepsilon}_m = 3\sigma_m\,\dot{\varepsilon}_m - 3\sigma_m\,\dot{\varepsilon}_m = 0$

$$\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon)\,dV$$

3. ENERGIA POTENCJALNA DLA CIAŁA LINIOWO SPRĘŻYSTEGO

3.1. Prawo Hooke'a

$$\mathbf{D}_\sigma = 2G\mathbf{D}_\varepsilon \qquad \mathbf{A}_\sigma = 3K\,\mathbf{A}_\varepsilon \qquad \Big|\times d/dt$$

$$\dot{\mathbf{D}}_\sigma = 2G\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon \qquad \dot{\mathbf{A}}_\sigma = 3K\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon$$

3.2. Gęstość energii odkształcenia postaciowego i objętościowego

$$\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V \left(\frac{1}{2G}\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\sigma + \frac{1}{3K}\mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\sigma\right)dV$$

$$\dot{W}_p = \frac{1}{2G}\iiint_V \mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\sigma\,dV + \frac{1}{3K}\iiint_V \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\sigma\,dV$$

$$\dot{W}_p = \frac{1}{2G}\iiint_V \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\sigma)\,dV + \frac{1}{3K}\iiint_V \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\sigma)\,dV \qquad \Big|\times\int dt$$

$$W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{1}{2G}(\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\sigma)\,dV + \frac{1}{2}\iiint_V \frac{1}{3K}(\mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\sigma)\,dV$$

$$W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\varepsilon\,dV + \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\varepsilon\,dV$$

Wprowadźmy definicje gęstości energii odkształcenia postaciowego Φ_f i odkształcenia objętościowego Φ_v

$$\Phi_f = \frac{1}{2}\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\varepsilon$$

$$\Phi_v = \frac{1}{2}\mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\varepsilon$$

$$W_p = \iiint_V \Phi_f\,dV + \iiint_V \Phi_v\,dV = \iiint_v \Phi\,dV$$

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_v$$

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{T}_\sigma\,\mathbf{T}_\varepsilon\,dV}$$

- **Gęstość energii odkształcenia postaciowego**

$$\Phi_f = \frac{1}{2}\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\varepsilon = \frac{1}{4G}\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\sigma = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{ij}-\sigma_m\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij}-\sigma_m\delta_{ij}\right) = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - 2\sigma_{ij}\,\sigma_m\delta_{ij} + \sigma_m\sigma_m\delta_{ij}\delta_{ij}\right)$$

$$\Phi_f = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - 2\sigma_{kk}\,\sigma_m + 3\sigma_m\sigma_m\right) = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - 2\sigma_{kk}\frac{\sigma_{kk}}{3} + 3\frac{\sigma_{kk}}{3}\frac{\sigma_{kk}}{3}\right) = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\sigma_{kk}\right)$$

$$\Phi_f = \frac{1}{12G}\left(3\,\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - \sigma_{kk}^2\right) = \frac{1+\nu}{6E}\left(3\,\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - \sigma_{kk}^2\right)$$

$$\Phi_f = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_x-\sigma_z\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)\right]$$

$$\Phi_f = \frac{E}{6(1+\nu)}\left[\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_y-\varepsilon_z\right)^2 + \left(\varepsilon_x-\varepsilon_z\right)^2 + 6\left(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2\right)\right]$$

- **Gęstość energii odkształcenia objętościowego**

$$\Phi_v = \frac{1}{2}\mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\varepsilon = \frac{1}{6K}\mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\sigma = \frac{1}{6K}\left(\sigma_m\,\delta_{ij}\right)\left(\sigma_m\,\delta_{ij}\right) = \frac{1}{6K}3\sigma_m\,\sigma_m$$

$$\Phi_v = \frac{1}{6K}3\sigma_m\,\sigma_m = \frac{1}{2K}\frac{\sigma_{kk}}{3}\frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\frac{\sigma_{kk}}{3}\frac{\sigma_{kk}}{3}$$

$$\Phi_v = \frac{(1-2\nu)}{6E}\sigma_{kk}^2$$

$$\Phi_v = \frac{(1-2\nu)}{6E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)^2$$

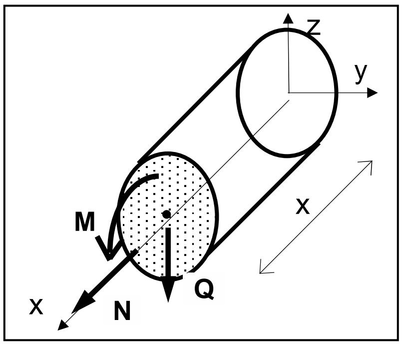
$$\Phi_v = \frac{E}{6(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)^2$$

- **Gęstość całkowitej energii sprężystej**

$$\Phi = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z\right) + 2(1+\nu)\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)\right]$$

4. ENERGIA SPRĘŻYSTA W UKŁADACH PRĘTOWYCH

Zadanie: Wyznaczyć całkowitą energię sprężystą pręta



$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{I_y} z$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q(x)\, S_y(z)}{I_y\, b(z)}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

$$\Phi = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + 2(1+\nu)\tau_{xz}^2\right]$$

$$W_p = \iiint\limits_V \Phi\, dV = \frac{1}{2E}\iiint\limits_V \left[\left(\frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{I_y} z\right)^2 + 2(1+\nu)\left(\frac{Q(x)\, S_y(z)}{I_y\, b(z)}\right)^2\right] dV$$

$$W_p = \frac{1}{2E}\iiint\limits_V \left(\frac{M(x)}{I_y} z\right)^2 dV + \frac{1}{E}\iiint \frac{M(x)}{I_y} z \frac{N(x)}{A}\, dV + \frac{1}{2E}\iiint \left(\frac{N(x)}{A}\right)^2 dV + \frac{1+\nu}{E}\iiint \left(\frac{Q(x)\, S_y(z)}{I_y\, b(z)}\right)^2 dV$$

$$W_p = W_{p1} + W_{p2} + W_{p3} + W_{p4}$$

$$W_{p2} = \frac{1}{E}\iiint \frac{M(x)}{I_y} z \frac{N(x)}{A}\, dV = \frac{1}{E}\int_0^l \left\{\iint\limits_A \frac{M(x)}{I_y} z \frac{N(x)}{A}\, dA\right\} dx = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M(x)}{I_y}\frac{N(x)}{A}\left\{\iint\limits_A z\, dA\right\} dx = 0$$

$$W_{p1} = \frac{1}{2E}\iiint\limits_V \left(\frac{M(x)}{I_y} z\right)^2 dV = \frac{1}{2E}\int_0^l \left\{\iint\limits_A \frac{M^2(x)}{I_y^2} z^2\, dA\right\} dx = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{M^2(x)}{I_y^2}\left\{\iint\limits_A z^2\, dA\right\} dx = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI_y}\, dx$$

$$W_{p1} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{l_i} \frac{M^2(x)}{2EI_y}\, dx$$

$$W_{p3} = \frac{1}{2E}\iiint \frac{N^2(x)}{A^2}\, dV = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{N^2(x)}{A^2}\left\{\iint\limits_A dA\right\} dx = \int_0^l \frac{N^2(x)}{2EA}\, dx$$

$$W_{p3} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{l_i} \frac{N^2(x)}{2EA}\, dx$$

$$W_{p4} = \frac{1+\nu}{E}\iiint \left(\frac{Q(x)\, S_y(z)}{I_y\, b(z)}\right)^2 dV = \frac{1}{2G}\int_0^l \frac{Q^2(x)}{I_y^2}\left\{\iint\limits_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)}\, dA\right\} dx$$

$$\mu = \frac{A}{I_y^2}\iint\limits_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)}\, dA$$

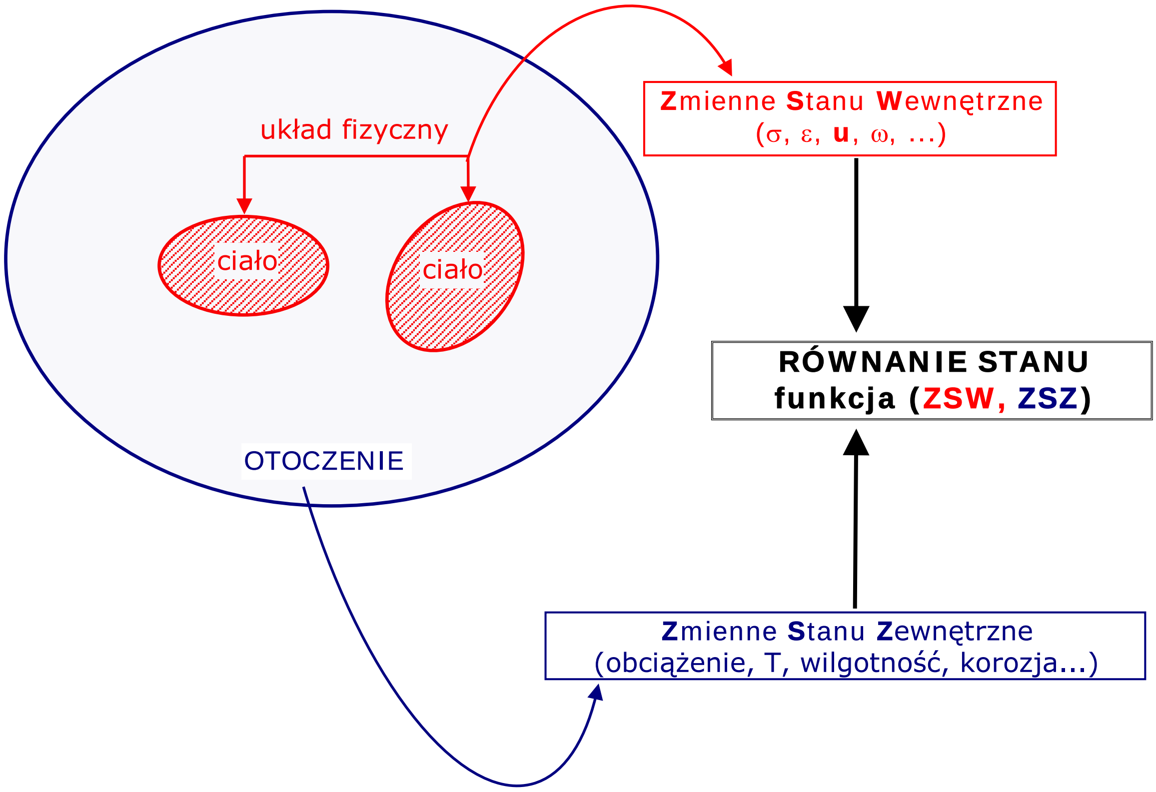
μ - energetyczny współczynnik ścinania

$$W_{p4} = \mu \int_0^l \frac{Q^2(x)}{2GA}\, dx$$

$$W_{p4} = \sum_{i=1}^{n} \mu \int\limits_{l_i} \frac{Q^2(x)}{2GA}\, dx$$

$$W_p = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{l_i} \frac{M^2(x)}{2EI_y}\, dx + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{l_i} \frac{N^2(x)}{2EA}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \mu \int\limits_{l_i} \frac{Q^2(x)}{2GA}\, dx$$

1. Pojęcia podstawowe



- **układ fizyczny –** ciało lub układ ciał złożonych z punktów materialnych
- **otoczenie -** obszar otaczający układ fizyczny
- **zmienne stanu termodynamicznego -** parametry charakteryzujące stan układu i otoczenia
  - **parametry zewnętrzne -** (odnoszące się do otoczenia) - obciążenia, temperatura, wilgotność, ...
  - **parametry wewnętrzne -** (odnoszące się do układu) – naprężenia, odkształcenia, przemieszczenia, uszkodzenia, gęstość,...
- **równanie stanu -** funkcja, której zmiennymi są zmienne stanu
- **proces termodynamiczny -** przejście od jednego stanu układu do drugiego w sposób odwracalny (tzn. taki, który pozwala przywrócić stan początkowy układu i otoczenia) lub nieodwracalny
- **równowaga termodynamiczna układu** – stan układu, w którym parametry stanu nie zależą od czasu. Oznacza ona równowagę :
  - **mechaniczną -** brak niezrównoważonych sił
  - **chemiczną -** zachowana jest stała masa i skład chemiczny
  - **cieplną -** zależna od typu osłony oddzielającej układ od otoczenia np. adiabatycznej
- **proces adiabatyczny -** proces, w którym nie zachodzi wymiana ciepła między ciałem i jego otoczeniem, zaś praca sił zewnętrznych L przy przejściu od jednego stanu do drugiego nie zależy od sposobu przejścia. To oznacza, że istnieje funkcja stanu W nosząca nazwę energii wewnętrznej układu, której przyrost w czasie jest równy pracy dostarczonej układowi w tym czasie.

PIERWSZA ZASADA TERMODYNAMIKI

Zgodnie z zasadą zachowania energii, w warunkach procesu adiabatycznego, bilans energetyczny dla ciała poddanego działaniu dowolnego obciążenia opisuje I zasada termodynamiki:

Prędkość zmian energii wewnętrznej układu $\dot{W}$ w jednostce czasu jest równa pracy $\dot{L}$ wykonanej przez obciążenie zewnętrzne w tej jednostce (czyli mocy obciążenia zewnętrznego).

$$\dot{L} = \dot{W}$$

Energia wewnętrzna może być przedstawiona jako suma energii potencjalnej W_p i energii kinetycznej W_k.

$$W = W_p + W_k$$

Ograniczając analizę do obciążenie statycznego ($\dot{W}_k = 0$). Bilans energetyczny ma zatem postać:

$$\dot{L} = \dot{W}_p$$

MOC SIŁ ZEWNĘTRZNYCH (przyrost pracy sił zewn. na przemieszczeniach)

$$\dot{L} = \iint_S q_{vi}\, \dot{u}_i\, dS + \iiint_V X_i\, \dot{u}_i\, dV$$

q_{vi} – siły powierzchniowe, X_i – siły masowe

- korzystając ze **stat. war. brzegowych** + **tw. Greena** + **rów. Naviera** + **przekształcenia macierzowe**, otrzymuje się **równanie stan mechanicznego,** wiążące zmienne stanu zewnętrzne (q_{vi} , P_i) i wewnętrzne (σ_{ij} , ε_{ij}):

$$\boxed{\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V \sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, dV = \dot{U}}$$

$\dot{U}$ - moc sił wewnętrznych

Przyrost pracy sił zewnętrznych $\dot{L}$ w jednostce czasu jest równy przyrostowi pracy sił wewnętrznych $\dot{U}$ (i zarazem równy przyrostowi energii potencjalnej $\dot{W}_p$)

GĘSTOŚĆ ENERGII WEWNĘTRZNEJ Φ - energia wewnętrzna na jednostkę objętości

$$W_p = \iiint_V \Phi\, dV \quad \Rightarrow \quad \dot{W}_p = \iiint_V \dot{\Phi}\, dV$$

$$\dot{\Phi} = \sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

WNIOSEK : **gęstość energii potencjalnej (wewnętrznej) jest potencjałem sił wewnętrznych**

DEWIATOROWO-AKSJATOROWA POSTAĆ RÓWNANIA STANU

$$\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV = \iiint_V \mathbf{T}_\sigma\,\dot{\mathbf{T}}_\varepsilon dV$$

$$\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma + \mathbf{A}_\sigma)(\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon + \dot{\mathbf{A}}_\varepsilon)\,dV = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon + \mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon)\,dV$$

Łatwo wykazać: $\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon = \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon = 0$

$$\boxed{\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon)\,dV}$$

ENERGIA POTENCJALNA DLA CIAŁA LINIOWO-SPRĘŻYSTEGO

Prawo Hooke'a

$\mathbf{D}_\sigma = 2G\mathbf{D}_\varepsilon$ prawo zmiany postaci $\qquad \mathbf{A}_\sigma = 3K\,\mathbf{A}_\varepsilon$ prawo zmiany objętości $\quad \Big| \times d/dt$

$\dot{\mathbf{D}}_\sigma = 2G\dot{\mathbf{D}}_\varepsilon \qquad \dot{\mathbf{A}}_\sigma = 3K\,\dot{\mathbf{A}}_\varepsilon$

Energia potencjalna

$$\dot{W}_p = \dot{L} = \iiint_V \left(\frac{1}{2G}\mathbf{D}_\sigma\,\dot{\mathbf{D}}_\sigma + \frac{1}{3K}\mathbf{A}_\sigma\,\dot{\mathbf{A}}_\sigma\right) dV$$

- addytywność całkowania i zasady różniczkowania

$$\dot{W}_p = \frac{1}{2G}\iiint_V \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\sigma)\,dV + \frac{1}{3K}\iiint_V \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\sigma)\,dV \qquad \Big| \times \int dt$$

$$W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{1}{2G}(\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\sigma)\,dV + \frac{1}{2}\iiint_V \frac{1}{3K}(\mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\sigma)\,dV$$

$$W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{D}_\varepsilon\,dV + \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{A}_\varepsilon dV = W_f + W_v$$

energia potencjalna = energia odkszt. postaciowego + energia odkszt. objętościowego

przekształcenia

$$\iiint_V \mathbf{T}_\sigma\,\mathbf{T}_\varepsilon dV = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma + \mathbf{A}_\sigma)(\mathbf{D}_\varepsilon + \mathbf{A}_\varepsilon)\,dV = \iiint_V (\mathbf{D}_\sigma\mathbf{D}_\varepsilon + \mathbf{D}_\sigma\mathbf{A}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\mathbf{D}_\varepsilon + \mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\varepsilon)dV$$

$$\mathbf{D}_\sigma\,\mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{A}_\sigma\,\mathbf{D}_\varepsilon = 0$$

$$\frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{T}_\sigma\,\mathbf{T}_\varepsilon dV = \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{D}_\sigma\mathbf{D}_\varepsilon dV + \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\varepsilon dV$$

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{T}_\sigma\,\mathbf{T}_\varepsilon dV}$$

Gęstość energii odkształcenia postaciowego Φ_f

$$W_f = \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{D}_\sigma \mathbf{D}_\varepsilon \, dV = \iiint_V \Phi_f \, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_f = \frac{1}{2}\mathbf{D}_\sigma \mathbf{D}_\varepsilon}$$

$$\boxed{\Phi_f = \begin{cases} \dfrac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_x-\sigma_z)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)\right] \\ \dfrac{E}{6(1+\nu)}\left[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_x-\varepsilon_z)^2+6\left(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2\right)\right] \end{cases}}$$

Gęstość energii odkształcenia objętościowego Φ_v

$$W_v = \frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{A}_\sigma \mathbf{A}_\varepsilon \, dV = \iiint_V \Phi_v \, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_v = \frac{1}{2}\mathbf{A}_\sigma \mathbf{A}_\varepsilon}$$

$$\boxed{\Phi_v = \begin{cases} \dfrac{(1-2\nu)}{6E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)^2 \\ \dfrac{E}{6(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)^2 \end{cases}}$$

Gęstość całkowitej energii sprężystej Φ

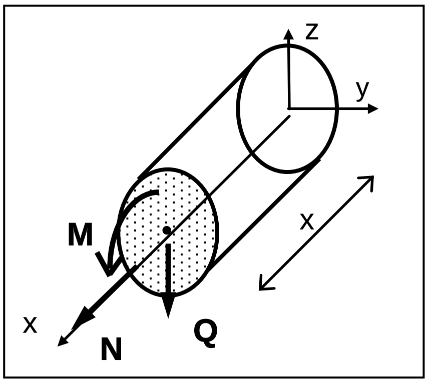
$$W_p = \iiint_V \Phi \, dV$$

$$W_p = W_f + W_v = \iiint_V \Phi_f \, dV + \iiint_V \Phi_v \, dV = \iiint_V (\Phi_f + \Phi_v)\, dV$$

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_v$$

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z\right)+2(1+\nu)\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)\right]}$$

ENERGIA SPRĘŻYSTA W UKŁADACH PRĘTOWYCH



$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{I_y} z$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q(x)\, S_y(z)}{I_y\, b(z)}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

$$\Phi = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + 2(1+\nu)\,\tau_{xz}^2\right]$$

$$W_p = \iiint_V \Phi \, dV = \frac{1}{2E}\iiint_V \left[\left(\frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{I_y} z\right)^2 + 2(1+\nu)\left(\frac{Q(x)\, S_y(z)}{I_y\, b(z)}\right)^2\right] dV$$

$$W_p = \sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} \frac{M^2(x)}{2EI_y}\, dx + \sum_{i=1}^{m}\int_{l_i} \frac{N^2(x)}{2EA}\, dx + \sum_{i=1}^{n}\mu\int_{l_i} \frac{Q^2(x)}{2GA}\, dx$$

$$\mu = \frac{A}{I_y^2}\iint_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)}\, dA$$

μ - energetyczny współczynnik ścinania