1. CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

Oznaczenia:

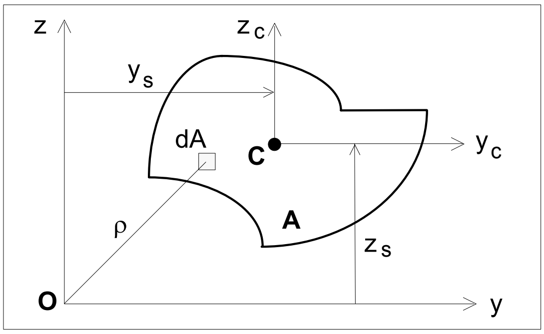
(y, z) - dowolny układ współrzędnych

(y_c, z_c) - centralny układ współrzędnych, "równoległy" do układu (y, z)

A - pole powierzchni figury

C - środek ciężkości figury

y_s, z_s - współrzędne środka ciężk. figury C w dowolnym ukł. współrzędnych (y, z)



1.1. Momenty statyczne $S_y = \iint_A z\,dA$ $S_z = \iint_A y\,dA$

1.2. Położenie środka ciężkości C $z_s = S_y / A$ $y_s = S_z / A$

1.3. Momenty bezwładności, moment dewiacji

$$I_y = \iint_A z^2\,dA \quad (>0) \qquad I_z = \iint_A y^2\,dA \quad (>0)$$

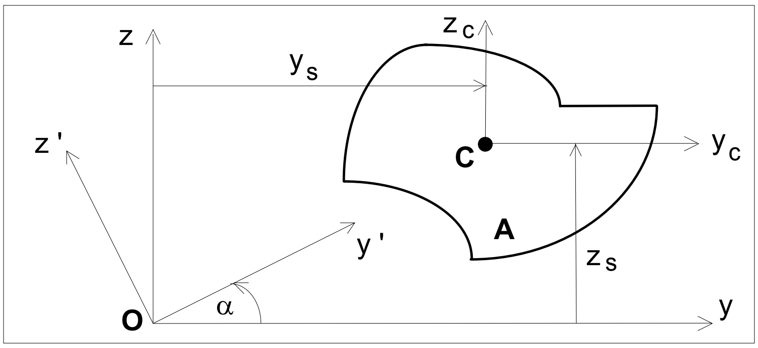
$$I_o = \iint_A \rho^2\,dA = \iint_A \left(y^2 + z^2\right) dA = I_z + I_y \quad (>0)$$

$$I_{yz} = \iint_A y z\,dA \quad (<=>0)$$

1.4. Promienie bezwładności

$$i_y = \sqrt{I_y / A} \qquad i_z = \sqrt{I_z / A}$$

2. Translacja układu współrzędnych - twierdzenie Steinera



$$I_y = I_{y_c} + A z_s^2 \qquad I_z = I_{z_c} + A y_s^2 \qquad I_{yz} = I_{y_c z_c} + A y_s z_s$$

3. Obrót układu współrzędnych

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

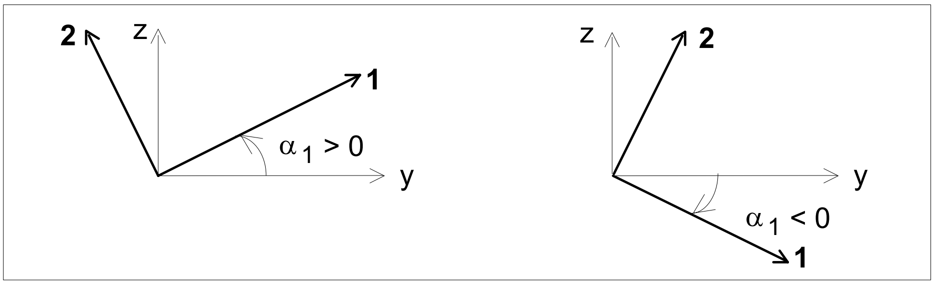
$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{y'z'} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha$$

4. Główne osie i momenty bezwładności

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}$$

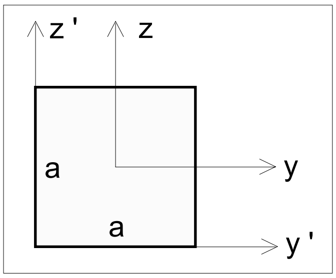
$$\tan\alpha_{1,2} = \frac{I_{yz}}{I_z - I_{1,2}}$$



5. Algorytm wyznaczania położenia głównych, centralnych osi bezwładności i obliczania głównych, centralnych momentów bezwładności

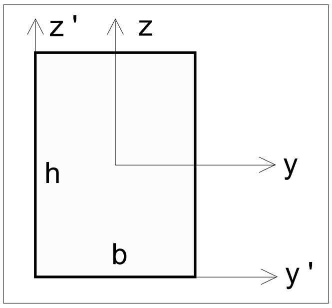
1. Przyjąć dowolny układ współrzędnych (x, y) "wygodny" do obliczeń
2. Wyznaczyć położenie środka ciężkości $C\,(y_s, z_s)$
3. Obliczyć centralne momenty bezwładności (twierdzenie Steinera)
   $$I_{y_c} = I_y - A z_s^2$$
   $$I_{z_c} = I_z - A y_s^2$$
   $$I_{y_c z_c} = I_{yz} - A y_s z_s$$
4. Obliczyć główne centralne momenty bezwładności
5. Wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności

6. Charakterystyki wybranych przekrojów



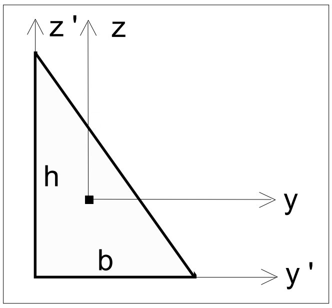
$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{y'} = I_{z'} = \frac{a^4}{3} \quad ; \quad I_{y'z'} = \frac{a^4}{4}$$



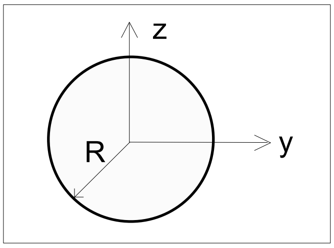
$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{y'} = \frac{bh^3}{3} \quad ; \quad I_{z'} = \frac{hb^3}{3} \quad ; \quad I_{y'z'} = \frac{b^2h^2}{4}$$

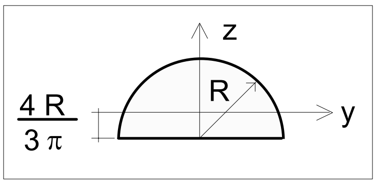


$$I_y = \frac{bh^3}{36} \quad ; \quad I_z = \frac{hb^3}{36} \quad ; \quad I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

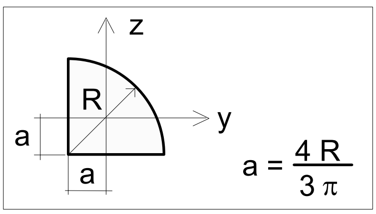
$$I_{y'} = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_{z'} = \frac{hb^3}{12} \quad ; \quad I_{y'z'} = \frac{b^2h^2}{24}$$



$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$



$$I_y = 0.11R^4 \quad ; \quad I_z = \frac{\pi R^4}{8}$$



$$I_y = I_z = 0.055\,R^4$$

$$I_{yz} = -0.0165\,R^4$$