

1. DEFINICJA

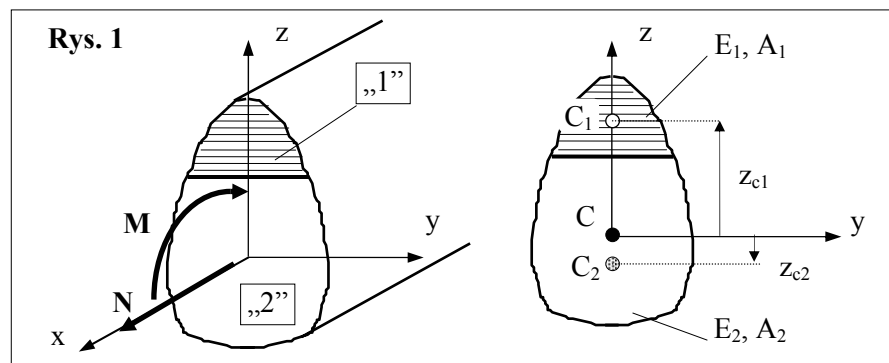
Belki zespolone to belki, których przekrój poprzeczny składa się z co najmniej dwóch materiałów o różnych własnościach fizycznych (różne moduły Younga i współczynniki Poissona), przy czym zapewnione jest trwałe połączenie poszczególnych części.

2. ZAŁOŻENIA

2.1. Oznaczenia

Założmy tymczasowo (wyłącznie dla uproszczenia dalszej analizy), że przekrój belki składa się jedynie z dwóch materiałów i przyjmijmy następujące oznaczenia wielkości występujących na rysunku 1 :

- * y, z - osie główne centralne przekroju traktowanego jak przekrój jednorodny (osie „geometryczne” bez uwzględniania różnych własności materiału)
- * C_1, C_2 - środki ciężkości odpowiednio: całego przekroju, części „1” i części „2” wyrażone w układzie (y, z)
- * A_1, A_2 - pola powierzchni odpowiednio: części „1” i części „2”
- * E_1, E_2 - moduły Younga odpowiednio: materiału części „1” i części „2”



2.2. Założenia

- * przekrój posiada pionową oś symetrii „z”, a obciążenie leży w płaszczyźnie utworzonej przez tę oś i oś podłużną belki
- * obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów (odkształcenia zmieniają się liniowo po wysokości przekroju)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa z \quad (1)$$

- * jedynym niezerowym naprężeniem normalnym jest naprężenie σ_x . Z równań Hooke'a wynika zatem, że w poszczególnych częściach materiału muszą zachodzić relacje:

$$\sigma_{x1} = E_1 (\varepsilon_0 + \kappa z) \quad \sigma_{x2} = E_2 (\varepsilon_0 + \kappa z) \quad (2)$$

2.3. Warunki równoważności sił zewnętrznych i wewnętrznych

Przy wyznaczaniu funkcji naprężenia normalnego skorzystamy z twierdzenia o równoważności układu sił zewnętrznych i wewnętrznych. Wynikają z niego następujące równania równowagi

$$N = \iint_A \sigma_x dA = \iint_{A_1} \sigma_{x1} dA + \iint_{A_2} \sigma_{x2} dA$$

$$N = \varepsilon_0 (E_1 A_1 + E_2 A_2) + \kappa (E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}) \quad (3)$$

$$M = \iint_A \sigma_x z dA = \iint_{A_1} \sigma_{x1} z dA + \iint_{A_2} \sigma_{x2} z dA$$

$$M = \varepsilon_0 (E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}) + \kappa (E_1 J_{y1} + E_2 J_{y2}) \quad (4)$$

gdzie S_{y1} , S_{y2} , J_{y1} , J_{y2} to odpowiednio momenty statyczne i momenty bezwładności części „1” i „2” obliczone względem geometrycznych osi ciężkości (y , z).

Z równań (3) i (4) widać, że występuje **sprężenie** tzw. **stanu tarczowego** (objawiającego się zmianą długości osi pręta) i **giętnego** (objawiającego się ugięciem osi pręta). W szczególności z równ. (3) widać, że np. **siła osiowa** N **wywołuje** nie tylko **odkształcenie osi**, ale także jej **ugięcie**, co jest naturalną konsekwencją różnych własności fizycznych przekroju. Zauważmy, że gdyby materiał był jednorodny, tzn. $E_1=E_2=E$ to :

$$N = \varepsilon_0 E A + \kappa E (S_{y1} + S_{y2}) = \varepsilon_0 E A$$

(moment statyczny przekroju wzg. osi ciężkości =0) i stan giętny wywołany siłą podłużną N nie występuje.

Z równ. (4) widać z kolei, że **moment zginający powoduje** nie tylko **ugięcie** osi, ale także jej **odkształcenie liniowe** (tzn. wydłużenie bądź skrócenie). Dla materiału jednorodnego otrzymalibyśmy:

$$M = \varepsilon_0 E (S_{y1} + S_{y2}) + \kappa E (J_{y1} + J_{y2}) = \kappa E J_y$$

a zatem równanie jak w klasycznym prostym zginaniu belek o przekroju jednorodnym. Stan tarczowy wywołany momentem zginającym w takim wypadku nie występuje.

Biorąc pod uwagę powyższe uwagi, można postawić pytanie czy i w przypadku belek o przekrojach niejednorodnych materiałowo nie dałoby się przyjąć takiej „fikcyjnej osi ciężkości” y^* („fikcyjnej”, gdyż zależnej nie tylko od wymiarów geometrycznych poszczególnych części przekroju, ale i ich własności fizycznych), która umożliwiłaby rozdzielenie stanu tarczowego i giętnego (co oznacza, że siła osiowa wywołuje tylko zmianę długości osi, a moment zginający powoduje tylko ugięcie osi belki), a tym samym pozwalałaby podejść do zagadnienia mimośrodowego rozciągania belki o przekroju niejednorodnym, analogicznie jak w przypadku przekroju jednorodnego.

Odpowiedź jest pozytywna - należy w tym celu spełnić, wynikający jasno z równań (3) i (4), warunek :

$$E_1 S_1^* + E_2 S_2^* = 0 \quad (5)$$

gdzie S_1^* , S_2^* to momenty statyczne części „1” i „2” obliczone względem nowej „osi ciężkości” y^* .

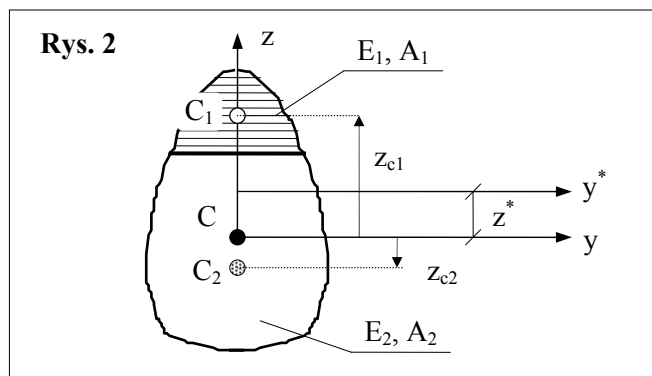
Rozpisując równ. (5) i korzystając z rys. 2 otrzymujemy

$$E_1 A_1 (z_{c1} - z^*) + E_2 A_2 (z_{c2} - z^*) = 0$$

a po elementarnych przekształceniach otrzymujemy położenie poszukiwanej poziomej osi y^* :

$$z^* = \frac{E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{S_{y1} + \frac{E_2}{E_1} S_{y2}}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2} = \frac{S_{y1} + n S_{y2}}{A_1 + n A_2} \quad (6)$$

W dalszej analizie oś y^* będziemy nazywać „sprowadzoną” lub „ważoną” osią ciężkości.



2.4. Sprowadzone (ważone) charakterystyki materiałowo-geometryczne

Wprowadźmy następujące „nowe” charakterystyki materiałowo-geometryczne :

$$n = E_2/E_1 \quad \text{waga} \quad (7)$$

$$A^* = A_1 + n A_2 \quad \text{ważone pole} \quad (8)$$

$$S_{ys} = S_{y1} + n S_{y2} \quad \text{ważony moment statyczny} \quad (9)$$

$$J^* = J_1^* + n J_2^* \quad \text{ważony moment bezwładności} \quad (10)$$

gdzie J_1^* , J_2^* oznaczają momenty bezwładności części „1” i „2” obliczone względem osi ważonej y^* .

Położenie osi ważonej y^* określa „standardowe” równanie :

$$z^* = \frac{S_{ys}}{A^*} \quad (11)$$

2.5. Równania równoważności w układzie ważonym

Zredukujmy siły przekrojowe M i N do środka układu współrzędnych utworzonego przez oś z i oś ważoną y^* . Układ sił będzie się wówczas składał z siły N i momentu M^* , którego wartość, zgodnie z rys.1 i 2 wyniesie:

$$M^* = M + N z^* \quad (12)$$

Zapiszmy równania równoważności w układzie osi (y^* , z).

$$N = \iint_A \sigma_x dA = \iint_{A_1} \sigma_1 dA + \iint_{A_2} \sigma_2 dA = E_1 \varepsilon_0 A_1 + E_1 \kappa S_1^* + E_2 \varepsilon_0 A_2 + E_2 \kappa S_2^* \\ N = \varepsilon_0 E_1 (A_1 + n A_2) = \varepsilon_0 E_1 A^* \quad (13)$$

$$M^* = \iint_A \sigma_x z dA = \iint_{A_1} \sigma_1 z dA + \iint_{A_2} \sigma_2 z dA = E_1 \varepsilon_0 S_1^* + E_1 \kappa J_1^* + E_2 \varepsilon_0 S_2^* + E_2 \kappa J_2^* \\ M^* = \kappa (E_1 J_1^* + E_2 J_2^*) = \kappa E_1 (J_1^* + n J_2^*) = \kappa E_1 J^* \quad (14)$$

2.6. Przekrój złożony z dowolnej ilości części z różnych materiałów

Przedstawione dotychczas obliczenia dotyczyły belek o przekrojach składających z dwóch materiałów. Można je bez żadnych trudności uogólnić na belki, których przekrój składa się z dowolnej liczby różnych materiałów - powiedzmy, że liczba ta wynosi „ k ”. Pozostawiając szczegółowe rachunki czytelnikowi - ograniczymy się do podania ich wyników. Przyjmując materiał „1” jako materiał „odniesienia” (określa się go także jako materiał „porównawczy”), możemy napisać następujące relacje :

$$n_i = E_i/E_1 \quad i = 1 \dots k \quad \text{waga} \quad (15)$$

$$A^* = \sum_{i=1}^k n_i A_i \quad \text{ważone pole} \quad (16)$$

$$S_{ys} = \sum_{i=1}^k n_i S_{yi} \quad \text{ważony moment statyczny} \quad (17)$$

$$J^* = \sum_{i=1}^k n_i J_i^* \quad \text{ważony moment bezwładności} \quad (18)$$

Położenie osi ważonej y^* wyraża się także teraz „standardowym” równaniem :

$$z^* = \frac{S_{ys}}{A^*} \quad (19)$$

Równania równoważności sił zewnętrznych i wewnętrznych są identyczne jak (13) i (14), tzn.:

$$N = \varepsilon_0 E_1 A^* \quad M^* = \kappa E_1 J^* \quad (20)$$

przy czym A^* i J^* opisane są odpowiednio równaniami (16) i (18).

2.7. Wyznaczenie odkształcenia liniowego i krzywizny osi belki

Z równań (12), (13) i (14) lub w ogólnym przypadku z równań (12) i (20) otrzymujemy krzywiznę i odkształcenie osi belki w postaci:

$$\kappa = \frac{M^*}{E_1 J^*} \quad \varepsilon_0 = \frac{N}{E_1 A^*} \quad (21)$$

2.8. Odkształcenia i naprężenia w przekroju zespolonym

Całkowite odkształcenie liniowe ε_x (zgodnie z przyjętą na wstępie hipotezą Bernouli'ego) wynosi:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} \left(\frac{N}{A^*} + \frac{M^*}{J^*} z' \right) \quad (22)$$

Zmienna z' obliczana jest od osi ważonej y^* .

Naprężenia w poszczególnych częściach przekroju poprzecznego określone są zatem równaniami:

$$\sigma_{xi} = n_i \left(\frac{N}{A^*} + \frac{M^*}{J^*} z' \right) \quad (23)$$

3. ALGORYTM OBLICZEŃ DLA DWUMATERIAŁOWEGO PRZEKROJU ZESPOLONEGO

Dla ułatwienia obliczeń dla często stosowanych belek zespolonych składających się z dwóch materiałów zestawmy wzory i podajmy kolejność ich stosowania. Algorytm obliczania naprężeń normalnych jest następujący:

1. Wyznaczyć położenie głównych, centralnych osi bezwładności przekroju (osi czysto geometrycznych)
2. Obliczyć wagę, ważony moment statyczny przekroju względem osi głównych centralnych i ważne pole przekroju

$$n = E_2/E_1$$

$$S_{ys} = S_{y1} + n S_{y2}$$

$$A^* = A_1 + n A_2$$

3. Obliczyć położenie osi ważonej y^* względem układu głównego centralnego

$$z^* = \frac{S_{ys}}{A^*}$$

4. Obliczyć ważony moment bezwładności względem osi y^*

$$J^* = J_1^* + n J_2^*$$

5. Dokonać redukcji sił przekrojowych do środka układu ważonego - obliczyć M^* .

6. Obliczyć naprężenia normalne w częściach składowych przekroju poprzecznego

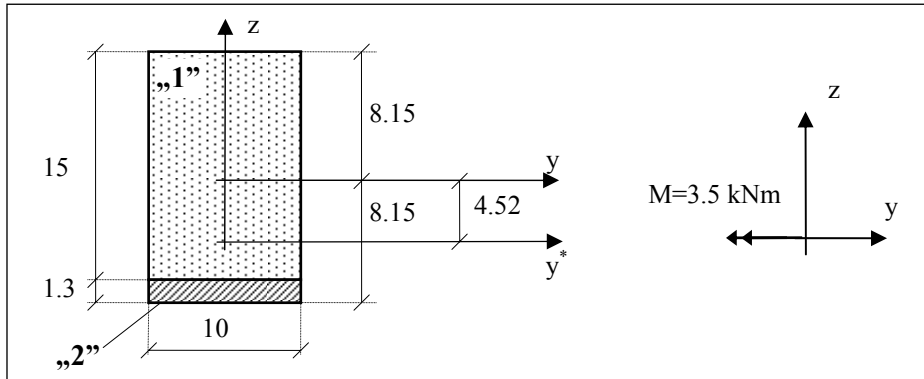
$$\sigma_{x1} = \frac{N}{A^*} + \frac{M^*}{J^*} z \quad \sigma_{x2} = n \sigma_{x1}$$

Współrzędna „z” odmierzana jest od osi ważonej y^* . Znaki naprężeń należy dobrać tak jak w przypadku „zwykłego” mimośrodowego rozciągania (naprężenie rozciągające - dodatnie, ściskające - ujemne).

4. Przykłady

Przykład 1.

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju zespolonym pokazanym na rysunku. Moment zginający $M=3.5 \text{ kNm}$ rozciąga włókna dolne. Moduły sprężystości wynoszą $E_1=7 \text{ GPa}$, $E_2=140 \text{ GPa}$.



Rozwiązanie:

Położenie osi głównych centralnych jest znane bez obliczeń. Korzystając z podanego algorytmu otrzymujemy :

$$n = 140/7 = 20$$

$$S_{ys} = 10 \times 15 \times (8.15 - 7.5) + 20 \times 10 \times 1.3 \times [-(8.15 - 0.65)] = -1852.5 \text{ cm}^3$$

$$A^* = 10 \times 15 + 20 \times 10 \times 1.3 = 410 \text{ cm}^2$$

$$z^* = -\frac{1852.5}{410} = -4.52 \text{ cm}$$

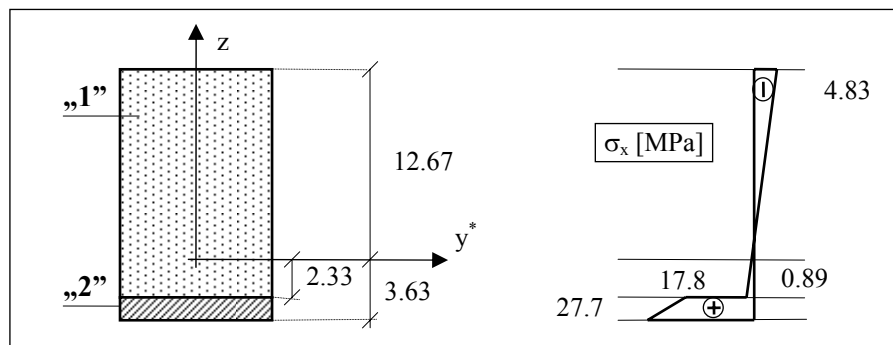
$$J^* = \frac{10 \times 15^3}{12} + 10 \times 15 \times (8.15 - 7.5 + 4.52)^2 + 20 \times \left[\frac{10 \times 1.3^3}{12} + 10 \times 1.3 \times (8.15 - 0.65 - 4.52)^2 \right] = 9167 \text{ cm}^4$$

$$M^* \equiv M = 3.5 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{x1} = -\frac{3.5}{9167 \times 10^{-8}} z \times 10^{-3} \text{ [MPa]} = -38.2 z \text{ [MPa]}$$

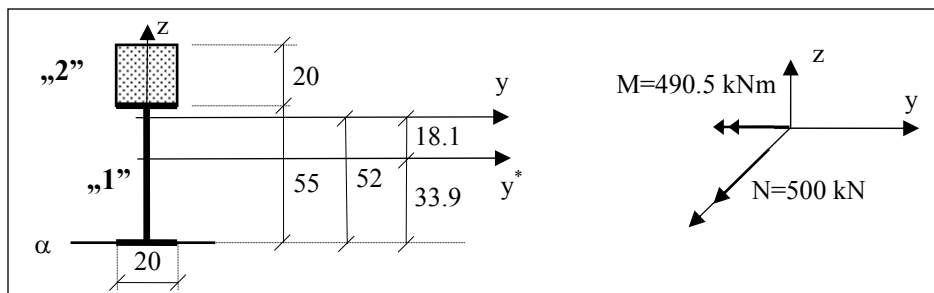
$$\sigma_{x2} = 20 \times (-38.2 z) = -763.6 z \text{ MPa}$$

Rozkład naprężeń przedstawia następujący rysunek



Przykład 2.

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju zespolonym pokazanym na rysunku. Moment zginający $M=490.5$ kNm rozciąga włókna dolne, rozciągająca siła podłużna $N=500$ kN. Część przekroju „1” to dwuteownik „550” wykonany ze stali St3S, materiał „2” to beton B20. $E_1=210$ GPa, $E_2=23$ GPa.



Rozwiązanie:

Z tablic kształtowników odczytujemy dane dla dwuteownika „550” : $A_1=213$ cm² , $J=99180$ cm⁴. W celu wyznaczenia położenia osi głównych centralnych bezwładności należy najpierw określić położenie środka ciężkości przekroju. Wykorzystamy dowolnie przyjętą (np. wzdłuż dolnej krawędzi dwuteownika) prostą α .

$$S_{\alpha} = 400 \times 65 + 213 \times 27.5 = 31858 \text{ cm}^3 \quad A = 400 + 213 = 613 \text{ cm}^2$$

$$z_c = 31858/613 = 52 \text{ cm}$$

Korzystając z podanego wcześniej algorytmu otrzymujemy :

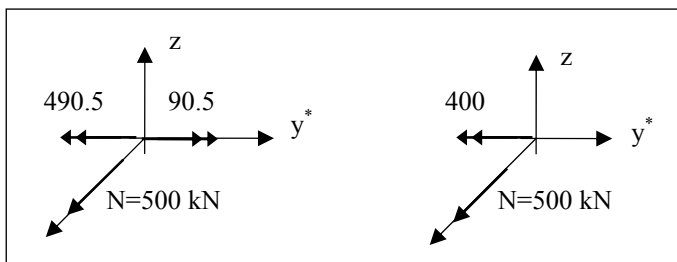
$$n = 23 / 210 = 0.11$$

$$S_{ys} = 213 \times [-(52 - 27.5)] + 0.11 \times 400 \times (65 - 52) = - 4647 \text{ cm}^3$$

$$A^* = 213 + 0.11 \times 400 = 257 \text{ cm}^2$$

$$z^* = - 4647/257 = - 18.1 \text{ cm}$$

$$J^* = 99180 + 213 \times (33.9 - 27.5)^2 + 0.11 \times [20^4/12 + 400 \times (65 - 33.9)^2] = 151928 \text{ cm}^4$$

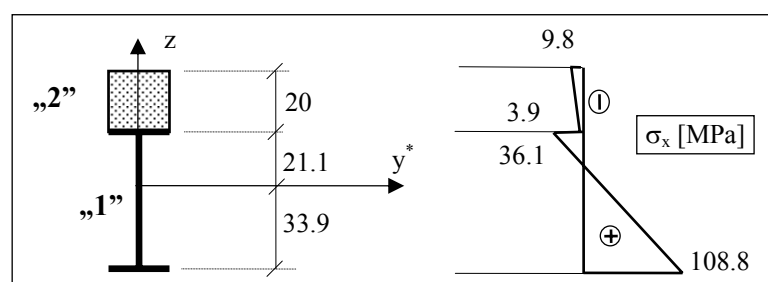


$$M^* = 490.5 - 500 \times 0.181 = 400 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{x1} = \frac{500}{257 \times 10^{-4}} \times 10^{-3} - \frac{400}{151928 \times 10^{-8}} \times 10^{-3} z = 19.5 - 263.3 z \quad [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{x2} = n \sigma_{x1} = 2.15 - 28.9 z \quad [\text{MPa}]$$

Rozkład naprężeń przedstawiono na rysunku :



Przykład 3.

Sprawdzić czy belka wolnopodparta o długości $L=4$ m wykonana z położonej na płaski deski o przekroju prostokątnym o wymiarach 1.8×10.0 cm jest w stanie przenieść siłę $P=100$ N, umieszczoną w połowie rozpiętości belki. W przypadku odpowiedzi negatywnej sprawdzić czy belka po podbiciu jej od spodu blachą aluminiową o grubości 0.2 cm jest w stanie przenieść siłę P . Stałe materiałowe wynoszą:

- dla drewna (materiał „1”) : $E_1=10$ GPa , $R_{1r} = 7$ MPa, $R_{1s} = 10$ MPa
- dla aluminium (materiał „2”) : $E_2=70$ GPa , $R_{2r} \cong R_{2s} = R_2 = 50$ MPa

Rozwiązanie:**A. Belka drewniana**

Moment maksymalny wynosi

$$M_{\max} = PL / 4 = 100 \times 4 / 4 = 100 \text{ Nm} = 0.1 \text{ kNm}$$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju

$$W = b h^2 / 6 = 10 \times 18^2 / 6 = 5.4 \text{ cm}^3 = 5.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

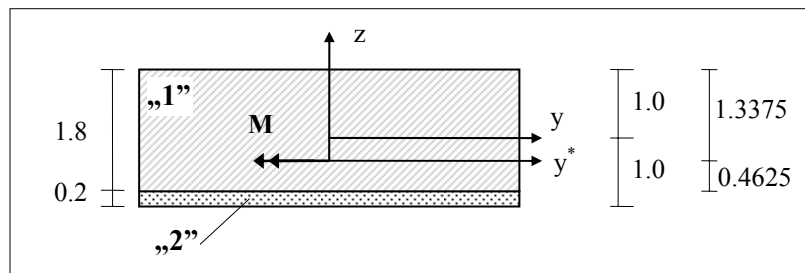
Naprężenie maksymalne rozciągające

$$\sigma_{\max r} = M_{\max} / W = 18.5 \text{ MPa} > R_{1r}$$

Naprężenie maksymalne ściskające

$$\sigma_{\max s} = M_{\max} / W = 18.5 \text{ MPa} > R_{1s}$$

Tak więc belka drewniana nie jest w stanie przenieść siły P ., gdyż zarówno maksymalne naprężenia rozciągające, jak i ściskające przekraczają odpowiednio wytrzymałość na rozciąganie i na ściskanie.

B. Belka zespolona

Korzystając z podanego wcześniej algorytmu otrzymujemy :

Waga

$$n = 70 / 10 = 7$$

Ważony moment statyczny

$$S_{ys} = 10 \times 1.8 \times 0.1 + 7 \times 10 \times 0.2 \times (-0.9) = -10.8 \text{ cm}^3$$

Ważony pole przekroju

$$A^* = 10 \times 1.8 + 7 \times 10 \times 0.2 = 32 \text{ cm}^2$$

Położenie osi ważonej

$$z^* = -10.8 / 32 = -0.3375 \text{ cm}$$

Ważony moment bezwładności

$$J^* = \frac{10 \times 1.8^3}{12} + 18 \times (0.9 - 0.4625)^2 + 7 \times \left[\frac{10 \times 0.2^3}{12} + 2 \times (0.4625 + 0.1)^2 \right] = 12.78 \text{ cm}^4 = 12.78 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Naprężenia w warstwie drewnianej

$$\sigma_1 = - \frac{0.1}{12.78 \times 10^{-8}} \times 10^{-3} z \quad [\text{MPa}] = -782.5 z \quad [\text{MPa}]$$

maksymalne rozciągające

$$\sigma_{1\max r} = -782.5 \times (-0.004625) = 3.62 \text{ MPa} < R_{1r}$$

maksymalne ściskające

$$|\sigma_{1\max s}| = |-782.5 \times 0.013375| = 10.5 \text{ MPa} > R_{1s}$$

Naprężenia w warstwie aluminiowej

$$\sigma_2 = 7 \sigma_1 = -5477.5 z \quad [\text{MPa}]$$

minimalne rozciągające

$$\sigma_{2\min r} = -5477.5 \times (-0.004625) = 25.3 \text{ MPa} < R_2$$

maksymalne rozciągające

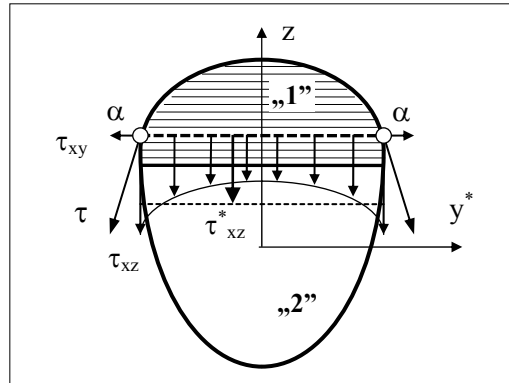
$$\sigma_{2\min s} = -5477.5 \times (-0.006625) = 36.3 \text{ MPa} < R_2$$

Także belka zespolona nie przeniesie siły P , gdyż przekroczona jest o 5% wytrzymałość warstwy drewnianej na ściskanie.

5. NAPRĘŻENIA STYCZNE

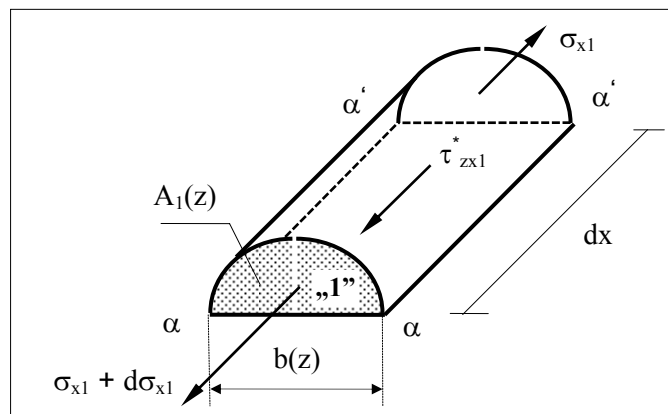
5.1. Założenia

- materiały ułożone są tak, że wykonując przekrój prostą $z=const.$ przecinamy tylko jeden materiał,
- przyjmujemy założenia identyczne jak w przypadku zginania poprzecznego prętów jednorodnych
- zamiast rzeczywistego rozkładu naprężenia τ_{xz} przyjmuje się uśredniony rozkład o stałej wartości τ_{xz}^*



5.2. Uśrednione naprężenie styczne τ_{xz}

- przekrój przez materiał „1”



* warunek równowagi sił

$$\iint_{A_1(z)} (\sigma_{x1} + d\sigma_{x1}) dA - \iint_{A_1(z)} \sigma_{x1} dA + \tau_{zx1}^* b(z) dx = 0 \quad (24)$$

$$\iint_{A_1(z)} d\sigma_{x1} dA = -\tau_{zx1}^* b(z) dx \quad (25)$$

- założenie : siła podłużna N jest przedziałami co najwyżej stała; stąd :

$$d\sigma_{x1} = \frac{dM^*(x)}{J^*} z \quad (26)$$

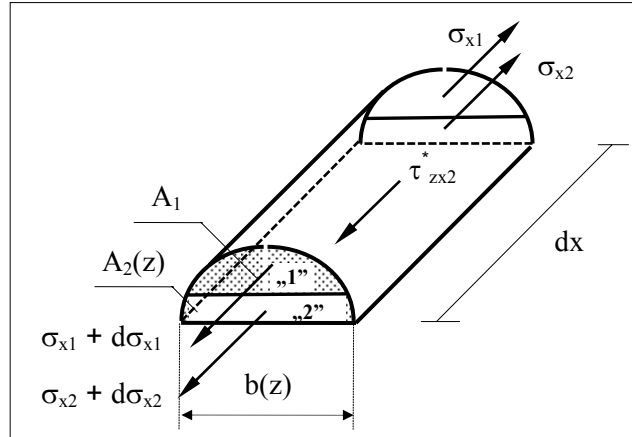
$$\frac{dM^*(x)}{J^*} \iint_{A_1(z)} z dA = -\tau_{zx1}^* b(z) dx \quad (27)$$

$$\iint_{A_1(z)} z dA \tau_{zx1}^* = -\frac{dM^*(x)}{dx} \frac{1}{J^*} \frac{1}{b(z)} \bar{S}_1^*(z) \quad (28)$$

$$\tau_{xz1} = \tau_{zx1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{zx1}^* \equiv \tau_{xz1} = \frac{Q(x) \bar{S}_1^*(z)}{J^* b(z)}} \quad (29)$$

gdzie $A_1(z)$ oznacza odciętą część przekroju należącą całkowicie do obszaru „1”, $\bar{S}_1^*(z)$ - moment statyczny obszaru $A_1(z)$ względem osi ważonej y^* .

- przekrój przez materiał „2”



* warunek równowagi sił

$$\iint_{A_1} (\sigma_{x1} + d\sigma_{x1}) dA + \iint_{A_2(z)} (\sigma_{x2} + d\sigma_{x2}) dA - \iint_{A_1} \sigma_{x1} dA - \iint_{A_2(z)} \sigma_{x2} dA + \tau_{zx2}^* b(z) dx = 0 \quad (30)$$

$$\iint_{A_1} d\sigma_{x1} dA + \iint_{A_2(z)} d\sigma_{x2} dA = -\tau_{zx2}^* b(z) dx \quad (31)$$

- założenie : siła podłużna N jest przedziałami co najwyżej stała; stąd :

$$d\sigma_{x1} = \frac{dM^*(x)}{J^*} z \quad d\sigma_{x2} = n \frac{dM^*(x)}{J^*} z \quad (32)$$

$$\frac{dM^*(x)}{J^*} \left[\iint_{A_1} z dA + n \iint_{A_2(z)} z dA \right] = -\tau_{zx2}^* b(z) dx \quad (33)$$

$$\tau_{zx2}^* = \frac{Q(x)}{J^* b(z)} [S_1^* + n \bar{S}_2^*(z)] \quad (34)$$

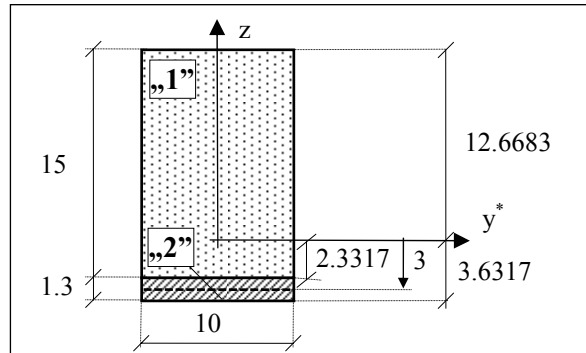
$$\tau_{xz2} = \tau_{zx2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{xz2}^* \equiv \tau_{zx2} = \frac{Q(x)}{J^* b(z)} [S_1^* + n \bar{S}_2^*(z)]} \quad (35)$$

gdzie $A_2(z)$ oznacza tę część odciętej części przekroju, która należy do obszaru „2”, S_1^* oznacza moment statyczny obszaru A_1 , zaś $\bar{S}_2^*(z)$ to moment statyczny obszaru $A_2(z)$ względem osi ważonej y^* .

5.3. Przykłady

Przykład 1.

W przekroju zespolonym jak na rysunku obliczyć naprężenie styczne w miejscu połączenia warstw oraz we włóknach określonych współrzędną $z = -3$ cm. Siła poprzeczna $Q=10$ kN. Moduły sprężystości wynoszą $E_1=7$ GPa, $E_2=140$ GPa.



Rozwiązanie :

Przy rozwiązaniu tego zadania posłużymy się rozwiązaniem przykładu 1 z pkt.4, zwiększając jedynie dokładność wyników. Potrzebne wielkości geometryczne pokazano na rysunku. Przypomnijmy ponadto, że: $n=20$, $J^*=9167$ cm⁴.

• połączenie warstw

obliczając naprężenie od strony warstwy „1” wyznaczmy najpierw moment statyczny warstwy „1” :

$$\bar{S}_1^* \equiv S_1^* = 15 \times 10 \times (7.5 - 2.3317) = 775.24 \text{ cm}^3$$

wg wzoru (29)
$$\tau_{xz1} = \frac{Q(x) \bar{S}_1^*(z)}{J^* b(z)} = \frac{10 \times 775.24 \times 10^{-6}}{9167 \times 10^{-8} \cdot 0.1} 10^{-3} = 0.846 \text{ MPa}$$

naprężenie w miejscu połączenia można także policzyć od strony warstwy „2”. Moment statyczny tej warstwy wynosi

$$\bar{S}_2^* \equiv S_2^* = 1.3 \times 10 \times (2.3317 + 0.65) = 38.762 \text{ cm}^3$$

wg wzoru (35)
$$\tau_{xz2} = \frac{Q(x)}{J^* b(z)} n \bar{S}_2^*(z) = \frac{10 \times 20 \times 38.762 \times 10^{-6}}{9167 \times 10^{-8} \cdot 0.1} 10^{-3} = 0.846 \text{ MPa}$$

• warstwa $z = -3$ cm

naprężenia w warstwie „2” wyznaczmy ze wzoru (35)
$$\tau_{xz2} = \frac{Q(x)}{J^* b(z)} [S_1^* + n \bar{S}_2^*(z)]$$

korzystając z „górnej” odciętej części przekroju obliczamy jej moment statyczny:

$$S_1^* = 775.24 \text{ cm}^3 \quad \bar{S}_2^* = (3 - 2.3317) \times 10 \times \left(2.3317 + \frac{3 - 2.3317}{2} \right) = 17.816 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz2} = \frac{10 \times (775.24 - 20 \times 17.816) \times 10^{-6}}{9167 \times 10^{-8} \cdot 0.1} 10^{-3} = 0.457 \text{ MPa}$$

naprężenie we włóknach $z = -3$ cm można również policzyć korzystając z „dolnej” odciętej części przekroju. Moment statyczny tej warstwy wynosi

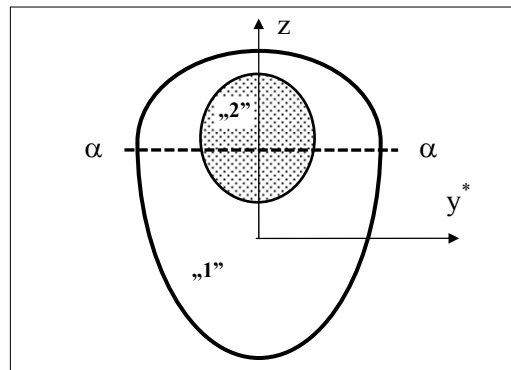
$$\bar{S}_2^* = (3.6317 - 3) \times 10 \times (3 + 0.6317 / 2) = 20.946 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz2} = \frac{10 \times 20 \times 20.946 \times 10^{-6}}{9167 \times 10^{-8} \cdot 0.1} 10^{-3} = 0.457 \text{ MPa}$$

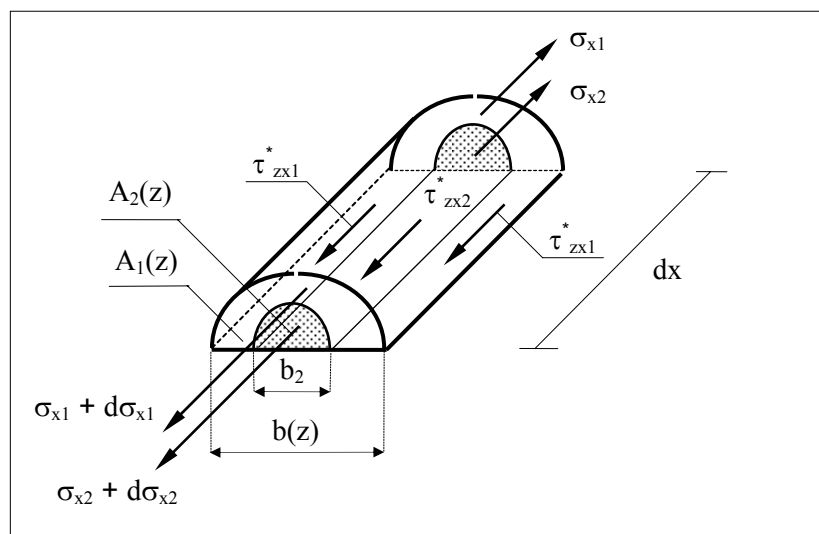
6. NAPRĘŻENIA STYCZNE - PRZEKRÓJ NIEWARSTWOWY

6.1. Założenia

- materiały ułożone są symetrycznie względem osi z,
- przyjmujemy założenia identyczne jak w przypadku zginania poprzecznego prętów jednorodnych
- zamiast rzeczywistego rozkładu naprężenia τ_{xz} przyjmuje się uśredniony rozkład o stałej wartości τ_{xz}^*
- siła podłużna N jest przedziałami co najwyżej stała
- odkształcenie kątowe γ_{xz} ($= \gamma_{zx}$) we wszystkich punktach prostej $z=const.$ (przekrój $\alpha-\alpha$) są takie same, tzn. $\gamma_{xz1} = \gamma_{xz2}$



6.2. Uśrednione naprężenie styczne τ_{xz}



* warunek równowagi sił

$$\iint_{A_1(z)} (\sigma_{x1} + d\sigma_{x1}) dA + \iint_{A_2(z)} (\sigma_{x2} + d\sigma_{x2}) dA - \iint_{A_1(z)} \sigma_{x1} dA - \iint_{A_2(z)} \sigma_{x2} dA + \tau_{zx1}^* b_1(z) dx + \tau_{zx2}^* b_2(z) dx = 0 \quad (36)$$

gdzie $b(z) = b_1(z) + b_2(z) \quad (37)$

$$\iint_{A_1(z)} d\sigma_{x1} dA + \iint_{A_2(z)} d\sigma_{x2} dA = -\tau_{zx1}^* b_1(z) dx - \tau_{zx2}^* b_2(z) dx \quad (38)$$

$$d\sigma_{x1} = \frac{dM^*(x)}{J^*} z \quad d\sigma_{x1} = n \frac{dM^*(x)}{J^*} z \quad (39)$$

$$\frac{dM^*(x)}{dx} \frac{1}{J^*} \left[\iint_{A_1(z)} z dA + n \iint_{A_2(z)} z dA \right] = -\tau_{zx1}^* b_1(z) - \tau_{zx2}^* b_2(z) \quad (40)$$

Z prawa Hooke'a oraz na mocy przyjętego założenia o stałych odkształceniach kątowych otrzymujemy relacje:

$$\tau_{zx1}^* = G_1 \gamma_{zx} \quad \tau_{zx2}^* = G_2 \gamma_{zx} \quad (41)$$

$$\frac{Q(x) [\bar{S}_1^*(z) + \bar{S}_2^*(z)]}{J^*} = [G_1 b_1(z) + G_2 b_2(z)] \gamma_{zx} \quad (42)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{Q(x) [\bar{S}_1^*(z) + \bar{S}_2^*(z)]}{J^* [G_1 b_1(z) + G_2 b_2(z)]} \quad (43)$$

gdzie :

- $A_1(z), A_2(z)$ - odcięta część przekroju należąca do obszaru odpowiednio „1” lub „2”,
- $\bar{S}_1^*(z), \bar{S}_2^*(z)$ - moment statyczny obszaru odpowiednio $A_1(z)$ lub $A_2(z)$ względem osi ważonej y^* .

Z równania (41) po wykorzystaniu (43) otrzymujemy rozkłady naprężeń stycznych w poszczególnych materiałach tworzących przekrój poprzeczny w postaci :

$$\boxed{\tau_{xz1} = G_1 \frac{Q(x) [\bar{S}_1^*(z) + \bar{S}_2^*(z)]}{J^* [G_1 b_1(z) + G_2 b_2(z)]}} \quad \boxed{\tau_{xz2} = G_2 \frac{Q(x) [\bar{S}_1^*(z) + \bar{S}_2^*(z)]}{J^* [G_1 b_1(z) + G_2 b_2(z)]}} \quad (44)$$