Podstawowe informacje nt.

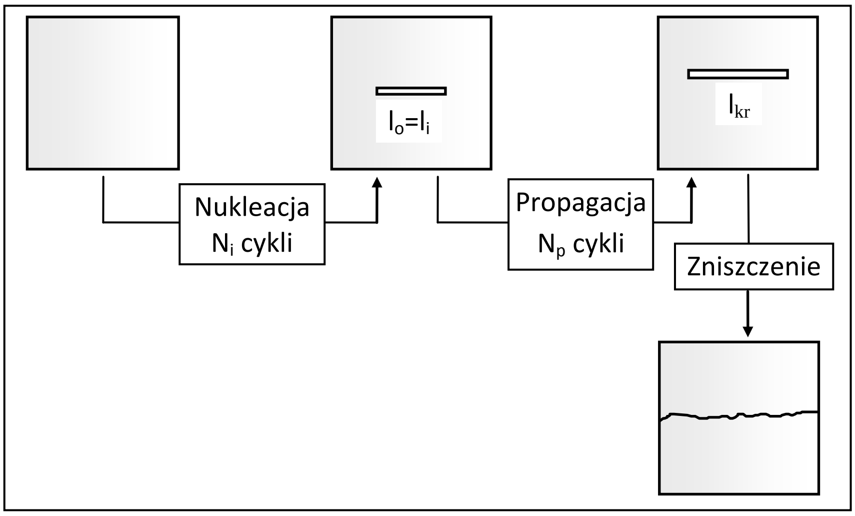
LINIOWA MECHANIKA PĘKANIA

Wytrzymałość materiałów II

WZROST SZCZELIN ZMĘCZENIOWYCH

Przedstawione w poprzednich rozdziałach różne kryteria inicjacji wzrostu szczeliny (kryteria pękania) - niezależnie od swej natury - miały jeden wspólny cel, a mianowicie umożliwienie oceny, jak duże obciążenie σ^{∞} można przyłożyć do ciała, aby istniejąca w nim szczelina o określonej długości początkowej l_o nie powiększała się. Chodziło zatem o wyznaczenie tzw. obciążenia krytycznego. Cel kryteriów pękania można także sformułować alternatywnie - dla znanego obciążenia zewnętrznego wyznaczyć maksymalną dopuszczalną długość szczeliny, tzw. długość krytyczną. Inną wspólną cechą wszystkich przedstawionych kryteriów pękania jest to, że nie uwzględniają one sposobu, w jaki szczelina o początkowej długości l_o osiąga swoją wartość krytyczną. Tymczasem od dawna wiadomo, że mały defekt istniejący w elemencie konstrukcyjnym w normalnych warunkach pracy tego urządzenia może okazać się stabilny przez cały okres eksploatacji elementu, zaś przy zmianie tych warunków może okazać się niebezpieczny już po krótkim okresie eksploatacji. Typowym przykładem może tu być zmiana zachowania szczeliny w zależności od rodzaju obciążenia. Zupełnie inny jest obraz zachowania się szczeliny przy obciążeniu stałym, a inny przy obciążeniu zmiennym (np. cyklicznie zmiennym). Analiza licznych katastrof mostowych w XIX wieku wykazała, że ich przyczyną były obciążenia cyklicznie zmienne, których amplituda nie przekraczała połowy dopuszczalnego obciążenia statycznego. Decydującą rolę w powstawaniu katastrof odgrywała tu więc nie wielkość obciążenia, ale jego zmienność w czasie. Przykład ten wskazuje na znaczenie w mechanice obciążeń cyklicznie zmiennych, szczególnie groźnych dla bezpiecznej pracy konstrukcji, bądź jej elementów.

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną podstawowe pojęcia i koncepcje dotyczące ciała ze szczeliną, poddanego działaniu obciążeń zmiennych, a w szczególności zagadnienie wzrostu szczeliny. Mówiąc o wzroście szczeliny mamy na myśli jej stabilne podrastanie od długości l_o do długości krytycznej l_{kr}, osiągnięcie której przyjmuje się za zniszczenie elementu. W mechanice pękania zniszczenie pod wpływem obciążeń zmiennych określa się terminem „zniszczenie zmęczeniowe". Kolejne etapy procesu rozwoju szczeliny przedstawiono na Rys. 1.



Rys.1. Etapy rozwoju szczelin zmęczeniowych

Etap początkowy to nukleacja (inicjacja) makroszczeliny, czyli szczeliny o długości wystarczająco dużej, aby opis jej zachowania na gruncie mechaniki ciała odkształcalnego był wystarczająco dokładny. Uważa się, że obciążenie cyklicznie zmienne powoduje kumulowanie się energii w pobliżu wewnętrznych pustek bądź wtrąceń obcych. To z kolei prowadzi do wzrostu i łączenia się tych mikrodefektów, aż do utworzenia po pewnej liczbie cykli N_i makropęknięcia, określanego mianem szczeliny zmęczeniowej. Etap drugi to etap wzrostu (propagacji) szczeliny zmęczeniowej od długości l_i do długości l_{kr}. Okres trwania tego etapu określony jest liczbą cykli N_p. Ostatni etap to niestabilny wzrost szczeliny, utożsamiany ze zniszczeniem zmęczeniowym.

Z powyższych rozważań wynika, że całkowita liczba cykli obciążenia, jaką może bezpiecznie przenieść element konstrukcyjny (zwana jest ona niekiedy okresem życia elementu) jest sumą liczby cykli do inicjacji pęknięcia N_i i liczby cykli odpowiadającej jego propagacji N_p. Wartości liczbowe obu tych wielkości zależą od wielu czynników, m.in. od rodzaju materiału, parametrów charakteryzujących obciążenie oraz geometrii szczeliny - trudno zatem podać jakieś ogólne prawidłowości. Jest to tym trudniejsze, że pierwszy etap - inicjacja szczeliny zmęczeniowej - jest wciąż słabo poznany, tak od strony doświadczalnej, jak i teoretycznej. W wielu jednak przypadkach przyjmuje się, że dla oceny trwałości konstrukcji miarodajna jest faza propagacji szczeliny zmęczeniowej - wystarcza zatem znajomość liczby cykli N_p.

Przedmiotem dalszych rozważań w tym rozdziale będzie ciało zawierające wstępną makroszczelinę, a mówiąc precyzyjniej zajmować się będziemy wzrostem szczeliny zmęczeniowej. Celem analizy będzie określenie trwałości zmęczeniowej takiego ciała.

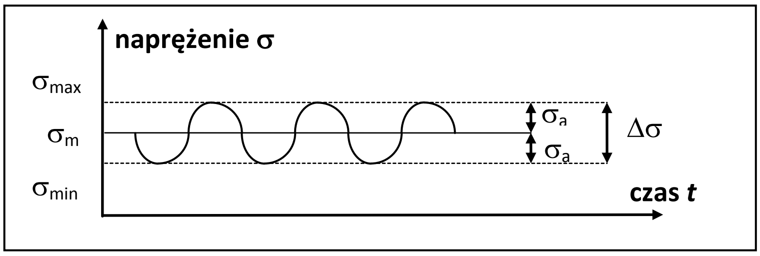
1. SZCZELINA ZMĘCZENIOWA PRZY OBCIĄŻENIU CYKLICZNYM O STAŁEJ AMPLITUDZIE

Rozważmy podstawowe dla praktyki inżynierskiej zagadnienie wzrostu szczeliny przy obciążeniu cyklicznie zmiennym o stałej amplitudzie. Niezależnymi parametrami opisującymi naprężenia wywołane tym obciążeniem są: naprężenie średnie σ_m, amplituda naprężenia σ_a oraz częstotliwość ω (w celu określenia wielkości wyłącznie naprężenia znajomość amplitudy nie jest konieczna). Możliwy jest oczywiście inny dobór parametrów naprężeniowych – przykładowo, mogą nimi być naprężenie maksymalne σ_{max} i minimalne σ_{min} lub też zakres zmienności naprężenia $\Delta\sigma$ i jeden z parametrów σ_{max}, σ_{min}, σ_m.

Często stosowanym parametrem jest tzw. współczynnik asymetrii cyklu R. Może on zastąpić jeden z wymienionych wyżej parametrów. Podstawowe parametry zmęczeniowe zestawiono w Tab. 1 - pokazano je również na Rys. 2.

Tab. 1. Określenia i definicje parametrów naprężeń zmęczeniowych.

PARAMETR	OZNACZENIE	DEFINICJA
naprężenie maksymalne	σ_{max}	-
naprężenie minimalne	σ_{min}	-
naprężenie średnie	σ_m	$\sigma_m = 1/2\left(\sigma_{max} + \sigma_{min}\right)$
amplituda naprężenia	σ_a	$\sigma_a = 1/2\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)$
zakres zmienności naprężenia	$\Delta\sigma$	$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$
współczynnik asymetrii naprężenia	R	$R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$



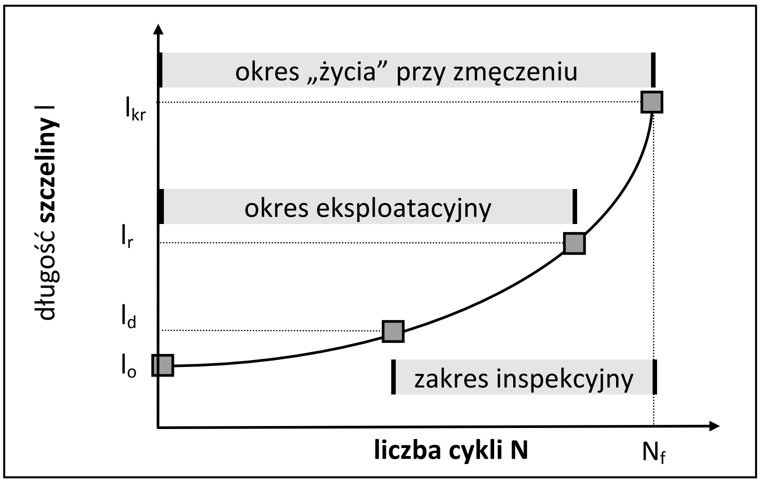
Rys. 2. Podstawowe parametry charakteryzujące wzrost szczelin zmęczeniowych.

Z określeń zamieszczonych w Tab. 1 wynika następujący związek między parametrami zmęczeniowymi:

$$\Delta\sigma = (1 - R)\,\sigma_{max} \tag{1}$$

Wartość R=0 oznacza cykl, w którym naprężenie rośnie od wartości zerowej do wartości maksymalnej, a następnie maleje ponownie do zera - naprężenia nie zmieniają zatem znaku w całym procesie obciążania elementu konstrukcyjnego. Naprężenia zmieniające się zgodnie z takim cyklem noszą nazwę tętniących. Często występującym przypadkiem jest cykl o współczynniku R = -1. W tym przypadku naprężenia oscylują wokół naprężenia średniego σ_m=0.

Przebieg typowej krzywej opisującej zależność długości szczeliny od liczby cykli pokazano na Rys. 3.
Rzeczywista początkowa długość szczeliny oznaczona jest jako l_o - musi ona być na tyle duża, aby można do opisu zachowania szczeliny stosować mechanikę pękania. W praktyce może się okazać, że jest ona zbyt mała, aby można ją zidentyfikować przy pomocy stosowanych metod i przyrządów pomiarowych w badaniach nieniszczących. Najmniejszą możliwą do wykrycia w ten sposób długość szczeliny oznaczono jako l_d - tę długość będziemy rozumieć w dalszej analizie jako początkową (l_d wyznacza tzw. zakres inspekcyjny, tzn. zakres, w którym możliwa jest doświadczalna obserwacja szczeliny). Na skutek działającego obciążenia zmiennego szczelina powoli podrasta od długości początkowej aż do pewnej długości l_r, kiedy to następuje wyraźne przyspieszenie ruchu szczeliny. Ten okres w pracy elementu ze szczeliną uważa się za użyteczny okres eksploatacyjny. Po osiągnięciu przez szczelinę długości krytycznej następuje lawinowy, niekontrolowany jej wzrost utożsamiany ze zniszczeniem elementu - liczba cykli odpowiadająca zniszczeniu wynosi N_f .
Wyznaczenie okresu życia elementu, określonego liczbą cykli do zniszczenia N_f, jak również krzywej l= l(N) stanowi podstawowe zadanie analizy wzrostu szczeliny przy zmęczeniu.



Rys. 3. Przykładowa krzywa propagacji szczeliny zmęczeniowej (obciążenie o stałej amplitudzie).

1.1. Krzywa prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowej

Ogólnie akceptowanym poglądem jest ten, że mechanizm wzrostu szczeliny przy obciążeniu zmiennym związany jest z lokalnym polem naprężeń w pobliżu wierzchołka szczeliny. Uważa się, że nawet przy bardzo małych obciążeniach, wskutek dużych koncentracji naprężeń w okolicach wierzchołkowych ostrej szczeliny występują odkształcenia plastyczne. Uzewnętrzniają się one w fazie obciążania (wzrostu wartości obciążenia cyklicznego) powstawaniem poślizgów płaszczyzn atomowych, w wyniku których następuje powiększenie długości szczeliny oraz stępienie (zaokrąglenie) jej wierzchołków. W fazie odciążenia (zmniejszania wartości obciążenia cyklicznego) zmniejsza się rozwarcie szczeliny, a wierzchołki ponownie staja się ostre. W cyklu wzrostu obciążenia powyższy proces rozpoczyna się od początku. Jest to proces nieodwracalny na skutek trwałego zburzenia struktury atomowej przy poślizgach plastycznych.

Korzystając z tego, że proces wzrostu szczeliny zmęczeniowej związany jest z lokalnym spiętrzeniem naprężeń - można przyjąć za uzasadnione powiązanie wzrostu szczeliny z wielkością współczynnika intensywności naprężeń (WIN) K - podstawowego parametru wykorzystywanego w mechanice pękania, znanego dla ogromnej ilości konfiguracji ciał, szczelin i obciążeń. Przypomnijmy, że WIN można dla dowolnej konfiguracji zapisać w postaci:

$$K = \beta\,\sigma\sqrt{\pi l} \tag{2}$$

gdzie β jest współczynnikiem (liczbowym lub funkcyjnym) związanym ze skończonymi wymiarami ciała, zaś σ oznacza przyłożone obciążenie.

Wprowadzony poprzednio jako parametr sterujący procesem zniszczenia zakres zmienności naprężenia można zastąpić zakresem zmienności WIN. Uwzględniając, że dla poszczególnego cyklu określonego zmiennością naprężenia między σ_{min}, a σ_{max} zachodzą zależności:

$$K_{min} = \beta\,\sigma_{min}\sqrt{\pi l} \tag{3}$$

$$K_{max} = \beta\,\sigma_{max}\sqrt{\pi l} \tag{4}$$

zakres zmienności WIN wyraża się równaniem:

$$\Delta K = \beta\,\Delta\sigma\sqrt{\pi l} \tag{5}$$

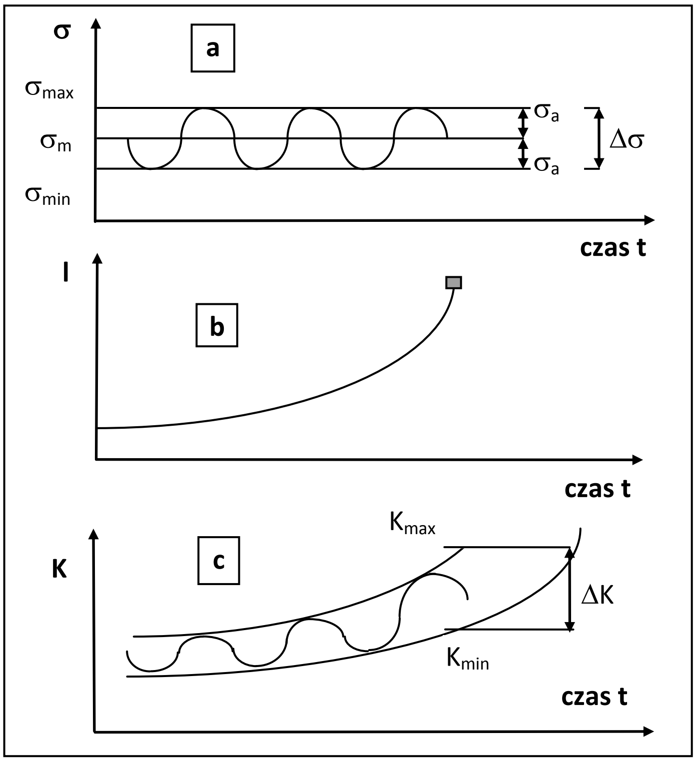
zaś współczynnik asymetrii cyklu R wynosi:

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta K = (1-R)K_{max} \tag{6}$$

Interpretację geometryczną zakresu zmienności WIN pokazano na Rys. 4.

Prędkość propagacji szczeliny zmęczeniowej definiuje się jako przyrost długości szczeliny przypadający na jeden cykl - wyraża się ona zatem pochodną dl/dN o wymiarze [mm/cykl]. Korzystając ze zdefiniowanych uprzednio niezależnych parametrów sterujących procesem zmęczenia równanie prędkości propagacji szczeliny zmęczeniowej można zapisać w postaci:

$$\frac{dl}{dN} = f(\Delta K, R) \tag{7}$$



Rys. 4. Parametry stosowane w opisie wzrostu szczeliny zmęczeniowej: a) obciążenie zmienne, b) krzywa wzrostu szczeliny, c) zakres zmienności współczynnika intensywności naprężeń

Należy wyraźnie powiedzieć, że jak dotychczas nie udało się znaleźć funkcji (7) na drodze teoretycznej. Jest to związane z zasadniczymi trudnościami wynikającymi z konieczności powiązania makroskopowych parametrów propagacji szczeliny, tzn. ΔK i R, z mikroskopowymi - zachodzącymi na poziomie płaszczyzn atomowych procesami poślizgów, odpowiedzialnymi za nieodwracalny wzrost szczeliny przy obciążeniu zmęczeniowym. Pozostaje w tej sytuacji tylko droga eksperymentalna, w oparciu o którą można pokusić się o pewne uogólnienia prowadzące do czysto empirycznych formuł opisujących funkcję o ogólnej postaci wyrażonej równaniem (7).

W mechanice pękania do opisu wzrostu szczelin zmęczeniowych przyjęło się używać właśnie krzywą prędkości (a nie krzywą wzrostu długości l(N)) choć nie uzyskuje się jej wprost z doświadczenia, ale poprzez przetworzenie krzywej wzrostu. Poniżej przedstawione będą podstawowe procedury służące wyznaczeniu obu krzywych.

1.2. Równania prędkości propagacji szczeliny zmęczeniowej

Powszechnie stosowanym równaniem opisującym prędkość propagacji szczeliny zmęczeniowej jest empiryczna zależność wprowadzona do literatury wspólnie przez Parisa i Erdogana, ale znane jest powszechnie pod nazwą „równanie Parisa”. Stałe m_p i C_p wyznacza się z danych doświadczalnych - wystarcza oczywiście znajomość dwóch punktów (ΔK, dl/dN), ale lepsze efekty daje wyznaczenie stałych z większej ilości punktów pomiarowych. Równanie Parisa ma postać:

$$\frac{dl}{dN} = C_p \left(\Delta K \right)^{m_p} \tag{8}$$

Stała m_p zawiera się dla większości materiałów w zakresie 3÷5, stała C_p silniej zależy od materiału, a co więcej zależy od jednostek w jakich prowadzone są obliczenia.

Orientacyjne wartości tych stałych dla niektórych materiałów zestawiono w tab. 2. Dane dotyczą cyklu o współczynniku asymetrii R=0; prędkość propagacji szczeliny dl/dN wyrażona jest w mm/cykl, zaś zakres zmienności ΔK w $MPa\sqrt{m}$.

Tab. 2. Orientacyjne wartości stałych w równania Parisa.

Materiał	**Granica plastyczności R_e [MPa]**	**Wytrzymałość na rozciąganie R_m [MPa]**	C_p	m_p
Stal 18G2A	400	560	2×10^{-12}	3
Stal 09G2	550	650	8×10^{-12}	3
Stal 20G	280	460	2×10^{-11}	3
Stal zbiornikowa A533	350	560÷700	2×10^{-11}	2.2
Stal nierdzewna (0.02%C, 18%Ni)	1700	1960	8×10^{-10}	2.2
Stop aluminium PA7	420	510	7×10^{-11}	4

Istnieją proste wzory empiryczne dla określonych klas materiałów, które wiążą stałe *m* i *C* w równaniu Parisa z wartościami granicy plastyczności R_e i wytrzymałości na rozciąganie R_m. Pozwalają one określić choćby szacunkowo m i C, w przypadku gdy zachodzi konieczność wykonania obliczeń zmęczeniowych, a brak jest danych doświadczalnych dotyczących materiału. Do tej kategorii należą np. relacje odnoszące się do dużej grupy stali, zaproponowane przez Takashimę - mają one następujące postaci:

$$\log C = 0.00483 R_e - 12.432$$
$$\log C = 0.00556 R_m - 13.726 \tag{9}$$

$$m = 4.52 - 0.0026 R_e$$
$$m = 5.19 - 0.00297 R_m \tag{10}$$

1.3. Czas życia elementu ze szczeliną zmęczeniową

Powiedziano już uprzednio, że celem analizy zagadnienia wzrostu szczelin zmęczeniowych jest wyznaczenie krzywej propagacji szczeliny oraz określenie liczby cykli, po której dochodzi do zniszczenia elementu. Liczba ta, oznaczona na Rys. 3 symbolem N_f określa tzw. czas życia elementu ze szczeliną zmęczeniową. W przypadku omawianych tu obciążeń cyklicznych o stałej amplitudzie czas życia można wyznaczyć stosunkowo prosto, pod warunkiem, że znane są parametry obciążenia oraz postać współczynnika intensywności naprężeń (2), a w zasadzie współczynnika skończonych wymiarów ciała β - z reguły określonego funkcyjnie lub tabelarycznie.

Z równania (7) wynika relacja:

$$dN = \frac{dl}{f(\Delta K, R)} \tag{11}$$

Stąd, po scałkowaniu otrzymuje się liczbę cykli do zniszczenia lub liczbę określoną wymaganiami kontrolnymi w postaci:

$$N_f = \int_{l_o}^{l_k} \frac{dl}{f(\Delta K, R)} \tag{12}$$

gdzie: l_o oznacza założoną lub stwierdzoną w elemencie długość początkową szczeliny, a l_k długość końcową szczeliny, często utożsamianą z długością krytyczną l_{kr} wyznaczaną w oparciu o jedno z kryteriów pękania.

Biorąc pod uwagę, że funkcje $f(\Delta K, R)$ mogą mieć dość kłopotliwe obliczeniowo postacie, a także to, że tę samą uwagę można odnieść do współczynnika β, należy mieć świadomość występujących przy wyznaczaniu N_f trudności rachunkowych - z reguły konieczne jest zastosowanie procedur całkowania numerycznego. Stosując nawet proste równanie Parisa (8), z równania (12), po uwzględnieniu równania (5), otrzymujemy:

$$N_f = \frac{1}{C_p} \int_{l_o}^{l_k} \frac{dl}{\left[\beta(l/W)\, \Delta\sigma \sqrt{\pi l} \right]^{m_p}} \tag{13}$$

Nawet w tak elementarnym przypadku, jak obciążenie cykliczne o stałej amplitudzie $\Delta\sigma$ (niezależnej od długości szczeliny) działające na pasmo prostokątne o skończonych wymiarach ze szczeliną centralną obliczenia w myśl równania (13) muszą być wykonywane numerycznie. Decyduje o tym wielomianowa postać współczynnika $\beta = \beta$ (l/W).

Powiedzmy na zakończenie wyraźnie, że przedstawiony tu szczegółowo przypadek obciążeń cyklicznych o stałej amplitudzie, jakkolwiek ważny z praktycznego punktu widzenia, występuje w pracy konstrukcji inżynierskich rzadziej niż przypadek obciążeń zmiennych o amplitudzie zmiennej. Przypadek ten będzie jest opisany w pełnej wersji podręcznika dostępnego na stronie internetowej autora.

1.4. PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1

Tarcza o wymiarach wielokrotnie większych od długości szczeliny o długości $2l_o$ umieszczonej centralnie w tarczy poddana jest działaniu obciążenia cyklicznie zmiennego o stałej amplitudzie i prostopadłego do kierunku szczeliny. Maksymalne i minimalne naprężenie w cyklu wynoszą odpowiednio 200 MPa i 100 MPa. W wyniku badań stwierdzono, że szczelina podrosła od długości $2l_o$=2 mm do długości $2l_b$=2.2 mm po N = 20000 cykli, natomiast wzrost długości od 2l=20 mm do $2l_b$=22 mm nastąpił po N=1000 cykli. Odporność materiału tarczy na pękanie wynosi K_c=60 MPa $m^{1/2}$. Wyznaczyć parametry równań Parisa.

Rozwiązanie:

Współczynnik intensywności naprężeń dla konfiguracji geometrycznej będącej przedmiotem zadania wyraża się równaniem:

$$K = \sigma\sqrt{\pi l} \tag{1.1}$$

- Przyrostowi długości szczeliny o początkowej długości $2l_o$=2 mm odpowiada zakres zmienności WIN wynoszący:

$$\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi\, l_o} = 100\sqrt{\pi\times\left(1\times10^{-3}\right)} = 5.60\,\mathrm{MPa}\sqrt{m} \tag{1.2}$$

Prędkość wzrostu szczeliny o początkowej długości $2l_o$=2 mm wynosi:

$$\frac{dl}{dN} \cong \frac{\Delta l}{\Delta N} = \frac{\left(1.1-1.0\right)\times10^{-3}}{20000} = 5\times10^{-9}\ \mathrm{m/cykl} \tag{1.3}$$

- Przyrostowi długości szczeliny o początkowej długości 2l=20 mm odpowiada zakres zmienności WIN wynoszący:

$$\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi l} = 100\sqrt{\pi\times\left(1\times10^{-2}\right)} = 17.72\,\mathrm{MPa}\sqrt{m} \tag{1.4}$$

Prędkość wzrostu szczeliny o początkowej długości 2l=20 mm wynosi:

$$\frac{dl}{dN} \cong \frac{\Delta l}{\Delta N} = \frac{\left(11-10\right)\times10^{-3}}{1000} = 1\times10^{-6}\ \mathrm{m/cykl} \tag{1.5}$$

Parametry równania Parisa

Zlogarytmowana postać równania Parisa (8) ma postać:

$$\log\left(\frac{dl}{dN}\right) = m_p \log\left(\Delta K\right) + \log\left(C_p\right) \tag{1.6}$$

Wstawiając do tego równania wyznaczone uprzednio zakresy zmienności WIN i prędkości wzrostu szczeliny otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych:

$$\log\left(5\times10^{-9}\right) = m_p \log\left(5.6\right) + \log\left(C_p\right) \tag{1.7}$$

$$\log\left(1\times10^{-6}\right) = m_p \log\left(17.72\right) + \log\left(C_p\right) \tag{1.8}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są następujące liczby:

$$m_p = 4.6 \qquad\qquad C_p = 1.81\times10^{-12} MN^{-4.6} m^{7.9}\,/\,\mathrm{cykl} \tag{1.9}$$

PRZYKŁAD 2

Tarcza o wymiarach wielokrotnie większych od długości szczeliny o długości $2l_o$ =10 mm, umieszczonej centralnie w tarczy, poddana jest działaniu obciążenia cyklicznie zmiennego o stałej amplitudzie i prostopadłego do kierunku szczeliny. Maksymalne i minimalne naprężenie w cyklu wynoszą odpowiednio 200 MPa i 100 MPa. Odporność materiału tarczy na pękanie wynosi K_c=60 MPa $m^{1/2}$. Prędkość wzrostu szczeliny przy zmęczeniu opisana jest równaniem:

$$\frac{dl}{dN}\left[\mathrm{m/cykl}\right] = 0.42\times10^{-11}\left(\Delta K\right)^3 \quad , \quad \Delta K\left[\mathrm{MPa}\sqrt{m}\right] \tag{2.1}$$

Sporządzić wykres wzrostu szczeliny l (N) aż do punktu jej niestabilnego wzrostu.
Zakładając, że pożądany okres życia tarczy powinien wynieść 10^6 cykli przeanalizować możliwości jego uzyskania.

Rozwiązanie:

Wyznaczmy w pierwszej kolejności krytyczną długość szczeliny l_c, tzn. długość, przy której dalszy wzrost szczeliny jest lawinowy (niestabilny). Korzystając z siłowego kryterium pękania:

$$K_I = K_c \tag{2.2}$$

a także postaci współczynnika intensywności naprężeń dla konfiguracji będącej przedmiotem zadania:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l} \tag{2.3}$$

otrzymujemy długość krytyczną:

$$\sigma_{max}\sqrt{\pi l_c} = K_c \qquad \Rightarrow \qquad l_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_c}{\sigma_{max}}\right)^2 = 28.65\,\text{mm} \tag{2.4}$$

W celu wyznaczenia wykresu wzrostu szczeliny l(N) wykorzystamy równanie (2.1). Zakres zmienności współczynnika intensywności naprężeń wynosi:

$$\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi l} \quad , \quad \Delta\sigma = 100\ \text{MPa} \tag{2.5}$$

Z równania (2.1) po wstawieniu (2.5) otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{l}\right)^{-3} dl = 0.42\times10^{-11}\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi}\right)^3 dN \tag{2.6}$$

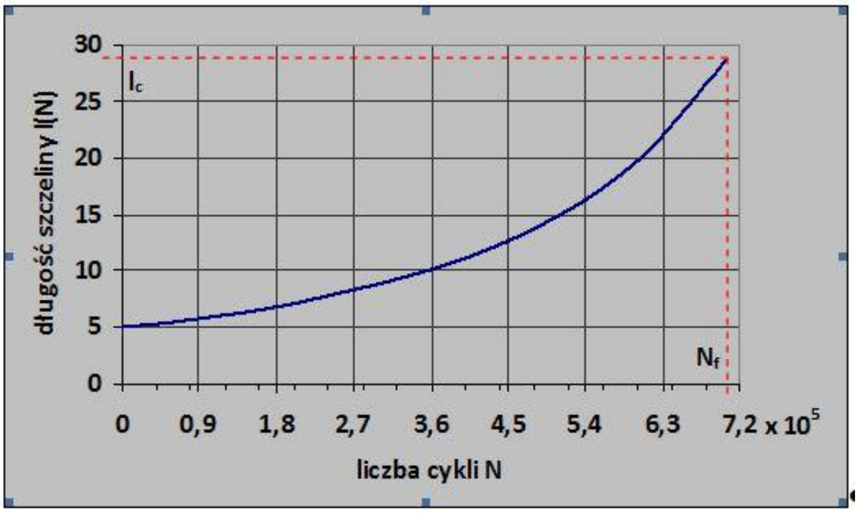
Obustronne scałkowanie równania (2.6) prowadzi do równania:

$$\int_{l_o}^{l} l^{-3/2}\, dl = 23.387\times10^{-6}\int_0^N dN \tag{2.7}$$

Po wykonaniu elementarnych obliczeń otrzymujemy poszukiwane równanie wzrostu szczeliny l(N) - przyjmuje ono postać:

$$l = \left(14.142 - 11.694\times10^{-6}\,N\right)^{-2} \tag{2.8}$$

Wstawiając za długość szczeliny l wartość krytyczną l_c otrzymamy liczbę cykli do zniszczenia (czas życia tarczy) N_f = 704125 cykli. Wykres krzywej l(N) pokazano na Rys. 5.



Rys. 5. Długość szczeliny zmęczeniowej w funkcji liczby cykli obciążenia.

Wymagany okres życia tarczy ma wynosić 10^6 cykli, tymczasem liczba cykli do zniszczenia wyznaczona z warunków zadania wynosi jedynie N_f=704125. Z analizy sposobu rozwiązywania zadania widać, że liczbę N_f można zwiększyć poprzez:

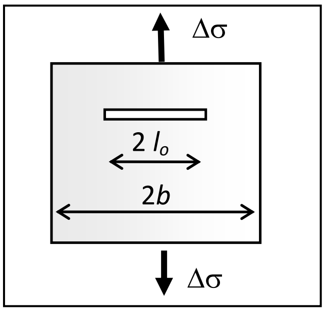
- zwiększenie długości krytycznej szczeliny l_c; to z kolei możliwe jest - jak wynika z równania (2.4) - poprzez zwiększenie wartości K_c (co oznacza konieczność zmiany materiału), albo poprzez zmniejszenie maksymalnego obciążenia σ_{max},
- zmniejszenie zakresu zmienności WIN, co jest równoznaczne z redukcją zakresu zmienności obciążenia $\Delta\sigma$,
- zredukowanie początkowej długości szczeliny - korzystając z (2.7) łatwo obliczyć, że zmniejszenie długości z 10 mm do 6 mm, tzn. o 40%, spowoduje zwiększenie liczby cykli do zniszczenia z 704125 do wartości N_f = 1056051 (przyrost ok. 50%).

PRZYKŁAD 3

Tarcza o szerokości 2b=50 mm (rys. 6) zawiera umieszczoną centralnie szczelinę o długości początkowej $2l_o$=10 mm. Tarcza poddana jest działaniu obciążenia cyklicznie zmiennego o stałej amplitudzie i prostopadłego do kierunku szczeliny. Maksymalne i minimalne naprężenie w cyklu wynoszą odpowiednio 200 MPa i 100 MPa. Prędkość wzrostu szczeliny przy zmęczeniu opisana jest równaniem:

$$\frac{dl}{dN}\left[\mathrm{m/cykl}\right] = 0.42\times10^{-11}\left(\Delta K\right)^3 \qquad , \qquad \Delta K\left[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}\right] \tag{3.1}$$

Wyznaczyć liczbę cykli, po której długość szczeliny wyniesie $2l_k$=20 mm.



Rys. 6. Tarcza o skończonej szerokości ze szczeliną centralną.

Rozwiązanie:

Współczynnik intensywności naprężeń dla tarczy jak na Rys. 6 można wyrazić równaniem Irwina w postaci:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\left[\frac{2b}{\pi l}\tan\left(\frac{\pi l}{2b}\right)\right]^{1/2} \tag{3.2}$$

Zakres zmienności przyłożonego naprężenia wynosi:

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 100\ \mathrm{MPa} \tag{3.3}$$

Zakres zmienności WIN wynosi zatem:

$$\Delta K = 100\sqrt{\pi l}\left[\frac{50\times10^{-3}}{\pi l}\tan\left(\frac{\pi l}{50\times10^{-3}}\right)\right]^{1/2} \tag{3.4}$$

$$\Delta K = 22.361\left[\tan\left(62.832 l\right)\right]^{1/2} \tag{3.5}$$

Po wykorzystaniu równania prędkości wzrostu szczeliny (3.1) i wykonaniu prostych obliczeń otrzymujemy następujące równanie:

$$dN = 21.295\times10^{6}\left[\tan\left(62.832 l\right)\right]^{-3/2} dl \tag{3.6}$$

W celu wyznaczenia liczby cykli koniecznej do spowodowania wzrostu szczeliny od długości $2l_o$=10 mm do długości $2l_k$=20 mm należy scałkować równanie (3.6), które po wstawieniu danych przyjmie postać:

$$N = 21.295\times10^{6}\int_{l_o}^{l_k}\left[\tan\left(62.832\ l\right)\right]^{-3/2} dl \tag{3.7}$$

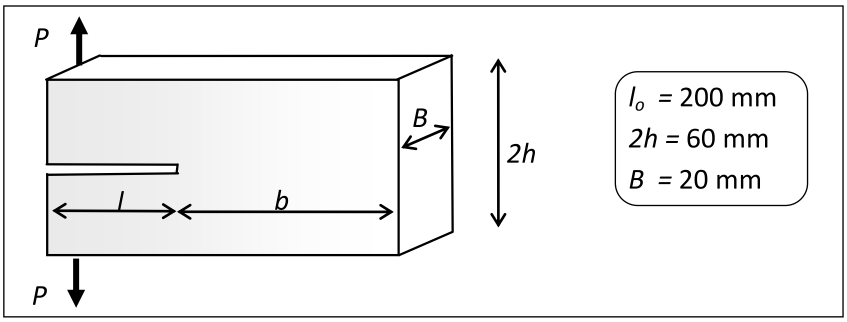
Całkę występującą w równaniu (3.7) obliczono numerycznie. Jej wartość jest równa 0.014933, a poszukiwana liczba cykli wynosi 317998.

Warto w tym miejscu dodać, że w większości przypadków scałkowanie równania prędkości wzrostu szczeliny możliwe jest wyłącznie numerycznie. W okresie kiedy pojawiło się równanie Parisa i inne równania „prędkościowe" brak było odpowiednich, łatwo dostępnych narzędzi obliczeniowych, co spowodowało rozwój procedur przybliżonych, pozwalających w drodze żmudnych (choć dość prostych), wielokrotnie wykonywanych obliczeń uzyskać poszukiwane rozwiązanie. Procedury te były oparte na metodzie przyrostowej (arbitralnie przyjmowane przyrosty długości szczeliny Δl), toteż dokładność rozwiązania zależała jedynie od wielkości przyjętego kroku. W chwili obecnej, gdy dostęp do komputerów osobistych i odpowiedniego oprogramowania jest powszechny, stosowanie metod opartych na „ręcznych" rachunkach wydaje się anachroniczne, choć przykłady tak wykonywanych obliczeń można z łatwością znaleźć w podstawowych podręcznikach i monografiach nt. mechaniki pękania.

PRZYKŁAD 4

Belka podwójnie wspornikowa DCB (ang. **D**ouble **C**antilever **B**eam) o wymiarach jak na Rys. 7 poddana jest działaniu obciążenia cyklicznie zmiennego o stałej amplitudzie, przy czym obciążenie zmienia się pomiędzy wartościami P_{min}=5 kN i P_{max}=10 kN. Odporność na pękanie materiału, z którego wykonano belkę wynosi K_{Ic}=100 MPa $m^{1/2}$. Wyznaczyć czas życia belki zakładając, że wzrost długości szczeliny opisany jest równaniem:

$$dl/dN = 5\times10^{-15}\left(\Delta K\right)^{4} \quad , \quad dl/dN\left[m/cykl\right] \quad , \quad \Delta K\left[MPa\sqrt{m}\right] \tag{4.1}$$



Rys. 7. Belka podwójnie wspornikowa.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia czasu życia belki, określonego liczbą cykli do zniszczenia N_f należy scałkować równanie (4.1), przy czym granicami całkowania w przypadku całki wzg. długości szczeliny są: długość początkowa l_o=20 cm i nieznana długość krytyczna l_c, którą należy wyznaczyć korzystając z siłowego kryterium pękania $K_I = K_{Ic}$.

Współczynnik intensywności naprężeń dla belki jak na Rys. 7 wyraża się równaniem:

$$K_I = \sqrt{\frac{12}{h^3}}\frac{l}{B}P \tag{4.2}$$

Korzystając z warunku $K_I = K_{Ic}$ otrzymujemy długość krytyczną l_c:

$$l_c = K_{Ic}\sqrt{\frac{h^3}{12}}\frac{B}{P_{max}} = 100\times\sqrt{\frac{\left(30\times10^{-3}\right)^3}{12}}\frac{20\times10^{-3}}{10\times10^{-3}} = 0.3\,\mathrm{m} \tag{4.3}$$

Zakres zmienności obciążenia zewnętrznego wynosi:

$$\Delta K = \sqrt{\frac{12}{h^3}}\frac{l}{B}\Delta P = 166.67\,l \tag{4.4}$$

Równanie (4.1) po wykorzystaniu (4.4) i prostych przekształceniach przyjmuje postać:

$$l^{-4}\,dl = 5\times10^{-15}\times\left(166.67\right)^4 dN \tag{4.5}$$

a stąd:

$$N_f = 259.2\times10^3\int_{0.2}^{0.3} l^{-4}\,dl = 7600000 \quad \text{cykli} \tag{4.6}$$