

**Podstawowe informacje nt.  
LINIOWA MECHANIKA PĘKANIA  
Wytrzymałość materiałów II  
©J. German**

# KONCEPCJA CAŁKI J<sup>1</sup>

## Podstawy teoretyczne

Sprężyste (liniowo lub nieliniowo), jednorodne i anizotropowe *continuum* materialne o objętości  $V$ , ograniczone powierzchnią  $\Gamma^*$ , nie zawierające nieciągłości naprężeń lub przemieszczeń. Na powierzchni  $S$  działają siły powierzchniowe o wektorze  $\mathbf{T}$ , siły masowe są zerowe.

Podstawowe elementy mechaniki ciała odkształcalnego niezbędne do analizy ciała zawierającego szczelinę w ramach koncepcji całki  $J$  (Czerepanow 1967, J. Rice 1968)

- komplet równań teorii sprężystości (rów. równowagi Naviera, rów. geometryczne Cauchy'ego, rów. fizyczne Hooke'a + statyczne war. brzegowe)
- gęstość energii wewnętrznej  $\Phi$ , składowe macierzy naprężenia  $\sigma_{ij}$

$$\Phi = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2)$$

- wyrażenia całkowe niezależne od drogi całkowania (ang. *path-independent integrals*, Eshelby)

$$Q_j = \int_{\Gamma^*} (\Phi n_j - T_k u_{k,j}) d\Gamma^* \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

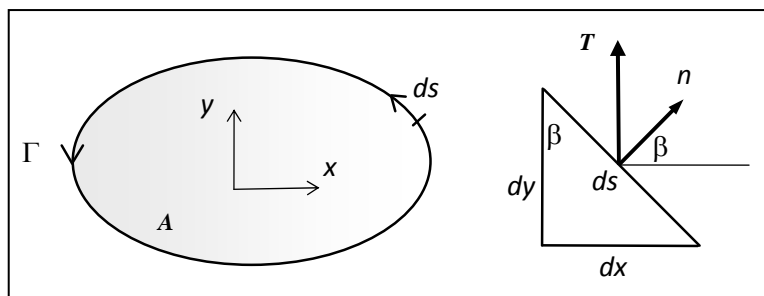
Można wykazać, że zachodzi zawsze równość (szczegóły obliczeń):

$$Q_j = 0 \quad (4)$$

Całka (3) wynosi zero niezależnie od drogi całkowania w przestrzeni odkształceń, a korzystając z gęstości energii uzupełniającej, można wykazać, że również w przestrzeni naprężeń.

## Definicja całki $J$

Przedmiotem analizy jest ciało płaskie o powierzchni  $A$ , ograniczone konturem  $\Gamma$  - rys. 1.



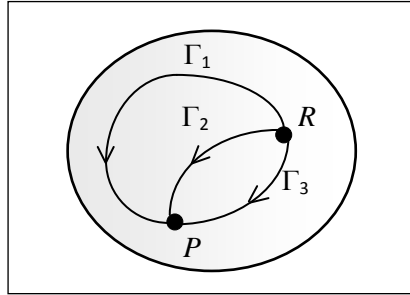
Rys. 1. Element brzegu ciała dwuwymiarowego.

<sup>1</sup> Wszystkie szczegóły dotyczące koncepcji całki  $J$  znajdują się w pełnej wersji podręcznika autora - [http://limba.wil.pk.edu.pl/~jg/wyklady\\_pekani/Podrecznik%20akademicki%202011/Fracture%20JG.pdf](http://limba.wil.pk.edu.pl/~jg/wyklady_pekani/Podrecznik%20akademicki%202011/Fracture%20JG.pdf), str. 161-186

$$Q_1 = \int_{\Gamma^*} (\Phi n_1 - T_k u_{k,1}) ds \quad (5)$$

$$J = \int_{\Gamma} \left( \Phi dy - T_k \frac{\partial u_k}{\partial x} ds \right) \quad k = 1, 2 \quad (6)$$

Wartość J wzdłuż dowolnego konturu zamkniętego w przestrzeni (x, y) jest równa zeru – rys. 2.

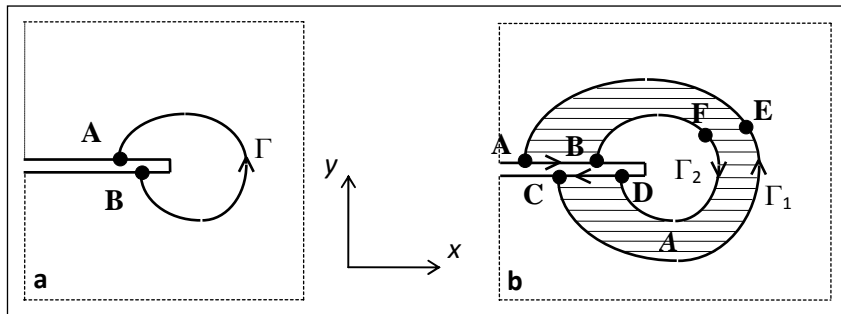


Rys. 2. Dowolne ścieżki łączące punkty P i R.

$$J_1 = \int_{\Gamma_1} (...) = J_2 = \int_{\Gamma_2} (...) = J_3 = \int_{\Gamma_3} (...) \quad (7)$$

### Całka J dla ciała ze szczeliną.

Całka J ma sens dla obszaru bez osobliwości; drogę całkowania może więc stanowić wyłącznie jego kontur zamknięty ABFDCEA – rys. 3. Całka J może być wówczas zapisana w postaci:



Rys. 3. Droga całkowania dla ciała ze szczeliną.

$$J = J_{AB} + J_{\Gamma_2} + J_{DC} + J_{\Gamma_1} = 0 \quad (8)$$

$$J_{AB} = J_{DC} = 0 \quad (dy = 0 ; T_k = 0) \quad (9)$$

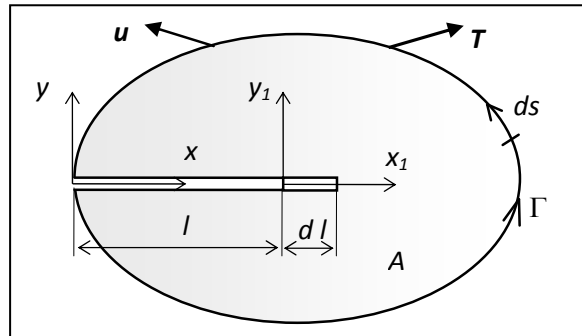
$$J_{\Gamma_1} = -J_{\Gamma_2} \quad (10)$$

zaś po zmianie kierunku obiegu ścieżki  $\Gamma_2$  na przeciwny otrzymujemy:

$$J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_2} \quad (11)$$

## Energetyczna interpretacja całki $J$ .

Płaskie ciało sprężyste (liniowo lub nieliniowo) o powierzchni  $A$  ograniczone brzegiem  $\Gamma$ , zawiera szczelinę o długości  $l$ . Na części brzegu działają siły reprezentowane przez wektor  $\mathbf{T}$  – rys.4.



Rys. 4. Płaskie ciało ze szczeliną.

Energia potencjalna  $\Pi$  określona jest wzorem:

$$\Pi = U_e - L \quad (12)$$

gdzie  $U_e$  to energia odkształcenia sprężystego:

$$U_e = \int \Phi dA \quad (13)$$

zaś  $L$  to praca wykonana przez obciążenie zewnętrzne:

$$L = \int \mathbf{T} \mathbf{u} ds \quad (14)$$

Korzystając z reguł różniczkowania, zasady prac przygotowanych oraz twierdzenia Greena, a także ze wzoru (6) otrzymujemy:

$$\frac{d\Pi}{dl} = - \int_{\Gamma} \left( \Phi dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \right) \Rightarrow J = - \frac{d\Pi}{dl} \quad (15)$$

Współczynnik uwalniania energii  $G$  związany jest z energią potencjalną  $\Pi$  następującą zależnością:

$$G = - \frac{d\Pi}{dA} \quad (16)$$

Z porównania równań (15) i (16) wynika zatem relacja:

$$G = J \quad (17)$$

Dla ciał sprężystych – w ramach **mechaniki pęknięcia koncepcja całki  $J$  jest w pełni ekwiwalentna podejściu energetycznemu Griffith'a**, ze wszystkimi tego faktu następstwami.

## Całka $J$ jako miara odporności materiału na pękanie.

Kryterium pęknięcia w odniesieniu do szczeliny  $l$  typu w warunkach PSO (relacje dla PSN nie zostały dotąd wyznaczone)

$$J = J_{lc} \quad (18)$$

## Doświadczalne wyznaczanie całki $J$ oraz $J_{IC}$

### 1. Metoda wielu próbek (Landes, Begley)

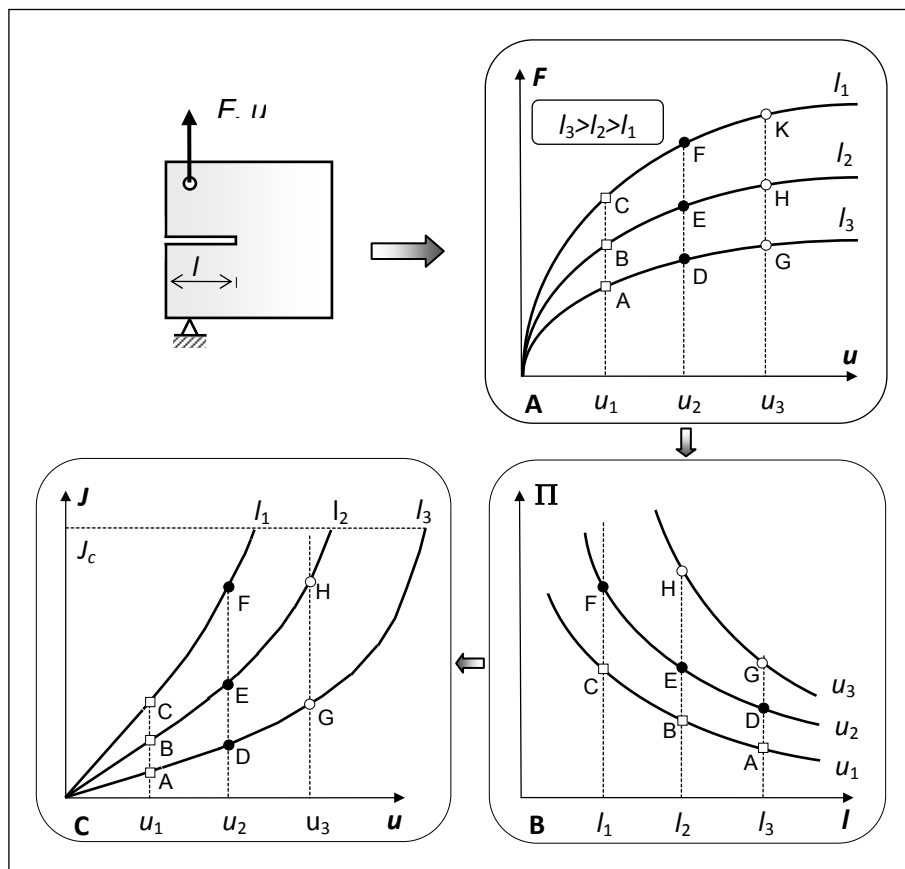
(4-6 próbek zginanych lub kompaktowych ze szczelinami różnej długości)

- metoda bazuje na energetycznej interpretacji całki  $J$

$$J = -\frac{d\Pi}{dl} \quad (19)$$

- w trakcie próby uzyskuje się wykres obciążenie - przemieszczenie. Należy obliczyć pole pod krzywą "F-u" - równe energii potencjalnej  $\Pi$  (rys. 5A).
- Korzystając z obliczonych wartości  $\Pi$  sporządzić wykres zależności energii potencjalnej jako funkcji długości szczeliny (rys. 5B).
- Korzystając z tego, że całka  $J$  jest tangensem kąta nachylenia stycznej do wykresu " $\Pi - l$ ", wyznaczyć wartości  $J$  odpowiadające różnym długościom szczelin. W wyniku tej procedury otrzymuje się wykres " $J - u$ " (rys.5C).

Krytyczną wartość  $J_{IC}$  wyznacza się w ten sposób, że dla próbki ze szczeliną o danej długości  $l_i$  należy zarejestrować wartość przemieszczenia  $u_{ic}$  odpowiadającego inicjacji wzrostu pęknięcia. W ten sposób otrzymujemy tyle wartości  $J_{IC}$ , ile próbek poddano badaniom (rys.5C). W przypadku „idealnym” wszystkie otrzymane wartości powinny być takie same.

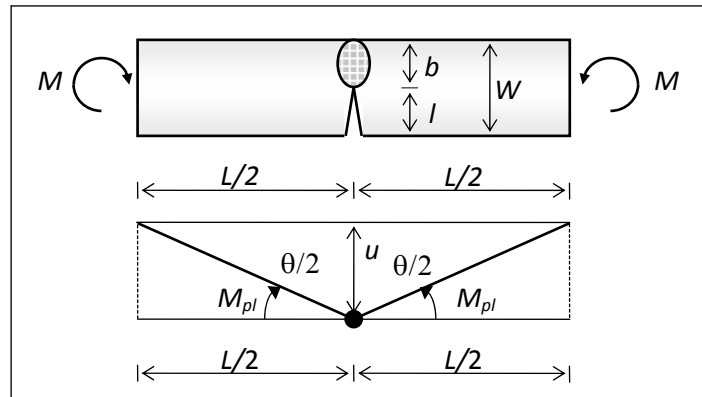


Rys. 5. Wyznaczanie całki  $J$  metodą Begley'a - Landesa.

## 2. Metoda jednej próbki (Rice i in.)

Metoda oparta jest na założeniu pełnego uplastycznienia obszaru leżącego na przedłużeniu płaszczyzny szczeliny, czyli mówiąc inaczej zakłada ona istnienie przegubu plastycznego.

- Belka zginana momentem  $M$  (rys. 6).



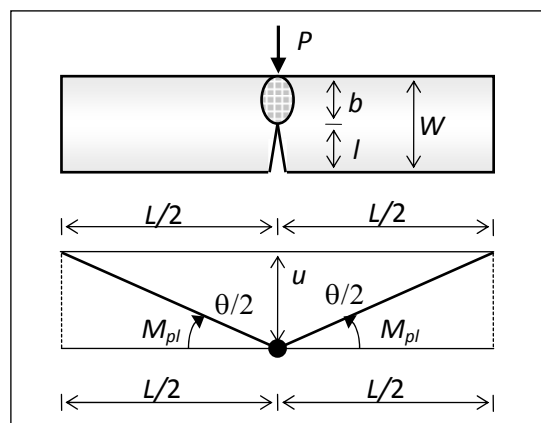
Rys. 6. Przegub plastyczny w belce ze szczeliną.

Można wykazać (patrz odnośnik str.2), że prawdziwe są relacje:

$$J = \frac{2}{Bb} \int_0^{\theta} M d\theta \quad (20)$$

$$J = \frac{2A}{B(W-l)} \quad (21)$$

- Belka trójpunktowo zginana (rys. 7).



Rys.7. Belka trójpunktowo zginana.

Można wykazać (patrz odnośnik str.2), że prawdziwe są relacje:

$$J = \frac{2}{Bb} \int_0^u F du \quad (22)$$

$$J = \frac{2A}{B(W-l)} \quad (23)$$

- **Próbka kompaktowa.**

Można wykazać (patrz odnośnik str.2), że prawdziwe są relacje:

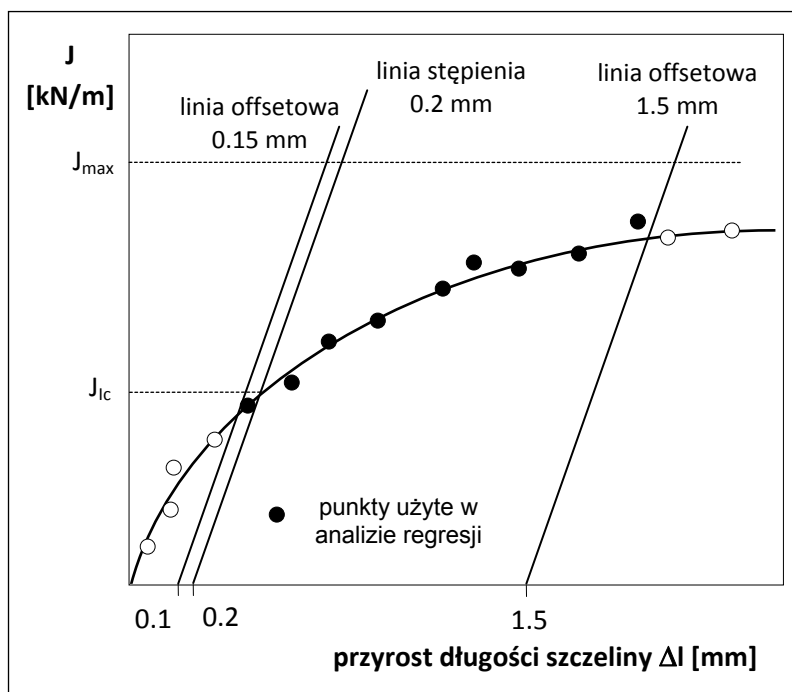
$$J = \frac{2A}{B(W-l)} \frac{1+\beta}{1+\beta^2} \quad (24)$$

$$\beta = 2 \left[ \left( \frac{l}{b} \right)^2 + \frac{l}{b} + \frac{1}{2} \right]^{1/2} - 2 \left( \frac{l}{b} + \frac{1}{2} \right) \quad (25)$$

### Metoda normowa (USA - E-813) wyznaczania całki J i J<sub>1c</sub> (próbka SENB, CT)

Szkic opisu wyznaczania wartości J i J<sub>1c</sub> zgodny z normą E-813 podano poniżej – rys. 8. Detale można znaleźć pod adresem:

[http://limba.wil.pk.edu.pl/~jg/wyklady\\_pekanie/Podrecznik%20akademicki%202011/Fracture%20JG.pdf](http://limba.wil.pk.edu.pl/~jg/wyklady_pekanie/Podrecznik%20akademicki%202011/Fracture%20JG.pdf)



Rys. 8. Schemat wyznaczania J<sub>1c</sub> wg normy E 813.

- obciążyć próbkę rosnącą siłą F i rejestrować w sposób ciągły wykres zależności siły od przemieszczenia u w punkcie jej przyłożenia
- dla danego punktu pomiarowego (F<sub>i</sub>, u<sub>i</sub>) pomierzyć długość szczeliny l<sub>i</sub> oraz obliczyć przyrost długości Δl<sub>i</sub> w stosunku do stanu początkowego. Następnie obliczyć wartość całki J<sub>i</sub>. Skonstruować wykres "J - Δl"
- przez otrzymane w ten sposób punkty (J<sub>i</sub>, Δl<sub>i</sub>) poprowadzić potęgową krzywą regresji
- z punktu na osi Δl, dla którego Δl = 0.2 mm poprowadzić tzw. linia stępienia (uwzględnia się w ten sposób niewielki przyrost długości związany z zaokrąglenia frontu w początkowej fazie wzrostu)

- wyznaczyć wartość  $J_{Ic}$  odpowiadającą punktowi przecięcia się linii stępienia i krzywej najlepszego dopasowania
- poprowadzić tzw. linie offsetowe i sprawdzić warunki normowe ważności punktów pomiarowych

Metoda wyznaczania  $J_{Ic}$  może być także stosowana do oszacowania wartości odporności na kruche pękanie  $K_{Ic}$  w takich przypadkach, w których spełnienie wymagań dotyczących wymiarów próbek, tak aby próbę normową określania  $K_{Ic}$  uznać za ważną - jest niemożliwe. Korzystając ze wzoru (17) oraz (1.31 – plik mp1\_podst.pdf) otrzymujemy dla PSO zależność wiążącą  $J_{Ic}$  i  $K_{Ic}$  w następującej postaci:

$$K_{Ic} = \left[ \frac{E J_{Ic}}{1 - \nu^2} \right]^{1/2}$$