

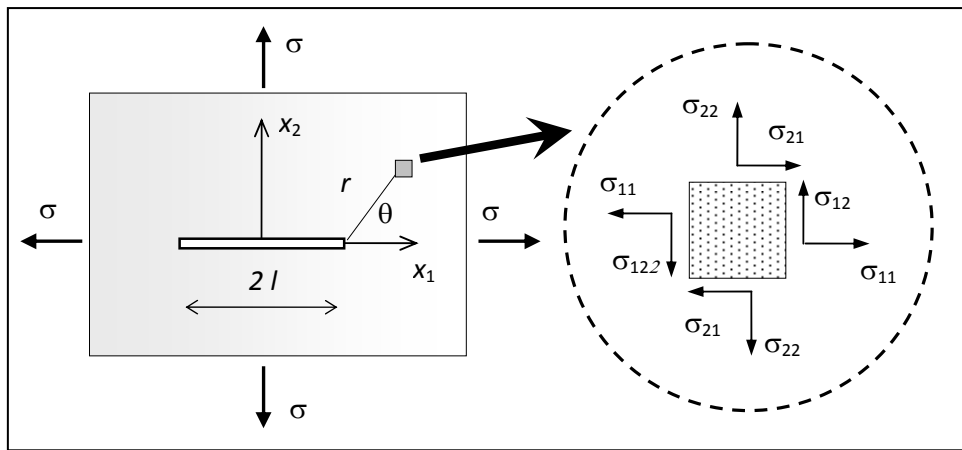
**Podstawowe informacje nt.  
LINIOWA MECHANIKA PĘKANIA  
Wytrzymałość materiałów II  
©J. German**

## POLE NAPRĘŻEŃ W LINIOWO SPRĘŻYSTYM OŚRODKU ZE SZCZELINĄ

Pole naprężeń w dwuwymiarowym ośrodku liniowo-sprężystym ze szczeliną zostało wyznaczone w ogólny sposób dzięki zastosowaniu teorii **funkcji zespolonych Westergaarda oraz Muskeliszwilego i Kołosowa**, które bazowały na klasycznej metodzie rozwiązywania zadań 2-D, znanej powszechnie jako metoda funkcji naprężeń Airy'ego. Szczegóły można znaleźć w wielu pracach, także autora niniejszego opracowania <http://limba.wil.pk.edu.pl/~jg>. W tym opracowaniu zostaną podane jedynie rozwiązania szczegółowe, odnoszące się do konkretnych konfiguracji „ciało-szczelina-obciążenie”.

### Szczelina w I typie obciążenia w paśmie nieskończonym.

Rozpatrywane płaskie ciała o nieograniczonych wymiarach zawierającego szczelinę o długości  $2l$ , poddane działaniu równomiernego dwuosiowego rozciągania obciążeniem o stałej wartości  $\sigma$ , przyłożonym w nieskończoności i leżącym w płaszczyźnie ciała. Rozpatrywany jest więc I typ obciążenia szczeliny, zwany "oderwaniem", bądź "rozwarciem". Geometria zadania pokazana jest na rys. 1.



Rys. 1. Szczelina w nieograniczonym paśmie, rozciągany w nieskończoności.

Funkcje naprężeń opisane są wzorami:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{33} &= \begin{cases} 0 & \text{dla PSN} \\ \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} & \text{dla PSO} \end{cases}\end{aligned}\quad (1.1)$$

Pole naprężeń (1.1) można wspólnie zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.2)$$

Irwin wykazał, że stan naprężenia opisany równaniem (1.1) odnosi się do dowolnej konfiguracji szczeliny w I typie obciążenia i do dowolnego obciążenia. **Tym co uwzględnia geometrię ciała ze szczeliną, długość szczeliny oraz rodzaj i sposób przyłożenia obciążenia jest współczynnik  $K_I$** , noszący nazwę **współczynnika intensywności naprężeń (WIN)**. Tak więc znajomość tego współczynnika jest wystarczająca do pełnego opisu stanu naprężenia w pobliżu wierzchołka szczeliny. Ważną wielkością z punktu widzenia stosowanych w mechanice pęknięcia kryteriów zniszczeniowych jest rozwarcie brzegów szczeliny, które wyraża się wzorem:

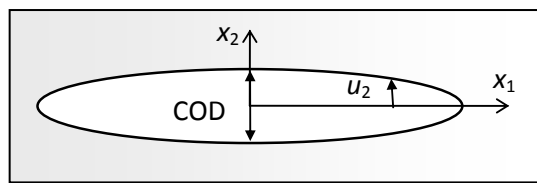
$$u_2 = c \sigma \sqrt{l^2 - x_1^2} \quad (1.3)$$

gdzie:  $c$  - stała materiałowa zależna od tego czy analizowany jest PSN, czy PSO. Stała ta wynosi:

$$c = \begin{cases} \frac{2(1-\nu^2)}{E} & \text{dla PSO} \\ 2/E & \text{dla PSN} \end{cases} \quad (1.4)$$

Maksymalne rozwarcie szczeliny COD występuje w połowie długości szczeliny ( $x_1=0$ ) i wynosi:

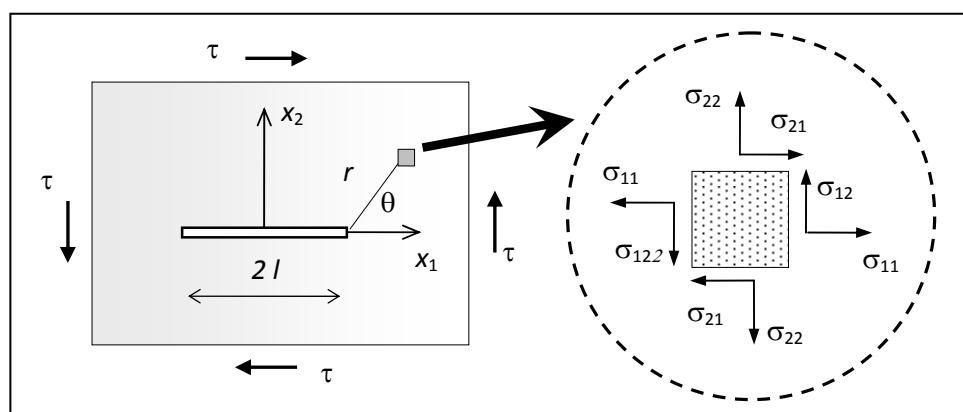
$$\text{COD} = 2 c \sigma l \quad (1.5)$$



Rys. 2. Rozwarcie brzegów szczeliny.

### Szczelina w II typie obciążenia w paśmie nieskończonym.

Rozwiązanie dla szczeliny w II typie obciążenia - rys. 3 - w tarczy o nieskończonych wymiarach można uzyskać w analogiczny sposób jak dla I typu.



Rys. 3. Szczelina II typu w paśmie nieskończonym.

Stan naprężenia w pobliżu wierzchołka szczeliny opisują związki:

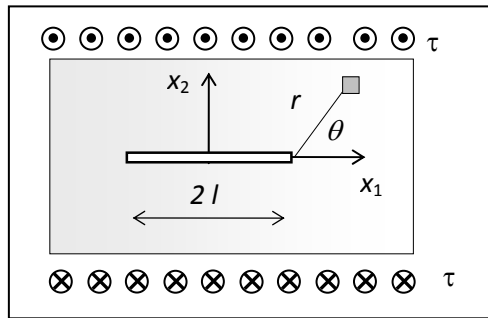
$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{22} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
\sigma_{12} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{33} &= \begin{cases} 0 & \text{dla PSN} \\ \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-2\nu K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} & \text{dla PSO} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Współczynnik intensywności naprężeń ma postać:

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi l} \tag{1.7}$$

### Szczelina w III typie obciążenia w paśmie nieskończonym.

Szczelinę w III typie obciążenia w nieskończonym paśmie sprężystym przedstawiono na rys. 4. Szczegóły rozwiązania tego zadania można znaleźć w literaturze (np. E. Gdoutos). Tutaj ograniczymy się jedynie do zacytowania rozwiązania.



Rys. 4. Szczelina III typu w paśmie nieskończonym.

Niezerowe składowe stanu naprężenia w pobliżu wierzchołka szczeliny oraz współczynnik intensywności naprężeń opisują związki:

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \tag{1.8}$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l} \tag{1.9}$$

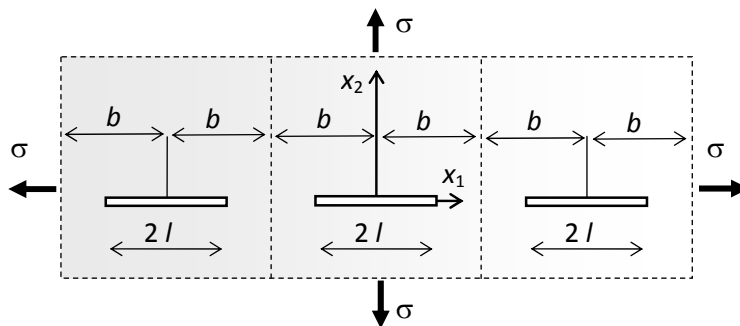
## Funkcje naprężeń i współczynniki intensywności naprężeń dla różnych przypadków szczelin w i typie obciążenia

Uwzględniając, że rozkłady naprężeń w pobliżu wierzchołka szczeliny opisane są w każdym przypadku tą samą zależnością:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.10)$$

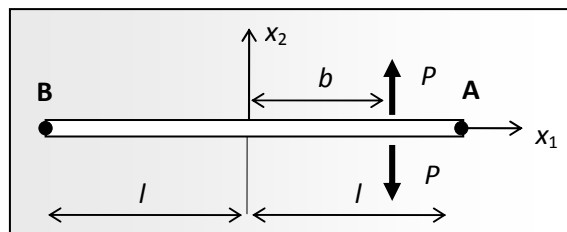
oraz to, że różnią się w zależności od zadania tylko postacią współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$ , należy wysnuć wniosek, że zasadnicze znaczenie ma znajomość współczynnika intensywności naprężeń. Poniżej podano je dla wybranych konfiguracji obciążenia i geometrii szczelin.

- Nieskończone pasmo z nieskończonym szeregiem szczelin kolinearnych, obciążone równomiernym obciążeniem o wartości  $\sigma$



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \sqrt{\frac{2b}{\pi l} \tan\left(\frac{\pi l}{2b}\right)} \quad (1.11)$$

- Nieskończone pasmo ze szczeliną, której powierzchnia jest obciążona siłami skupionymi  $P$  przyłożonymi w odległości  $b$  od wierzchołka



$$K_{IA} = \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+b}{l-b}} \quad (1.12)$$

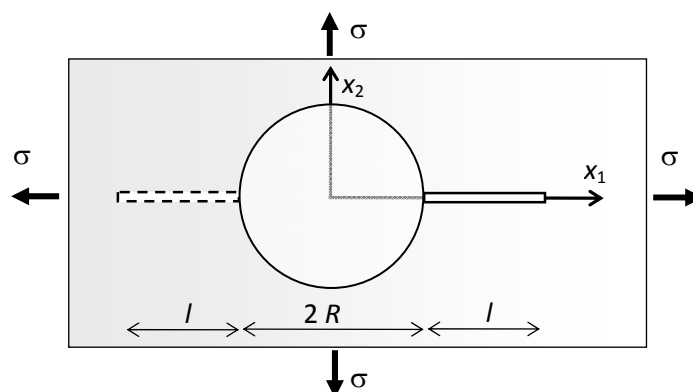
$$K_{IB} = \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l-b}{l+b}} \quad (1.13)$$

W przypadku gdy siła  $P$  przyłożona jest w połowie długości szczeliny tzn.  $b = 0$ , otrzymujemy:

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \quad (1.14)$$

Zauważmy, że w tym ostatnim przypadku współczynnik intensywności naprężeń maleje wraz ze wzrostem długości szczeliny. Zakładając, że dla danej długości  $l_{kr}$  współczynnik  $K_I$  osiąga wartość  $K_{Ic}$ , przy której następuje propagacja szczeliny, a więc i wzrost jej długości, dochodzimy do wniosku, że wartość  $K_I$  musi wówczas zmaleć. Gdy osiągnie wartość mniejszą od  $K_{Ic}$  - propagacja szczeliny musi ustać; następuje zatem samoistne zahamowanie ruchu szczeliny.

- Szczelina (lub szczeliny) wychodzące z brzegu otworu kołowego w paśmie nieskończonym, rozciągającym równomiernie (jednoosiowo lub dwuosiowo)



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} F\left(\frac{l}{r}\right) \quad (1.15)$$

Wartości funkcji F otrzymane przez Bowie'go zestawiono w tabeli 1.

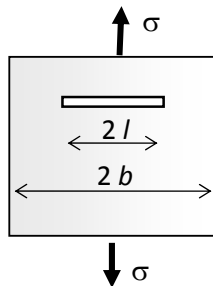
$l/r$	$F(l/r)$ dla jednej szczeliny		$F(l/r)$ dla dwóch szczelin	
	rozcz. w kierunku $x_2$	rozcz. w kier. $x_1$ i $x_2$	rozcz. w kierunku $x_2$	rozcz. w kier. $x_1$ i $x_2$
0	3.39	2.26	3.39	2.26
0.1	2.73	1.98	2.73	1.98
0.2	2.30	1.82	2.41	1.83
0.3	2.04	1.67	2.15	1.70
0.4	1.86	1.58	1.96	1.61
0.5	1.73	1.49	1.83	1.57
0.6	1.64	1.42	1.71	1.52
0.8	1.47	1.32	1.58	1.43
1.0	1.37	1.22	1.45	1.38
1.5	1.18	1.06	1.29	1.26
2.0	1.06	1.01	1.21	1.20
3.0	0.94	0.93	1.14	1.13
5.0	0.81	0.81	1.07	1.06
10.0	0.75	0.75	1.03	1.03
$\infty$	0.707	0.707	1.00	1.00

Tabela 1. Współczynniki Bowie'go

## Wpływ skończonych wymiarów ciała na wartości współczynników intensywności naprężeń

Zagadnienie ciała o skończonych wymiarach o różnych konfiguracjach układu ciało-szczelina-obiężenie - z punktu widzenia zastosowań praktycznych - jest oczywiście ważniejsze od zadania ciała nieograniczonego ze szczeliną. Uzyskanie rozwiązań w formie zamkniętej jest jednak niemożliwe, toteż wszystkie istniejące rozwiązania zawierają pewne mnożniki liczbowe uwzględniające skończone wymiary ciała, najczęściej przedstawiane w formie tabel lub wykresów, rzadziej podawane jako zależności funkcyjne. Poniżej zestawiono wartości współczynników intensywności naprężeń dla najczęściej spotykanych konfiguracji szczelin i obciążenia. W kilku przypadkach podano dwie zależności, z których jedna stosowana jest w badaniach prowadzonych na próbkach normowych.

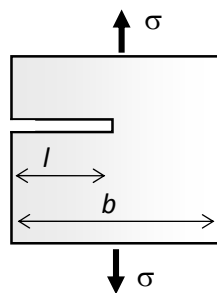
- Szczelina centralna w paśmie rozciągającym



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \sqrt{\sec \frac{\pi l}{2b}} \quad (1.16)$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \left[ 1 + 0.128 \left( \frac{l}{b} \right) - 0.288 \left( \frac{l}{b} \right)^2 + 1.523 \left( \frac{l}{b} \right)^3 \right] \quad (1.17)$$

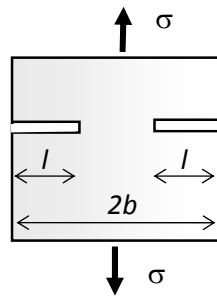
- Szczelina krawędziowa w paśmie rozciągającym



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \left[ 1.12 - 0.23 \left( \frac{l}{b} \right) + 10.55 \left( \frac{l}{b} \right)^2 - 21.72 \left( \frac{l}{b} \right)^3 + 30.39 \left( \frac{l}{b} \right)^4 \right] \quad (1.18)$$

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi l} \quad \text{dla małych } l/b \quad (1.19)$$

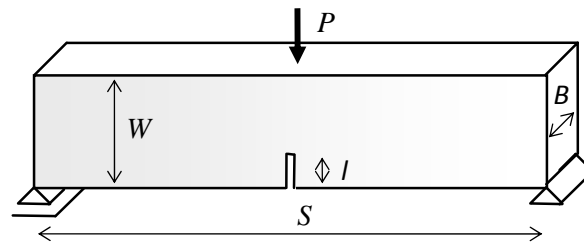
- Dwie szczeliny krawędziowe w paśmie rozciągającym



$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi l} \left[ 1.12 + 0.2 \left( \frac{l}{b} \right) - 1.2 \left( \frac{l}{b} \right)^2 + 1.93 \left( \frac{l}{b} \right)^3 \right] \quad (1.20)$$

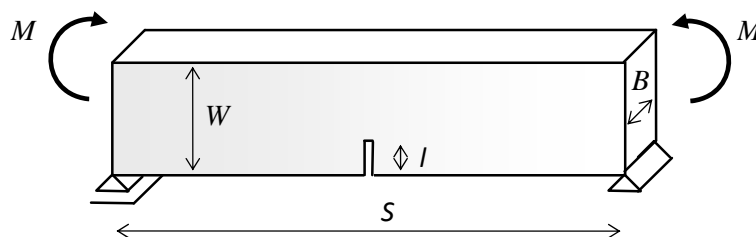
$$K_1 = 1.12 \sigma \sqrt{\pi l} \quad \text{dla małych } l/b \quad (1.21)$$

- Belka trójpunktowo zginana siłą skupioną  $P$  [N] ze szczeliną krawędziową



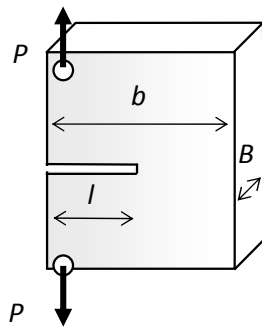
$$K_1 = \frac{PS}{BW^{3/2}} \left[ 2.9 \left( \frac{l}{W} \right)^{1/2} - 4.6 \left( \frac{l}{W} \right)^{3/2} + 21.8 \left( \frac{l}{W} \right)^{5/2} - 37.6 \left( \frac{l}{W} \right)^{7/2} + 38.7 \left( \frac{l}{W} \right)^{9/2} \right] \quad (1.22)$$

- Belka zginana o skończonej szerokości ze szczeliną krawędziową



$$K_1 = \frac{6M}{BW^2} \sqrt{\pi l} \left[ 1.12 - 1.40 \left( \frac{l}{W} \right) + 7.33 \left( \frac{l}{W} \right)^2 - 13.08 \left( \frac{l}{W} \right)^3 + 14.0 \left( \frac{l}{W} \right)^4 \right] \quad (1.23)$$

- Tarcza o skończonej szerokości ze szczeliną boczną, rozciągana siłami skupionymi  $P$ [N]



$$K_I = \frac{P}{B W^{1/2}} \left[ 29.6 \left( \frac{l}{W} \right)^{1/2} - 185.5 \left( \frac{l}{W} \right)^{3/2} + 655.7 \left( \frac{l}{W} \right)^{5/2} - 1017 \left( \frac{l}{W} \right)^{7/2} + 63.9 \left( \frac{l}{W} \right)^{9/2} \right] \quad (1.24)$$

### Wykorzystanie zasady superpozycji do wyznaczania współczynników intensywności naprężeń.

Rozkłady naprężeń dla danego typu szczeliny mają identyczną formę - są niezależne od konfiguracji układu ciało-szczelina-obciążenie, a tym co je różnicuje jest jedynie postać współczynnika intensywności naprężeń. Dzięki temu, w przypadku gdy mamy do czynienia z kombinacją różnych obciążeń, ale w obrębie tego samego typu szczeliny, współczynnik ten może być wyznaczony z zasady superpozycji. Prawdziwa jest zatem zależność:

$$K_T = K_{Tp} + K_{Tq} + K_{Tr} + \dots \quad T = I, II, III \quad (1.25)$$

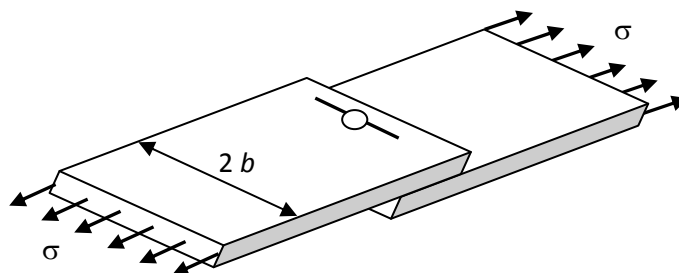
gdzie: p, q i r oznaczają różne obciążenia zewnętrzne działające na ciało ze szczeliną.

Zasada superpozycji jest bardzo użytecznym narzędziem przy wyznaczaniu współczynników intensywności naprężeń.

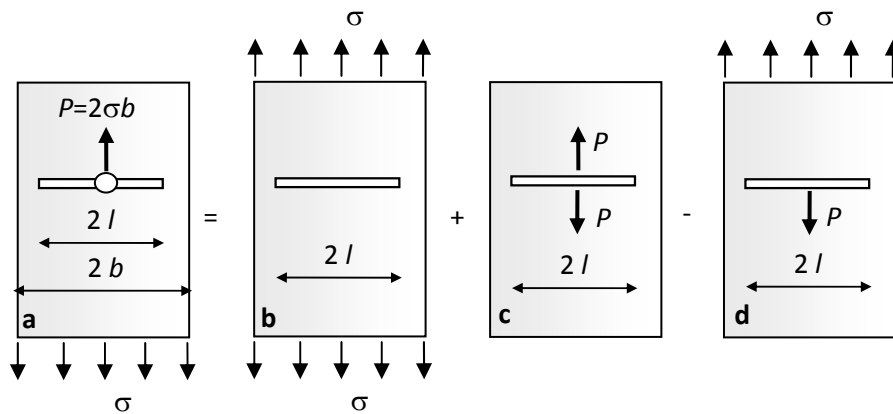
- Szczelina wychodząca z brzegu małego otworu kołowego.

Rozważmy typowe zagadnienie praktyczne, a mianowicie połączenie śrubowe lub nitowane, wymagające wykonania otworów kołowych w łączonych elementach – rys.5.

Dowolny otwór jest zawsze koncentratorem naprężeń, sprzyja zatem powstawaniu szczelin wychodzących z jego brzegu. Założmy, że promień otworu jest mały w stosunku do długości szczeliny, tak, że można go pominąć. Przyjmujemy ponadto, że długość szczeliny jest mała w stosunku do szerokości  $2b$  łączzonego elementu - można więc przyjąć, że obowiązują rozwiązania jak dla pasma nieograniczonego. Schemat wykorzystania zasady superpozycji pokazano na rys. 6.



Rys. 5. Połączenie dwóch elementów rozciąganych.



Rys. 6. Ilustracja zastosowania zasady superpozycji

Z rys. 6 wynika, że zachodzi następujący związek:

$$K_{Ia} = K_{Ib} + K_{Ic} - K_{Id} \quad (1.26)$$

Z oczywistych powodów konfiguracje "a" i "d" są identyczne, czyli  $K_{Ia} = K_{Id}$ .

Korzystając z postaci współczynników intensywności naprężeń dla konfiguracji "b" i "c" - otrzymuje poszukiwany współczynnik dla konfiguracji "a" w postaci:

$$K_{Ia} = \frac{1}{2} (K_{Ib} + K_{Ic}) = \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\pi l} + \frac{\sigma b}{\sqrt{\pi l}} \quad (1.27)$$