

ROZDZIAŁ 8

ROZDZIAŁ 8

UWAGI KOŃCOWE WYBRANE PROBLEMY

8.1. Podsumowanie

W poprzednich rozdziałach omówione zostały podstawowe zagadnienia mechaniki kompozytów, których znajomość jest niezbędna do zrozumienia specyfiki materiałów kompozytowych.

W rozdziale 1 przedstawiono skrótowo różne ich typy, ze szczególnym uwzględnieniem laminatów kompozytowych zbrojonych włóknami. Podano charakterystyki składników tzn. włókien i żywic, a także wybrane sposoby wytwarzania kompozytów. Wprowadzone zostało pojęcie kodu laminatu, określającego sposób ułożenia warstw.

W rozdziale 2 omówiono budowę równań fizycznych dla sprężystej warstwy materiału anizotropowego w układzie tzw. głównych osi materiałowych (tzw. konfiguracja osiowa warstwy). Przedstawione zostały postaci macierzy sztywności i podatności dla materiałów o podstawowych typach anizotropii, a w szczególności materiałów o tzw. symetrii ortotropowej. Wprowadzono pojęcie tzw. stałych inżynierskich oraz podano ich związek z macierzami sztywności i podatności.

Rozdział 3 poświęcono transformacjom macierzy sztywności i podatności oraz stałych inżynierskich z układu głównych osi materiałowych do dowolnego układu współrzędnych, obróconego względem tego pierwszego - zdefiniowano w związku z tym pojęcie tzw. nieosiowej konfiguracji warstwy kompozytu. Podano równania transformacyjne macierzy sztywności, wykorzystujące niezmiennicze charakterystyki warstwy.

Przedmiot rozważań rozdziału 4 stanowił laminat, czyli układ połączonych warstw kompozytowych. W oparciu o teorię płyt cienkich Kirchhoffa-Love'a wyprowadzono związki opisujące odkształcenia laminatu oraz naprężenia warstwowe, określane nazwą równań klasycznej teorii laminacji. Zdefiniowano tzw. wypadkowe siły i momenty, a także macierze sztywności tarczowej i giętej oraz macierz sztywności sprzężeń stanów tarczowych i giętych. Omówiono sposób uwzględnienia temperatury w teorii laminacji.

W rozdziale 5 podano definicje, określenia i charakterystyczne cechy laminatów o różnym układzie warstw, a przede wszystkim laminatów symetrycznych i antysymetrycznych. Omówiono szczegółowo budowę macierzy sztywności tarczowej, giętej i sprzężeń dla laminatów o poprzecznej i kątowej sekwencji warstw. Przedstawione zostały ważne z punktu widzenia zastosowań tzw. kompozyty quasi-izotropowe.

Rozdział 6 dotyczył zagadnień wytrzymałościowych dotyczących zarówno pojedynczej warstwy, jak i kompozytów laminatowych. Podano charakterystyki materiałowe stosowane w analizie wytrzymałości kompozytu. Zostały przedstawione i porównane najczęściej stosowane kryteria wytrzymałościowe dla warstwy, a mianowicie kryteria maksymalnego naprężenia i odkształcenia oraz kryterium Azzi'ego-Tsai'a-Hill'a i Tsai'a-Wu. Obszernie omówiono algorytm określania nośności laminatu z zastosowaniem różnych metod (zniszczenie pierwszej warstwy, zniszczenie ostatniej warstwy, metody częściowej lub całkowitej degradacji sztywności warstwy). Istotną część tego rozdziału stanowiły przykłady obliczeń wytrzymałościowych dla laminatów poprzecznych i kątowych.

Zagadnienia związane z wpływem faz składowych kompozytu na jego charakterystyki makroskopowe, określane wspólnym mianem mikromechaniki kompozytów, przedstawiono w rozdziale 7. Szczegółowo zaprezentowane zostało tzw. podejście mechaniki materiałów, bazujące na pojęciu

reprezentatywnego elementu objętościowego i różnych modelach mikromechanicznych (prosty i "kombinowany"). W oparciu o to podejście uzyskano zależności określające charakterystyki sprężyste kompozytu w funkcji charakterystyk materiałowych, geometrycznych i objętości włókien i matrycy. Rezultaty te porównano z wynikami uzyskanymi poprzez wykorzystanie podejścia semi-empirycznego Halpina-Tsai'a. Zajęto się także wytrzymałością kompozytu na rozciąganie i ściskanie podłużne w ramach podejścia mechaniki materiałów i w oparciu o statystyczną zmienność wytrzymałości włókien, w tym również wpływem długości włókien na wytrzymałość kompozytu.

Przedstawionego powyżej podsumowania dokonano przede wszystkim po to, aby łatwiej było wskazać te zagadnienia, których niniejszy skrypt nie porusza w ogóle, lub też czyni to w bardzo ograniczonym zakresie. Wykaz tych pominiętych tematów czytelnik może potraktować jako rodzaj drogowskazu ułatwiającego dalsze studia mechaniki kompozytów. Najistotniejsze z pominiętych zagadnień to: teoria laminacji z uwzględnieniem naprężeń międzywarstwowych, koncepcja poprzecznego ścinania w laminatach, teoria płyt i powłok kompozytowych, zagadnienia dynamiki kompozytów, wyboczenie konstrukcji kompozytowych, problemy optymalizacji, mechanizmy zniszczenia, mechanika pękania w odniesieniu do kompozytów. Większość z wymienionych zagadnień wykracza zakresem i skalą trudności poza kurs podstawowy. Czytelnicy zainteresowani wymienionymi problemami powinni skorzystać z opracowań monograficznych ich dotyczących. Warto jednak mieć świadomość tego, że w związku z rozwojem techniki komputerowej dogłębna znajomość teorii konstrukcji kompozytowych nie jest tak ważna jak w przeszłości, gdyż i tak większość zadań możliwa jest do rozwiązania jedynie numerycznie. Punkt ciężkości przesuwa się zatem ze znajomości metod analitycznych ku umiejętności formułowania zadania, do czego niezbędne jest sprawne posługiwanie się podstawowymi pojęciami mechaniki kompozytów, zawartymi w skrypcie, a także odpowiednimi programami komputerowymi. Segmenty "kompozytowe" są uwzględnione w dużych systemach obliczeniowych jak ABAQUS czy ADINA, wymagających dużych komputerów, jak i w systemach zadowolających się komputerami PC - np. MICROFIELD firmy Rockfield.

Wśród pominiętych w skrypcie zagadnień mechaniki kompozytów nie wymieniono bardzo ważnego z punktu widzenia wykonawstwa konstrukcji kompozytowych problemu łączenia pojedynczych elementów w konstrukcję. Podstawowe wiadomości, o charakterze przede wszystkim jakościowym, zostaną podane w pkt. 8.2. W kolejnym punkcie przedstawiona zostanie także krótka informacja na temat zastosowania mechaniki pękania do materiałów anizotropowych.

8.2. Metody łączenia elementów kompozytowych

Podstawowym problemem inżynierskim związanym z wykonawstwem złożonych konstrukcji czysto kompozytowych, bądź też stalowych, zawierających elementy kompozytowe jest wybór odpowiedniego sposobu trwałego i bezpiecznego łączenia pojedynczych elementów w jedną całość.

Istnieją trzy sposoby wykonywania połączeń oddzielnych elementów, z których co najmniej jeden jest wykonany z materiału kompozytowego (np. połączenie kompozyt/kompozyt, kompozyt/stal, itd), a mianowicie

- ◆ połączenia stałe, wykonywane metodą sklejania elementów
- ◆ połączenia rozbieralne, wykonywane poprzez skręcanie elementów śrubami.
- ◆ połączenie typu mieszanego, w którym klejeniu elementów towarzyszy połączenie śrubowe.

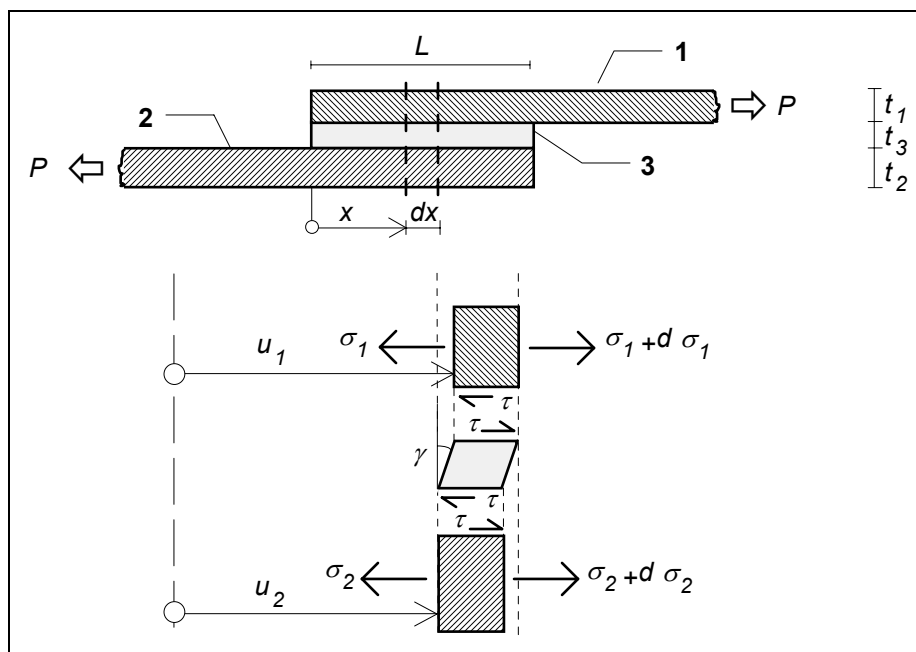
8.2.1. Połączenia klejone

Adams i Wake przeprowadzili badania różnych typów połączeń tych samych elementów, tak dobierając długości, na których następowało łączenie, a także układ śrub i ich średnice, aby wszystkie połączenia miały taką samą nośność. Okazało się, że najmniejszą długość połączenia dawała metoda klejenia. Dzięki tej metodzie uzyskuje się połączenia najmniejsze gabarytowo, a zatem i najlżejsze (tym bardziej, że ciężar kleju w stosunku do ciężaru śrub jest znikomy). Przypomnijmy w tym momencie, że jednym z najważniejszych powodów stosowania konstrukcji kompozytowych jest ich niski ciężar. Duża ilość ciężkich połączeń śrubowych może w znacznym stopniu zredukować tę ich zaletę. Tak więc rezultat Adamsa i Wake'a dostarcza cennej informacji o dużej efektywności metody klejenia. Ma ona również swoje wady. Kleje stosowane do połączeń muszą mieć wysoką wytrzymałość, doskonałą przyczepność do powierzchni łączonych, gwarantującą wysoką

wytrzymałość połączenia na granicy elementów, jak również być odpowiednio wyprofilowane (do tego ostatniego zagadnienia wrócimy w dalszej części rozdziału). Połączenia klejone narażone są na występowanie w nich licznych defektów, takich jak wewnętrzne pory i pęknięcia kleju, lokalne braki kleju lub jego przyczepności na granicach łączonych elementów i in. Innym źródłem potencjalnych wad połączenia jest niewłaściwy sposób wymieszania składników kleju i jego termoutwardzenia.

Analiza połączeń klejonych jest skomplikowanym zagadnieniem teoretycznym, należącym do tzw. zagadnień kontaktowych i daleko wykracza poza zakres niniejszego skryptu. Tutaj przedstawiony będzie prosty model mechaniczny takiego połączenia, tzw. model Volkersena, zaczerpnięty z pracy Hultha i Bjarneheda.

Dwie warstwy oznaczone jako "1" i "2" połączone są warstwą kleju oznaczoną jako "3". Do powierzchni przekrojów warstw przyłożona jest siła rozciągająca P , powodująca ścinanie warstwy kleju. Zakłada się, że warstwa kleju ulega odkształceniom jedynie w wyniku ścinania (odkształcenie kątowe), a warstwy łączone - jedynie w wyniku rozciągania (odkształcenia liniowe). Połączenie (na tzw. zakładkę), siły wewnętrzne działające na poszczególne części połączenia w elemencie o długości dx oraz siły zewnętrzne pokazano na rys. 8.1. Szerokość warstw wynosi W , a ich grubości t_1 , t_2 i t_3 .



Rys. 8.1. Model mechaniczny Volkersena, zakładkowego połączenia klejonego.

Warunki równowagi sił dla elementów dx warstw, odpowiednio 1 i 2, mają postaci

$$d\sigma_1 W t_1 - \tau W dx = 0 \quad (8.1)$$

$$d\sigma_2 W t_2 + \tau W dx = 0 \quad (8.2)$$

W wyniku podzielenia pierwszego równania przez moduł sprężystości podłużnej E_1 warstwy 1, a drugiego przez moduł sprężystości podłużnej E_2 warstwy 2 i po elementarnych przekształceniach, równania (8.1) (8.2) można zapisać w postaci następującego równania

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) = \tau \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \quad (8.3)$$

Korzystając z definicji odkształceń liniowych w odniesieniu do warstw 1 i 2 oraz odkształcenia kąтового dla warstwy kleju "3" - równania fizyczne dla warstw, odpowiednio 1, 2, 3, przyjmują postaci

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (8.4)$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (8.5)$$

$$\frac{u_1 - u_2}{t_3} = \frac{\tau}{G_3} \quad (8.6)$$

gdzie G_3 oznacza moduł ścinania warstwy kleju, zaś u_1 i u_2 przemieszczenia przekroju warstw 1 i 2 określonego bieżącą współrzędną x . Po zróżniczkowaniu rów. (8.6) i wykorzystaniu (8.4) i (8.5) otrzymamy związek

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{G_3}{t_3} \left(\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \quad (8.7)$$

Po zróżniczkowaniu (8.3) i wstawieniu (8.7) dostajemy równanie różniczkowe jednorodne, II rzędu o stałych współczynnikach w postaci

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) - \lambda^2 \left(\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) = 0 \quad (8.8)$$

gdzie

$$\lambda^2 = \frac{G_3}{t_3} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \quad (8.9)$$

Całka ogólna rów. (8.8) ma postać

$$\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x \quad (8.10)$$

Warunki brzegowe dla równania (8.8) są następujące

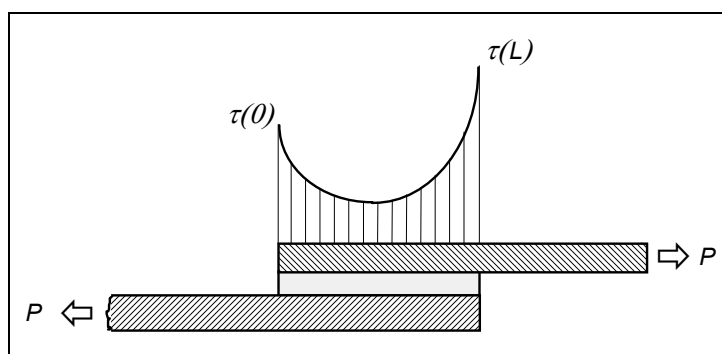
$$\sigma_1(0) = 0 \quad \sigma_1(L) = \frac{P}{W t_1} \quad (8.11)$$

$$\sigma_2(0) = \frac{P}{W t_2} \quad \sigma_2(L) = 0 \quad (8.12)$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych i wyznaczeniu stałych A i B , z rów. (8.3) wyznaczamy funkcję określającą rozkład naprężenia stycznego wzdłuż odcinka L kontaktu warstw. Wyraża się ona równaniem

$$\tau(x) = \sqrt{\frac{t_1 t_2 E_1 E_2 G_3}{t_1 E_1 + t_2 E_2}} \frac{P}{W} \left[-\frac{1}{t_2 E_2} \sinh \lambda x + \left(\frac{1}{t_1 E_1} + \frac{\cosh \lambda L}{t_2 E_2} \right) \frac{\cosh \lambda x}{\sinh \lambda L} \right] \quad (8.13)$$

Schematyczny rozkład naprężenia stycznego pokazano na rys. 8.2.



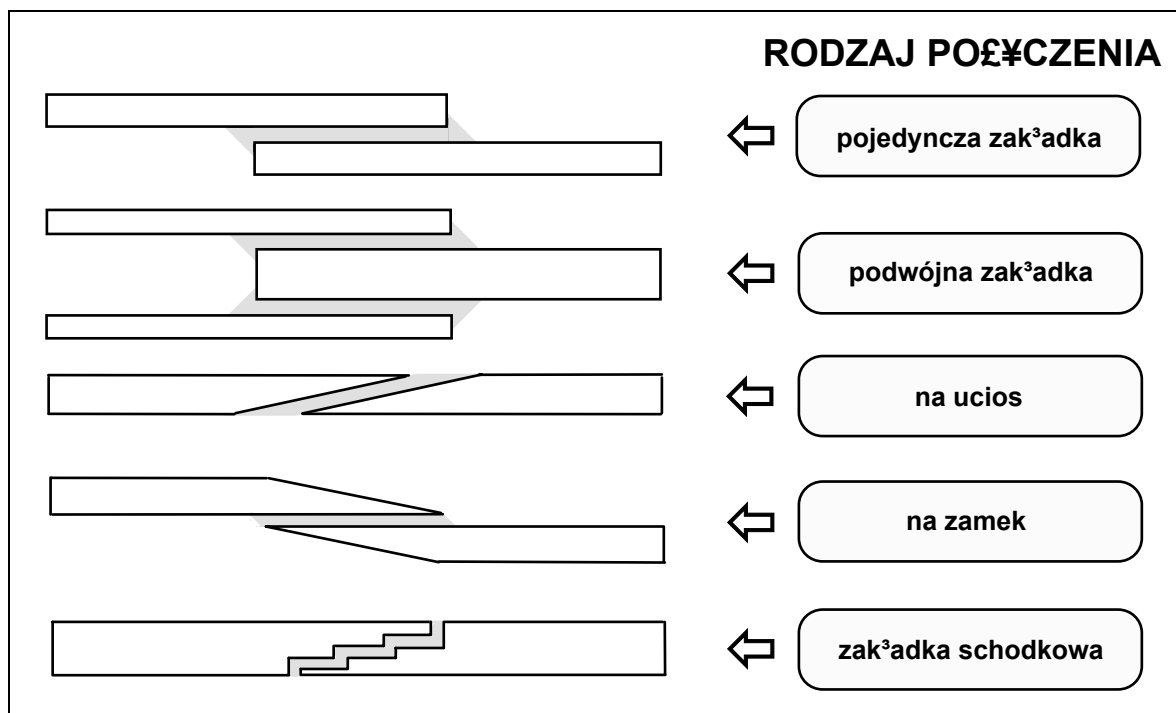
Rys. 8.2. Rozkład naprężenia stycznego wzdłuż granicy kontaktu sklejonych warstw.

Maksymalne naprężenia występują na końcach odcinka kontaktowego, przy czym to, na którym z nich zależy od relacji między iloczynami E_1t_1 i E_2t_2 . W przypadku gdy $E_1t_1 < E_2t_2$ to naprężenia spełniają relację $\tau(0) < \tau(L)$, w przeciwnym wypadku - odwrotną. Rozkład jest symetryczny, jeżeli $t_1=t_2=t$ oraz $E_1=E_2=E$. Korzystając z (8.13) i (8.9) oraz dokonując przekształceń trygonometrycznych, maksymalne naprężenie można wyrazić następująco

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{G_3}{2Et_3}} \frac{P}{W} \coth \sqrt{\frac{G_3 L^2}{2Et_3}} \quad (8.14)$$

Z zależności tej można określić np. długość zakładki L , konieczną do przeniesienia obciążenia P (pod warunkiem, że znane są pozostałe parametry, w tym dopuszczalne naprężenie ścinające dla kleju), lub dopuszczalne obciążenie połączenia o długości L .

Istnieją modele bardziej złożone, uwzględniające w łączonych warstwach nie tylko odkształcenia liniowe, ale także kątowe, jak również uwzględniające naprężenia normalne do kierunku działającego obciążenia. Dają one rezultaty, jakościowo nie odbiegające od wyników uzyskanych z modelu Volkersena, tzn. wszystkie te modele pokazują, że maksymalne naprężenia występują na końcach połączenia klejonego i szybko zmniejszają się wraz z oddalaniem się od nich. Tak więc droga do wykonywania połączeń mocnych, ale jednocześnie niezbyt długich musi prowadzić poprzez redukcję naprężeń stycznych w strefach końcowych połączeń. Uzyskuje się to poprzez odpowiednie kształtowanie geometrii tych stref - badania wykazały, że szczególnie godne polecenia jest wykonywanie skosów na końcach warstwy kleju. Typowe sposoby łączenia elementów metodą klejenia pokazano na rys. 8.3.



Rys. 8.3. Typowe połączenia klejone.

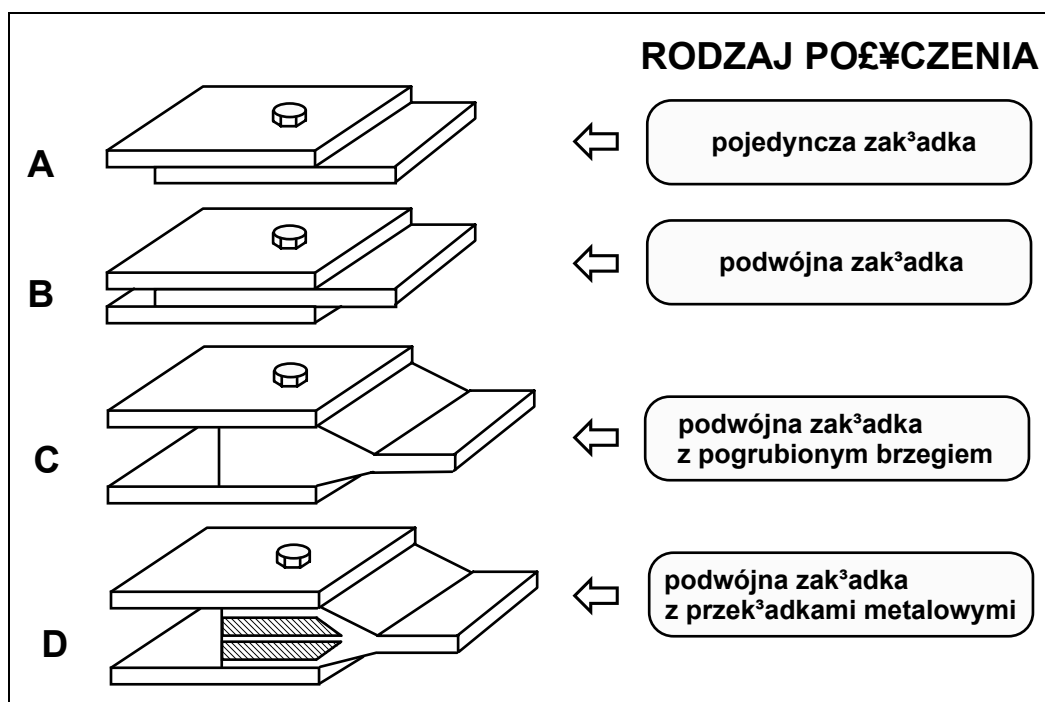
8.2.2. Połączenia śrubowe

Typowe sposoby konstrukcji połączeń śrubowych warstw kompozytowych lub warstw kompozytowych z metalami pokazano na rys. 8.4.

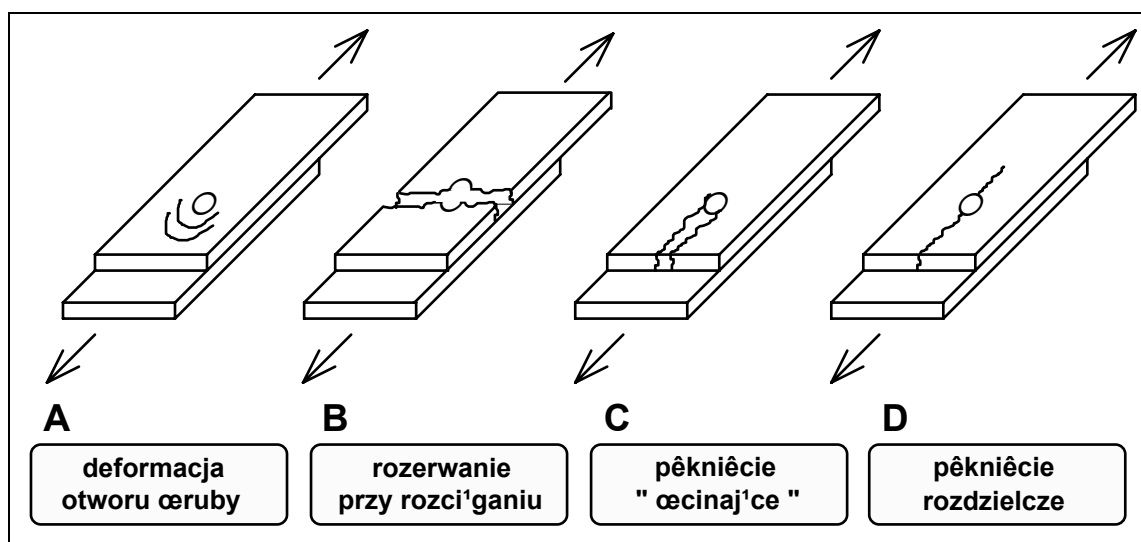
Połączenia śrubowe w porównaniu z połączeniami klejonymi wymagają większych długości zakładek, na powierzchni których następuje kontakt łączonych warstw. Prowadzi to oczywiście do konstruowania bardziej masywnych połączeń, co stanowi wadę metody. Stosowane są połączenia z zakładką pojedynczą (jednostronna) - rys. 8.4.A, bądź częściej z zakładkami podwójnymi (dwustronnymi) - rys. 8.4 B, C, D. Te drugie dzięki symetrii połączenia zapewniają korzystniejszy z

punktu widzenia jego nośności rozkład naprężeń. Czynnikiem decydującym o nośności jest skręcenie śrub mocujących odpowiednio dużym momentem, tak aby siły tarcia między powierzchniami łączonych warstw były w stanie zrównoważyć działające obciążenie zewnętrzne. W przypadku wykonywania połączenia warstwy laminatu kompozytowego z elementami metalowymi, odpowiednią nośność i sztywność połączenia uzyskuje się poprzez powiększenie przekroju laminatu w strefie kontaktowej (rys. 8.4. C).

Przyczyny stosowania różnych typów połączeń śrubowych stają się bardziej oczywiste, jeżeli spojrzeć na nie pod kątem możliwych mechanizmów zniszczenia, występujących w połączeniach. Przedstawiono je na rys. 8.5.



Rys. 8.4. Typowe połączenia śrubowe.



Rys. 8.5. Mechanizmy uszkodzeñ w połączeniach śrubowych.

Mechanizm uszkodzenia połączenia oznaczony na rys. 8.5 jako A, polega na "zgniataniu" materiału warstwy w wyniku nacisku śruby (ang. *bearing failure*) i narastającej owalizacji otworu. Typ B polega na pęknięciu warstwy przy rozciąganiu, w przekroju osłabionym otworem kołowym (ang. *net tension*

failure). Pęknięcie ma kierunek prostopadły do kierunku siły i wywołane jest koncentracją naprężeń na brzegu otworu (będzie o tym mowa w kolejnym punkcie). Pęknięcia oznaczone jako C i D określa się jako pęknięcia rozdzielcze, a wywołane są naprężeniami normalnymi, poprzecznymi do kierunku rozciągania. Typ C nosi nazwę pęknięcia "ścinającego" (ang. *shearing out*), zaś typ D pęknięcia rozdzielczego (ang. *cleavage failure*). Zniszczenie połączenia może polegać na wystąpieniu kilku mechanizmów jednocześnie, jak również może być spowodowane pęknięciem śruby.

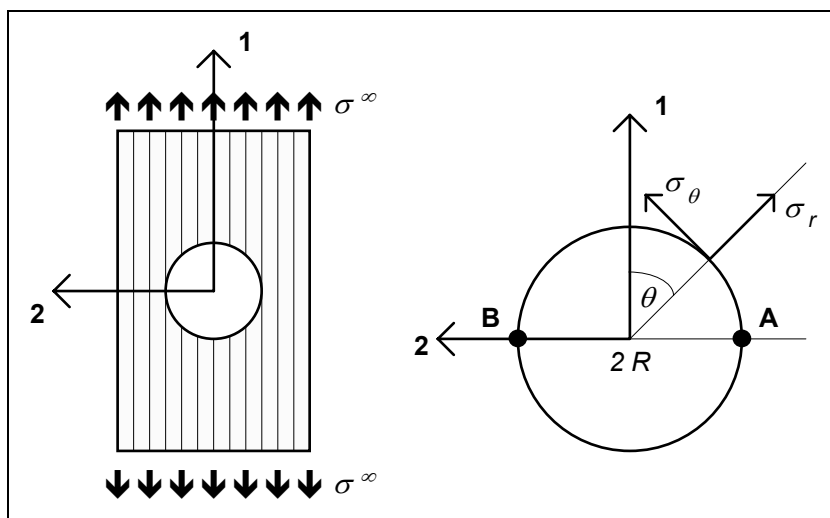
Zapobieganie wymienionym defektom polega przede wszystkim na odpowiednim kształtowaniu węzła połączeniowego. Defektom związanym z deformacją otworu w warstwie kompozytowej zapobiega się poprzez zwiększenie przekroju poprzecznego w jej strefie końcowej - rys. 8.4 C, a w razie potrzeby dodatkowe zastosowanie wzmocnień w postaci przekładek metalowych (ang. *shim*), jak to pokazano na rys. 8.4 D. Możliwość powstawania pęknięć typu B można istotnie ograniczyć umieszczając śruby w kilku rzędach.

Za najskuteczniejsze połączenia uważane są połączenia mieszane, tzn. jednocześnie sklejane i skręcane. Opisy bardzo wyrafinowanych metod łączenia elementów kompozytowych można znaleźć w literaturze specjalistycznej, np. wspomnianej pracy Adamsa i Wake'a.

8.3. Koncentracja naprężeń wywołana otworem

W poprzednim punkcie, omawiając połączenia śrubowe, wspomniano o pękaniu warstwy kompozytowej w przekroju osłabionym otworem wskutek powstawania koncentracji naprężeń na brzegu otworu. Zagadnienie analizy stanu naprężenia w pobliżu otworów, ważne ze względów konstrukcyjnych (obecność otworów jest nieunikniona w konstrukcjach np. okrętowych, lotniczych, samochodowych, nie wspominając raz jeszcze, że jest wymuszona technologią łączenia elementów konstrukcyjnych w funkcjonalną całość) stanowi przedmiot zainteresowania mechaniki od blisko stu lat. Pierwszym rozwiązaniem zadaniem było zadanie izotropowego pasma nieskończonego z otworem kołowym, poddanego równomiernemu rozciąganiu. Ten klasyczny problem nosi nazwę zagadnienia Kirscha, który podał rozwiązanie w 1898 roku (patrz - np. Timoszenko S., Goodier J. N.). W przypadku materiałów anizotropowych problem koncentracji naprężeń wywołanych otworami jest znacznie bardziej skomplikowany, przede wszystkim na skutek kierunkowego charakteru charakterystyk materiałowych. W kompozytach warstwowych (np. laminatach włóknistych) dodatkowe komplikacje wynikają z faktu, że naprężenia zmieniają się od warstwy do warstwy i koncentracje naprężeń są różne w różnych warstwach (powszechnie używany dla materiałów izotropowych tzw. współczynnik koncentracji naprężeń staje się w tym przypadku mało użyteczny - można mówić co najwyżej o wielu, warstwowych współczynnikach). Liczne przykłady rozwiązań problemu otworów w materiałach anizotropowych zawierają prace Lechnickiego i Greszczuka.

W celu przybliżenia tej problematyki zajmiemy się bardziej szczegółowo przypadkiem pojedynczej warstwy kompozytu zbrojonego włóknami zawierającej otwór kołowy, poddanej równomiernemu jednoosiowemu rozciąganiu - pokazano to na rys. 8.6.



Rys. 8.6. Rozciągana warstwa jednokierunkowo zbrojona z otworem kołowym.

Naprężenia na brzegu otworu kołowego w warstwie izotropowej wyrażają się zależnościami

$$\sigma_{\theta} = \sigma^{\infty} (1 - 2 \cos 2\theta) \quad (8.15)$$

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad (8.16)$$

Naprężenia obwodowe na brzegu otworu kołowego w warstwie jednokierunkowo zbrojonej opisuje związek

$$\sigma_{\theta} = \sigma^{\infty} \frac{E_{\theta}}{E_1} \left[(1+n) \sin^2 \theta - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cos^2 \theta \right] \quad (8.17)$$

$$n = \sqrt{\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}} + 2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad (8.18)$$

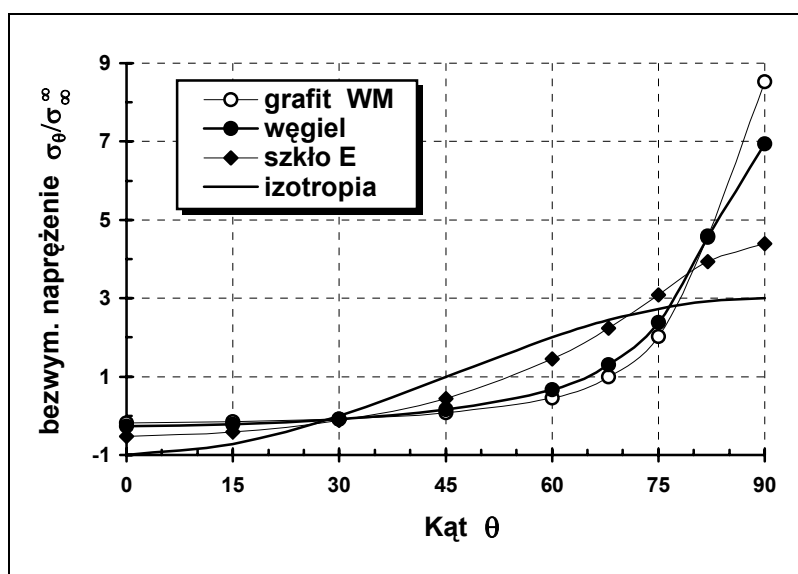
gdzie E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} oznaczają odpowiednio podłużny i poprzeczny moduł sprężystości, moduł ścinania i większy współczynnik Poissona warstwy w głównych osiach materiałowych (1, 2). Moduł sprężystości E_{θ} oznacza moduł sprężystości wzdłuż kierunku naprężenia σ_{θ} . Zgodnie z konwencją pokazaną na rys. 3.6 A, moduł ten jest tożsamy z modułem E_y , który wyznaczymy korzystając z tabeli transformacyjnej dla stałych inżynierskich - tab. 3.4. Tak więc moduł E_{θ} ma następującą postać

$$E_{\theta} = \left[\frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \frac{\cos^4 \theta}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right]^{-1} \quad (8.19)$$

Na rys. 8.7 przedstawiono naprężenie obwodowe σ_{θ} odniesione do wartości obciążenia zewnętrznego σ^{∞} dla różnych materiałów kompozytowych, których stałe inżynierskie zestawiono w tab. 8.1, a także dla materiału izotropowego w funkcji kąta θ .

MATERIAŁ	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
szkło E/epoksyd	45	12.0	5.5	0.28
węgiel/epoksyd	137	10.0	4.8	0.30
boron/epoksyd	210	19.0	4.8	0.25
grafit WM/epoksyd	220	6.9	4.8	0.25

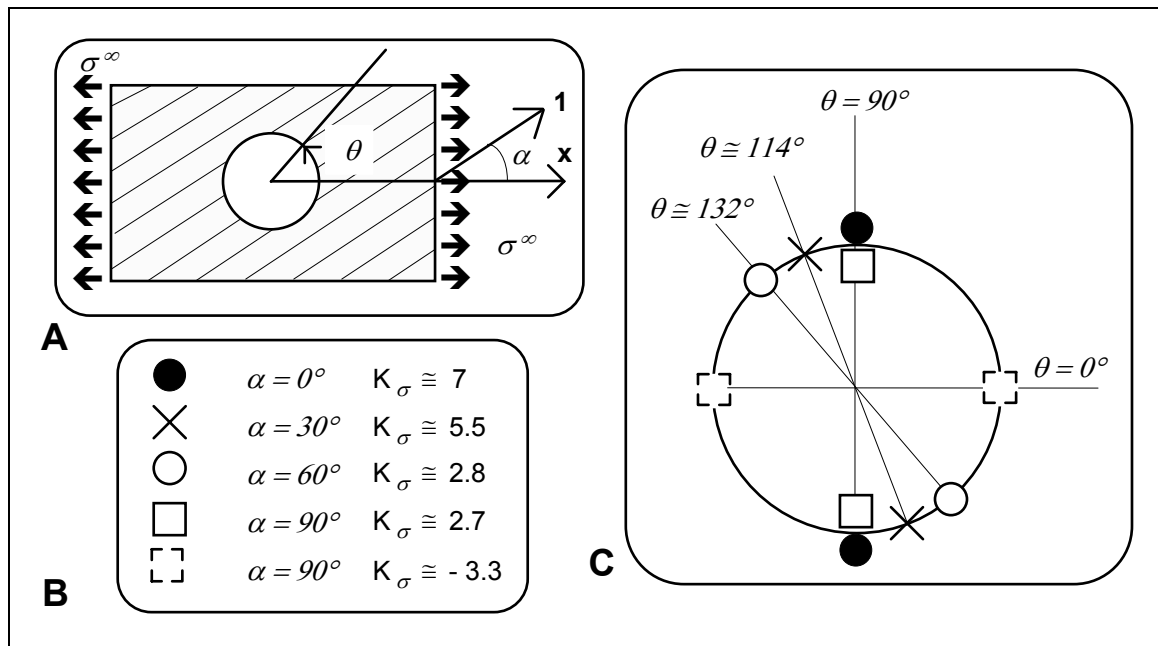
Tab. 8.1. Stałe inżynierskie kompozytów wykorzystane przy konstrukcji wykresów na rys. 8.7.



Rys. 8.7. Bezwymiarowe naprężenie obwodowe $\sigma_{\theta} / \sigma^{\infty}$ w funkcji kąta θ .

Największe koncentracje naprężeń występują dla kąta $\theta=90^\circ$, a więc w punktach oznaczonych na rys. 8.6 jako A i B. Oznacza to, że w tych punktach naprężenie o kierunku zgodnym z kierunkiem obciążenia wielokrotnie przekracza wartość obciążenia zewnętrznego. Wraz z oddalaniem się od punktów A i B wzdłuż kierunku AB naprężenie maleje, ale dopiero dostatecznie daleko od otworu osiąga wartość σ^∞ . To sprawia, że jednym z mechanizmów niszczenia warstw w połączeniu śrubowym jest ich pękanie inicjujące się w punktach brzegowych otworu leżących na kierunku promieniowym prostopadłym do kierunku obciążenia (rys. 8.5 B). Warto zwrócić uwagę na liczbowe wartości współczynnika koncentracji naprężeń K_σ zdefiniowanego jako stosunek maksymalnego naprężenia $\sigma_{\theta max}$ do obciążenia zewnętrznego σ^∞ . Dla materiału izotropowego wynosi on 3, dla kompozytu włókno szklane E/epoksyd - 4.4, dla kompozytu włókno węglowe/epoksyd blisko 7, a dla kompozytu zbrojonego włóknami grafitowymi aż 8.5. Widać zatem, że dla analizowanej konfiguracji osiowej warstwy, efekt koncentracji naprężeń w materiałach kompozytowych jest znacznie bardziej widoczny niż w materiale izotropowym.

W laminatach kompozytowych, pojedyncze warstwy występują najczęściej w konfiguracji nieosiowej względem globalnego układu współrzędnych. Taką właśnie konfigurację warstwy kompozytu boron/epoksyd, poddanej działaniu jednoosiowego, równomiernego obciążenia rozciągającego przyłożonego pod kątem α do kierunku włókien - rys. 8.8 A - analizował Greszczuk. Na podstawie uzyskanych przez niego rezultatów sporządzono diagram pokazujący punkty obwodu, w których występuje największa koncentracja naprężeń obwodowych dla czterech wybranych kątów α - rys. 8.8 C. Wartości współczynników koncentracji naprężeń K_σ podano w tabelce na rys. 8.8 B.



Rys. 8.8. Koncentracja naprężeń obwodowych na brzegu otworu kołowego w warstwie kompozytu boron/epoksyd przy rozciąganiu pod kątem α do kierunku włókien.

Widać, że kierunek włókien ma istotny wpływ na wartości współczynników koncentracji naprężeń, jak i położenie punktów na obwodzie, w których one występują. Poprzednio pokazano, że wartości współczynnika zależy od rodzaju materiału - należy zatem stwierdzić, że w materiałach kompozytowych koncentracja naprężeń jest funkcją stałych materiałowych, położenia włókien, a także kształtu otworu (zauważmy, że dla materiałów izotropowych stałe materiałowe w ogóle nie występują w zależnościach opisujących współczynniki koncentracji naprężeń, np. (8.15)). Greszczuk analizował także naprężenia radialne i styczne. Korzystając z kryterium wytrzymałościowego wykazał, że jest ono spełnione zawsze w pobliżu punktów obwodowych, położonych na promieniu otworu prostopadłym do kierunku obciążenia ($\theta=90^\circ$, $\theta=270^\circ$), niezależnie od kierunku włókien, określonego kątem α .

W przypadku laminatów analiza koncentracji naprężeń wywołanych otworami jest znacznie bardziej złożona i pracochłonna niż w przypadku pojedynczej warstwy. Znajomość "globalnej" koncentracji naprężeń na brzegu otworu jest z punktu widzenia stosowanej analizy wytrzymałościowej laminatów -

opartej na analizie jego warstw składowych (patrz -Rozdział 6) - nie wystarczająca do oceny np. nośności laminatu lub połączenia śrubowego elementów laminatowych. Znając globalną koncentrację naprężeń należy przeprowadzić analizę naprężeń w każdej warstwie w oparciu o teorię laminacji, a następnie analizę wytrzymałościową każdej warstwy, wykorzystując jedno z kryteriów wytrzymałościowych.

8.4. Podstawowe informacje o mechanice pękania

W rozdziale 6 przedstawione zostały podstawowe kryteria wytrzymałościowe dla materiałów kompozytowych, pozwalające wyznaczyć wielkość maksymalnego obciążenia, jakie jest w stanie przenieść element kompozytowy. Jest to zarazem obciążenie niszczące, przy czym sam efekt zniszczenia można określić jako "globalny" - w tym sensie, że nie jest związany z istnieniem jakichkolwiek defektów wywołujących lokalną koncentrację naprężeń. W sytuacji, gdy element zawiera taki defekt, kryteria te mogą być nie wystarczające do oceny wytrzymałości. Typowym przykładem jest ciało osłabione otworami, korbami czy wreszcie szczelinami. Ten ostatni przypadek jest szczególnie niebezpieczny z punktu widzenia eksploatacji konstrukcji, gdyż z reguły szczeliny mają niewielki rozmiar, a po wtóre powstają samoistnie, nie zaś wskutek świadomej działalności projektanta lub użytkownika, jak to ma miejsce w przypadku np. otworów (ich obecność jest niemal zawsze wymuszona względami konstrukcyjnymi -np. otwory pod nity, lub użytkowymi - np. otwory wizjerów w kadłubach okrętowych i lotniczych). To sprawia, że są one trudne do zlokalizowania i obserwacji jedynie "gołym okiem". Z tego względu potencjalna możliwość istnienia szczelin w konstrukcji musi być uwzględniana już w fazie projektowania.

Analiza ciała ze szczeliną jest przedmiotem zainteresowań działu mechaniki zwanego mechaniką pękania. Jest to w tej chwili samodzielna, obszerna gałąź wiedzy, której tematyka daleko wykracza poza ramy tej pracy - czytelnicy zainteresowani tą problematyką mogą skorzystać z wielu dostępnych monografii np. D. Broek'a. Tutaj ograniczymy się jedynie do podstawowych informacji dotyczących ciała izotropowego ze szczeliną, by następnie na ich tle przedstawić krótko pewne koncepcje mechaniki pękania odnoszące się do ośrodka anizotropowego.

8.4.1. Podstawy liniowej mechaniki pękania.

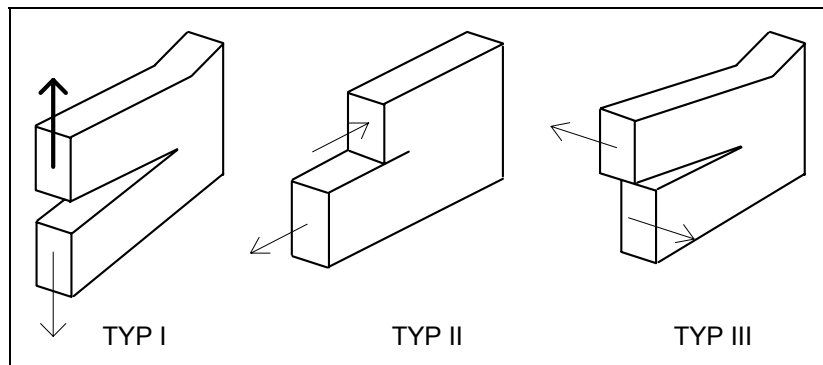
Defekty typu korbów i otworów stanowiły przedmiot zainteresowania mechaniki już od końca XIX stulecia. Klasyczne rozwiązania dla otworu kołowego (Kirsch) i eliptycznego (Inglis) wskazywały, że wywołują one lokalne koncentracje naprężeń, określane poprzez tzw. współczynniki koncentracji naprężeń. W przypadku, gdy defekty wykazywały osłabienie geometryczne, polegającą na zmierzaniu ich krzywizny do nieskończoności, naprężenia uzyskane na gruncie liniowej teorii sprężystości również zmierzały do nieskończoności, niezależnie od wartości przyłożonego obciążenia. Tak więc dowolnie małe obciążenie konstrukcji zawierającej szczelinę mogło spowodować przekroczenie wytrzymałości materiału i jej zniszczenie. Stało to w wyraźnej sprzeczności z rzeczywistym zachowaniem się konstrukcji, z którego wynikało, że mogą one bezpiecznie przenosić obciążenie nawet wówczas, gdy zawierają szczelinę, jeżeli tylko jej długość nie przekracza pewnej długości krytycznej (alternatywnie można powiedzieć, że działające obciążenie musi być mniejsze od krytycznego przy danej długości szczeliny). Stało się więc oczywiste, że konieczne jest nowe kryterium wytrzymałościowe, pozwalające racjonalnie uwzględnić efekt szczeliny.

Za początek analizy ciał ze szczelinami uważa się publikację Griffith'a z roku 1920, opierającą się o wcześniejsze analityczne prace Inglisa. Dotyczyła ona izotropowego i jednorodnego ciała liniowo sprężystego (stąd często mówi się o "liniowej mechanice pękania") zawierającego "ostrą" szczelinę (tzn. o promieniu krzywizny wycięcia zmierzającym do zera). Analizując bilans energetyczny ciała ze szczeliną i przyjmując, że warunkiem propagacji szczeliny jest uwalnianie się energii sprężystej - Griffith wyznaczył obciążenie krytyczne w postaci:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E G_{Ic}}{\pi a}} \quad (8.20)$$

gdzie E oznacza moduł Younga, a - połowę długości szczeliny, natomiast G_{Ic} jest "nową" stałą materiałową, nazywaną **krytyczną wartością prędkości uwalniania energii sprężystej**, charakteryzującą odporność materiału na pęknięcie.

Istotny postęp do mechaniki pęknięcia wniósł Irwin, który wprowadził fundamentalne pojęcie tzw. współczynnika intensywności naprężeń i znalazł jego związek z prędkością uwalniania energii. Irwin wyróżnił 3 możliwe typy szczelin, w zależności od sposobu w jaki przemieszczają się na skutek działającego obciążenia brzoży szczeliny - przedstawiono je na Rys. 8.9.



Rys. 8.9. Typy szczelin

Typy szczelin pokazane na Rys. 8.9 noszą nazwy:

- ★ Typ I - Rozrywanie; powierzchnie szczeliny rozchodzą się w kierunku prostopadłym do frontu szczeliny.
- ★ Typ II - Poprzeczne ścinanie; powierzchnie szczeliny ślizgają się po sobie w kierunku prostopadłym do frontu szczeliny.
- ★ Typ III - Podłużne ścinanie; powierzchnie szczeliny przesuwają się po sobie w kierunku równoległym do frontu szczeliny.

Dla I typu szczeliny Irwin uzyskał naprężenie w punktach leżących na osi szczeliny x w postaci (rys. 8.10) :

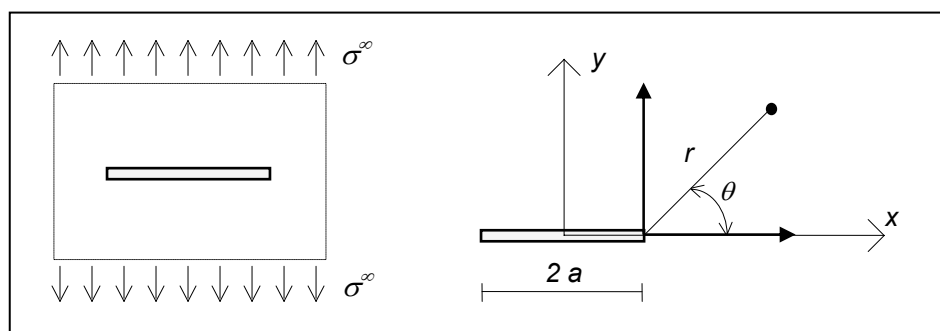
$$\sigma_y = \sigma^\infty \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{dla } |x| > a \quad (8.21)$$

W najbliższym otoczeniu wierzchołka szczeliny wyrażenie to redukuje się do "lokalnej" postaci:

$$\sigma_y = \sigma^\infty \sqrt{\frac{a}{2r}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (8.22)$$

gdzie

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (8.23)$$



Tys. 8.10. Układy współrzędnych dla szczeliny liniowej.

Rów. (8.22) jest szczególnym przypadkiem ogólnego rozwiązania, które dla wszystkich typów szczelin można przedstawić w następującej postaci:

$$\sigma_{ij}^M = \frac{K_M}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^M(\theta) \quad M = I, II, III \quad (8.24)$$

gdzie r i θ są współrzędnymi biegunowymi w układzie o początku umieszczonym w wierzchołku szczeliny, $f_{ij}^M(\theta)$ określa zależność kątową naprężeń, zaś K_M oznacza współczynnik intensywności naprężeń (WIN) dla danego typu szczeliny. Zauważmy, że rozkłady naprężeń (8.24) mają niezależnie od typu szczeliny identyczny charakter, a tym co je odróżnia jest postać współczynnika intensywności naprężeń. Jest to zatem podstawowa charakterystyka pola naprężeń wokół wierzchołka szczeliny, stąd jej znaczenie w mechanice pękania.

Warunek propagacji szczeliny wyrażony poprzez WIN przyjmuje postać:

$$K_I = K_{Ic} \quad (8.25)$$

gdzie K_{Ic} jest stałą materiałową, która nosi nazwę odporności na kruche pęknięcie (ang. *fracture toughness*). Znając postać WIN dla danej konfiguracji elementu konstrukcyjnego, obciążenia i szczeliny - z warunku (8.25) można wyznaczyć wytrzymałość tego elementu z punktu widzenia mechaniki pęknięcia.

Irwin wykazał, że między krytyczną prędkością uwalniania energii i odpornością na kruche pęknięcie istnieje następujący związek:

$$G_{Ic} = \begin{cases} \frac{K_{Ic}^2}{E} & \text{dla płaskiego stanu naprężenia} \\ \frac{K_{Ic}^2}{E} (1 - \nu^2) & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia} \end{cases} \quad (8.26)$$

Tak więc pokazane tu dwa (dodajmy, że dwa spośród wielu innych) kryteria wytrzymałościowe mechaniki pęknięcia, tzn. kryterium energetyczne Griffith'a i kryterium Irwina (zwane "siłowym") są sobie równoważne.

8.4.2. Mechanika pęknięcia w odniesieniu do materiałów anizotropowych.

Mechanika pęknięcia w przypadku materiałów anizotropowych, a w szczególności kompozytów laminatowych jest wciąż na etapie wstępnego rozwoju - jeżeli za punkt odniesienia przyjąć jej stan w odniesieniu do materiału izotropowego i jednorodnego - choć liczba prac dotyczących tego zagadnienia jest bardzo duża. Przyczyna tkwi w wielości czynników wpływających na zachowanie się ciała ze szczeliną, takich jak kierunkowość własności ciała, jego niejednorodność (np. w przypadku laminatów), skokowa zmiana własności na połączeniu warstw (w przypadku kompozytów warstwowych) i inne. To wszystko sprawia, że brak jest jasnego, jednoznacznego opisu ciała ze szczeliną w ośrodku anizotropowym.

Naprężenia w pobliżu wierzchołka szczeliny w jednorodnym, sprężystym ośrodku anizotropowym wyznaczył Lechnickij. Podamy je tu w formie podanej w pracy Paris'a i Sih'a :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) \right] & \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2^2}{v_2} - \frac{s_1^2}{v_1} \right) \right] \\ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1}{v_2} - \frac{s_2}{v_1} \right) \right] & \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \right] \\ \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \right] & \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1}{v_1} - \frac{s_2}{v_2} \right) \right] \end{bmatrix} \begin{cases} K_I \\ K_{II} \end{cases} \quad (8.27)$$

gdzie:

$$v_1 = \sqrt{\cos\theta + s_1 \sin\theta} \quad ; \quad v_2 = \sqrt{\cos\theta + s_2 \sin\theta} \quad (8.28)$$

Re oznacza część rzeczywistą funkcji zawartej w nawiasach, a s_1 i s_2 oraz liczby z nimi sprzężone są pierwiastkami równania charakterystycznego IV rzędu :

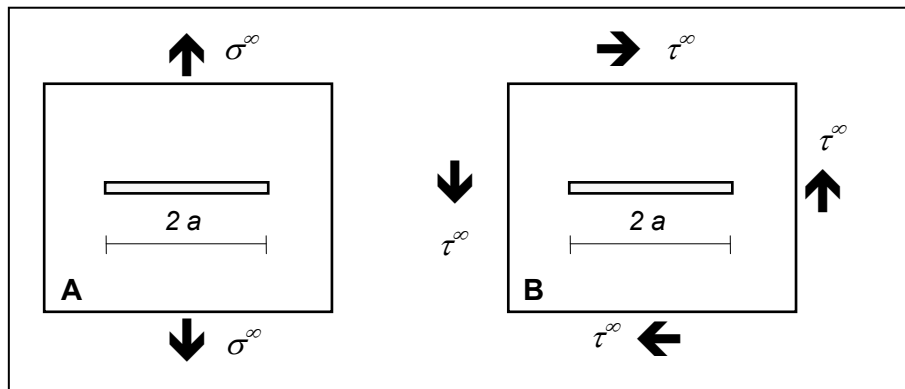
$$S_{11} s^4 - 2 S_{16} s^3 + (2 S_{12} + S_{66}) s^2 - 2 S_{26} s + S_{22} = 0 \quad (8.29)$$

Współczynniki S_{ij} to elementy macierzy podatności, wyrażające się poprzez moduły sprężystości, współczynnik Poissona i moduł ścinania (por. rozdz. 2). K_I i K_{II} oznaczają współczynniki intensywności naprężeń dla I i II typu rozwarcia szczeliny.

Można wykazać, że dla ciała anizotropowego ze szczeliną o konfiguracji jak na rys. 8.11 - WIN wyrażają się następującymi zależnościami:

$$K_I^A = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad ; \quad K_{II}^A = 0 \quad (8.30)$$

$$K_I^B = 0 \quad ; \quad K_{II}^B = \tau^\infty \sqrt{\pi a} \quad (8.31)$$



Rys. 8.11. Obciążenie szczeliny : A. I typu, B. II typu.

Zależności (8.30) i (8.31) są identyczne jak dla przypadku izotropowego. Paris i Sih uogólniają ten wniosek, twierząc że "prawidłowy sposób określenia anizotropowych współczynników intensywności naprężeń musi doprowadzić do identycznych zależności, jak dla przypadku izotropowego". Jones w swej monografii przytacza rezultaty doświadczalne Wu, potwierdzające to twierdzenie.

Sih uzyskał także związek między współczynnikami intensywności naprężeń, a prędkością uwalniania energii dla wszystkich trzech typów szczelin i ośrodka anizotropowego, analogiczny związek dla ciała ortotropowego podał Irwin. Ma on następującą postać ogólną:

$$G_M = c_M K_M^2 \quad M = I, II, III \quad (8.32)$$

Wartości współczynników c_M zestawiono w tab. 8.2.

Typ	Izotropia	Ortotropia ($A_{16}=A_{26}=A_{45}=0$)	Ogólna anizotropia
I	$\frac{1-\nu^2}{E}$	$\sqrt{\frac{S_{11} S_{22}}{2} \left(\frac{S_{22}}{S_{11}} + \frac{2 S_{12} + S_{66}}{2 S_{11}} \right)}$	$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[-S_{22} \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right]$
II	$\frac{1-\nu^2}{E}$	$\frac{S_{11}}{2} \sqrt{\left(\frac{S_{22}}{S_{11}} + \frac{2 S_{12} + S_{66}}{2 S_{11}} \right)}$	$\frac{1}{2} \operatorname{Im} [S_{11} (s_1 + s_2)]$
III	$\frac{1+\nu}{E}$	$\frac{1}{2 \sqrt{S_{44} S_{55}}}$	$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{S_{44} S_{55} - S_{45}^2}}{S_{44} S_{55}}$

Tab. 8.2. Współczynniki określające związek prędkości uwalniania energii i współczynników intensywności naprężeń.

8.4.3. Mechanika pęknięcia kompozytów.

Mechanika pęknięcia kompozytów, w tym laminatów daleka jest w chwili obecnej daleka od osiągnięcia stanu, w jakim znajduje się "klasyczna" mechanika pęknięcia materiałów jednorodnych i izotropowych (metale, materiały ceramiczne i in.). Złożoność zjawisk towarzyszących propagacji szczeliny sprawia, że trudno mówić o uniwersalnych metodach opisu pęknięcia. Większość rozwiązań zadania szczeliny w materiałach laminatowych to rozwiązania numeryczne. W rozdziale tym ograniczymy się do przedstawienia prostego modelu teoretycznego Whitney'a-Nuismer'a i omówienia wyników badań doświadczalnych dotyczących pęknięcia laminatów. Pozwalają one na uzyskanie w miarę ogólnego "makroskopowego" (w tym sensie, że nie będziemy wnikać w mikromechanizmy pęknięcia) obrazu zagadnienia, a także szybką ocenę odporności laminatu na pęknięcie. Rozdział ten oparty jest o opublikowane wykłady Beaumont'a.

Model Whitney'a-Nuismer'a bazuje na rozkładzie naprężenia wzdłuż osi szczeliny wprowadzonym przez Irwina - rów. (8.21).

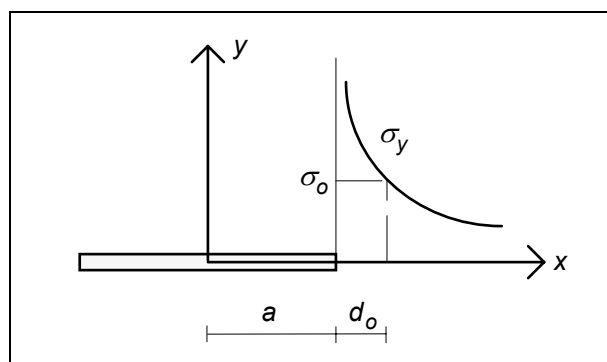
$$\sigma_y = \sigma^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (8.33)$$

Wytrzymałość ciała ze szczeliną określana poprzez odniesienie jej do wytrzymałości tego samego ciała, ale "gładkiego" - tzn. bez szczeliny. Stosuje się w tym modelu dwie koncepcje :

1. koncepcja "naprężenia punktowego" (ang. "Point Stress" approach),
2. koncepcja "naprężenia średniego" (ang. "Average Stress" approach).

◆ Koncepcja "naprężenia punktowego".

Istota tego podejścia polega na założeniu, że zniszczenie laminatu nastąpi wówczas, gdy naprężenie w punkcie oddalonym o d_o od wierzchołka szczeliny osiągnie wartość równą wytrzymałości na rozciąganie laminatu bez szczeliny - rys. 8.12.



Rys. 8.12. Ilustracja koncepcji "naprężenia punktowego" dla laminatu ze szczeliną.

Kryterium zniszczenia ma zatem postać:

$$\sigma_y \Big|_{x=a+d_o, \sigma^\infty=\sigma_N^\infty} = \sigma_o \quad (8.34)$$

gdzie σ_o oznacza wytrzymałość na rozciąganie laminatu bez szczeliny, σ_N^∞ - wytrzymałość z uwzględnieniem obecności szczeliny.

Korzystając z rów. (8.39) otrzymujemy:

$$\frac{\sigma_N^\infty}{\sigma_o} = \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad \xi_1 = \frac{a}{a + d_o} \quad (8.35)$$

◆ Koncepcja "naprężenia średniego".

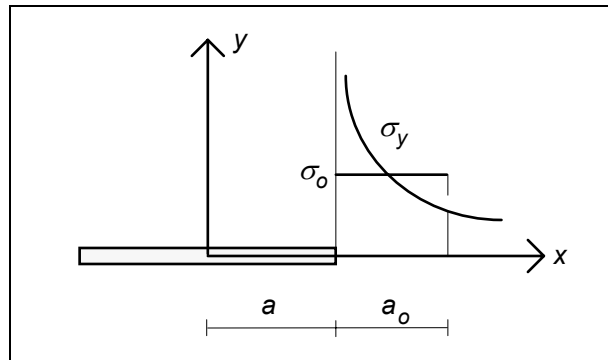
To podejście Whitney'a-Nuismer'a zakłada z kolei, że zniszczenie laminatu nastąpi wówczas, gdy naprężenie uśrednione na odcinku o długości a_o , przylegającym do wierzchołka szczeliny osiągnie wartość równą wytrzymałości na rozciąganie laminatu bez szczeliny - rys. 8.13.

Kryterium zniszczenia przyjmuje w tym przypadku formę:

$$\sigma_N^\infty \int_a^{a+a_o} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sigma_o a_o \quad (8.36)$$

Po obliczeniu całki otrzymujemy:

$$\frac{\sigma_N^\infty}{\sigma_o} = \sqrt{\frac{1 - \xi_2}{1 + \xi_2}} \quad \xi_2 = \frac{a}{a + a_o} \quad (8.37)$$



Rys. 8.13. Ilustracja koncepcji "naprężenia średniego" dla laminatu ze szczeliną.

Związki (8.35) i (8.37) zależą od parametrów a_o i d_o , które traktowane są jako stałe materiałowe, niezależne od długości szczeliny a . Whitney i Nuismer na podstawie doświadczeń przeprowadzonych na próbkach laminatowych o wielu różnych układach warstw i wykonanych z kilku różnych materiałów kompozytowych (plastyczna matryca zbrojona włóknami jednokierunkowymi) ustalili wartość tych parametrów, wynoszące $a_o=3.8$ mm, $d_o=1.02$ mm. Beaumont zestawiał danych doświadczalne z kilkuset testów wytrzymałościowych próbek ze szczeliną i gładkich (różniących się układem warstw, materiałem, wymiarami próbek, kształtami defektów - otwory kołowe i płaskie nacięcia, a nawet orientacją nacięć (szczelin) wzg. kierunku obciążenia i uzyskał na tej podstawie wartości średnie $a_o=1.5$ mm, $d_o=0.4$ mm.

Biorąc pod uwagę, że współczynnik intensywności naprężeń dla nieskończonego pasma ma postać:

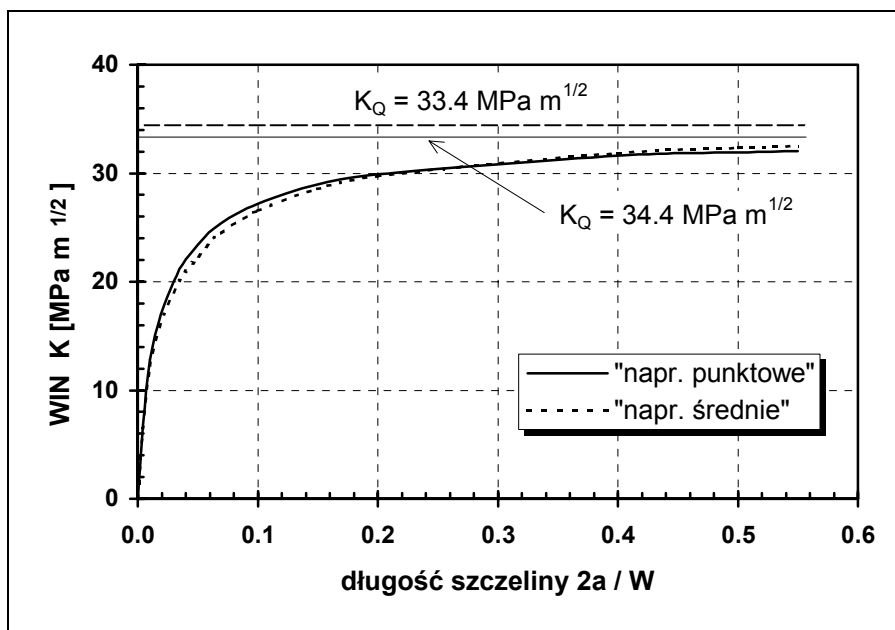
$$K = \sigma_N^\infty \sqrt{\pi a} \quad (8.38)$$

dla analizowanych tu koncepcji naprężenia punktowego i średniego dostajemy odpowiednio:

$$K = \sigma_o \sqrt{\pi a (1 - \xi_1^2)} \quad (8.39)$$

$$K = \sigma_o \sqrt{\pi a \frac{1 - \xi_2}{1 + \xi_2}} \quad (8.40)$$

Przykładowe wykresy zależności (8.39) i (8.40) pokazano na rys. 8.14. Przy ich sporządzaniu wykorzystano dane doświadczalne Beaumont'a dla laminatu grafit/epoksyd o sekwencji warstw $[0/\pm 45]_S$. Szerokość próbek wynosiła $W=25.4$ mm, wytrzymałość na rozciąganie próbek gładkich $\sigma_o=659.0$ MPa, parametry $a_o=1.74$ mm, $d_o=0.41$ mm.



Rys. 8.14. Współczynnik intensywności naprężeń (WIN) w funkcji długości szczeliny wg modelu Whitney'a-Nuismer'a.

Wraz ze wzrostem długości szczeliny, wartość współczynnika intensywności naprężeń zmierza asymptotycznie do stałej wartości (jest to granica wyrażenia (8.39) i (8.40) przy $a \rightarrow \infty$), która dla podejścia opartego o "naprężenie punktowe" wynosi :

$$K_Q = \sigma_o \sqrt{2 \pi d_o} \quad (8.41)$$

a dla podejścia opartego o "naprężenie średnie":

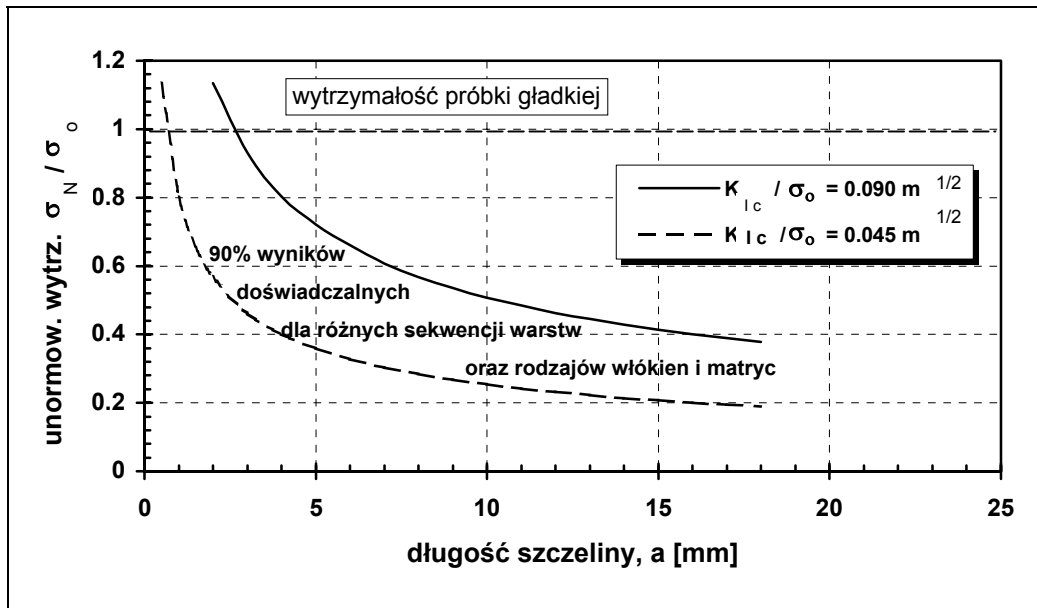
$$K_Q = \sigma_o \sqrt{\frac{\pi a_o}{2}} \quad (8.42)$$

Są to tzw. krytyczne wartości współczynnika intensywności naprężeń. Z rys. 8.14 widać, że różnice między rezultatami uzyskiwanymi z obu koncepcji Whitney'a-Nuismer'a są znikome.

Zapiszmy związek (8.38) w postaci:

$$\frac{\sigma_N^\infty}{\sigma_o} = \frac{K_{Ic}}{\sigma_o \sqrt{\pi a}} \quad (8.43)$$

Na rys. 8.15 pokazano wykresy zależności (8.43) opisującej stosunek wytrzymałości próbki laminatowej ze szczeliną σ_N^∞ do wytrzymałości próbki gładkiej σ_o dla arbitralnie wybranych wartości stosunku odporności na pękanie K_{Ic} i σ_o , wynoszących $0.09 \text{ m}^{1/2}$ i $0.045 \text{ m}^{1/2}$ - w funkcji długości szczeliny a . Wspomniana już analiza porównawcza dostępnych wyników doświadczalnych przeprowadzona przez Beaumont'a wykazuje, że 90 % tych wyników dotyczących kompozytów o matrycy epoksydowej zbrojonej włóknami węglowymi, grafitowymi, szklanymi i kevlarem 49, o wielu różnych sekwencjach warstw - mieści się między tymi arbitralnie wybranymi krzywymi.



Rys. 8.15. Unormowana wytrzymałość laminatów w funkcji długości szczeliny.

Na tej podstawie Beaumont zaproponował bardzo prostą formułę empiryczną pozwalającą określić wartość odporności na kruche pękanie laminatu jako ułamka jego wytrzymałości na rozciąganie (tę z kolei można wyznaczyć doświadczalnie lub też na drodze teoretycznej - por. rozdz. 6). Formuła ta ma następującą postać:

$$K_{Ic} = \sigma_o \times (0.07 \pm 0.02 m^{1/2}) \tag{8.44}$$

Typowe wartości odporności na pękanie laminatów o matrycy epoksydowej, zbrojonej różnymi rodzajami włókien podano za Beaumont'em w tab. 8.3. W celach porównawczych - w tab. 8.4 zestawiono wartości dla wybranych stali, stopów tytanu i aluminium (na podst. danych Broek'a).

Wartość krytycznej prędkości uwalniania energii G_{Ic} można wyznaczyć korzystając z rów. (8.32) i tabeli (8.2).

Przedstawiony tu opis pękania laminatów jest ilustracją tylko jednego podejścia do tego zagadnienia, opartego na prostym modelu teoretycznym i bazującym przede wszystkim na analizie wyników doświadczalnych. Czytelnicy zainteresowani tą tematyką powinni sięgnąć do literatury specjalistycznej poświęconej mechanice pękania, ale głównie do czasopism naukowych, takich jak np. *Journal of Composite Materials* czy *International Journal of Damage Mechanics*.

KONFIGURACJA	ODPORNOŚĆ NA PĘKANIE K_{Ic} [MPa m ^{1/2}]			
	węgiel WW	szkło E	boron	Kevlar 49
0	90.0	70 *	120 *	95 *
[0 / 90] _{2s}	42.1	30.7	-	40 *
[0 / ± 45 / 90] _{2s}	32.8	24.3	-	30.0
[0 / ± 45] _{2s}	33.2	-	-	-
[0 ₂ / ± 45] _{2s}	-	40 *	67.0	-
[± 45]	-	-	-	14.0
[0 ₂ / ± 45 / 90] _{2s}	-	-	38.7	-

* wartości orientacyjne otrzymane w oparciu o zależność (8.44) na podstawie danych dotyczących wytrzymałości laminatu na rozciąganie.

TABELA 8.3. Typowe wartości odporności na pękanie wybranych laminatów o matrycy epoksydowej.

MATERIAŁ Stal	K_{Ic} [MPa m ^{1/2}]	MATERIAŁ Aluminium	K_{Ic} [MPa m ^{1/2}]	MATERIAŁ Tytan	K_{Ic} [MPa m ^{1/2}]
martenzytowa 300	57 - 93	Al 7075-T651	30	Ti 6Al-4V	38
martenzytowa 350	39	Al 7079-T651	33	Ti 6Al-6V-2Sn	37
D 6 AC	66	Al 2014-T4	28	Ti 4Al-4Mo-2Sn-0.5Si	70
AISI 4340	47	Al 2024-T3	34		
reaktorowa A 533 B	198				
węglowa	220				

TABELA 8.4. Odporność na pękanie typowych stali i stopów.

