

## ROZDZIAŁ 7

## **ROZDZIAŁ 7**

### **MIKROMECHANIKA KOMPOZYTÓW**

W dotychczasowej analizie materiałów kompozytowych, obejmującej m.in. budowę macierzy sztywności i podatności, wyznaczanie stałych inżynierskich oraz określenie wytrzymałości kompozytów, przyjmowaliśmy milcząco założenie o ich homogeniczności (jednorodności). Bez trudu potrafiliśmy np. określić stałe inżynierskie dla laminatu szkło/epoksyd, nie wnikając w to jaki jest udział włókien szklanych w ogólnej objętości laminatu, kształt ich przekroju czy rozmieszczenie włókien w przekroju poprzecznym laminatu. Traktowaliśmy kompozyt tak, jak każdy inny ośrodek jednorodny, tyle, że anizotropowy. Do pewnego stopnia zapomnieliśmy, że w skład kompozytu wchodzi co najmniej dwa różne składniki, których własności fizyczne, chemiczne, geometryczne itp. muszą mieć bezpośredni wpływ na własności utworzonego przez nie kompozytu. O obecności włókien w laminatach była mowa tylko wówczas, gdy określany był kod laminatu, podający kąty pomiędzy kierunkami włókien i osiami dowolnego układu odniesienia.

Takie postępowanie możliwe było dzięki temu, że zachodziło ono na poziomie makroskopowym, kiedy wieloskładnikowa budowa kompozytu nie miała znaczenia z punktu widzenia wyznaczania np. charakterystyk materiałowych. Te otrzymuje się bowiem dla próbki kompozytowej w standardowych próbach (jednoosiowe rozciąganie, ściskanie, ścinanie) i w zależności od sposobu ich przeprowadzenia, uzyskane wartości mniej lub bardziej dokładnie opisują makroskopowe własności badanego materiału. Znajomość mikrobudowy kompozytu, jakkolwiek decydującej o uzyskanych wynikach makroskopowych, jest tu całkowicie zbędna. Z drugiej jednak strony, jest powszechnie znanym fakt występowania zasadniczych różnic w wartościach charakterystyk materiałowych dla kompozytów składających się z tych samych składników (pod względem gatunkowym - np. matryca epoksydowa zbrojona włóknem szklanym), których nie da się wyjaśnić na gruncie makroskopowym. Różnice te znajdują swoje źródło w mikroskopowej budowie kompozytu, charakteryzującej się wieloma parametrami dotyczącymi własności fizycznych, chemicznych, mechanicznych i geometrycznych (objętościowy udział poszczególnych składników, ich rozmiar i kształt, sposób "upakowania" w przekroju) składników tworzących materiał kompozytowy. Odpowiedź na pytanie - jak mikrobudowa wpływa na makroskopowe własności kompozytu - możliwa jest tylko na poziomie analizy mikroskopowej.

Dział mechaniki kompozytów zajmujący się mikroskopową (tzn. uwzględniającą własności składników) analizą materiałów kompozytowych nosi nazwę **mikromechaniki kompozytów**. W oparciu o odpowiednie modele mikromechaniczne można przewidzieć podstawowe charakterystyki materiału (makroskopowe), takie jak

- ◆ moduły Younga
- ◆ współczynniki Poisson'a
- ◆ moduły ścinania
- ◆ współczynniki rozszerzalności cieplnej
- ◆ charakterystyki wytrzymałościowe

wyrażające się przez wartości charakterystyk poszczególnych składników (np. matrycy i włókien).

W analizie makroskopowej laminatów o warstwach jednokierunkowo zbrojonych podstawowe znaczenie odgrywają stałe materiałowe dla osiowej konfiguracji pojedynczej warstwy. To na ich podstawie buduje się kolejno: transformowane macierze sztywności dla pojedynczych warstw, macierz sztywności tarczowej, sprzężeń i zginania dla laminatu (zbioru warstw). W analizie

wytrzymałości laminatu wykorzystuje się stałe, które także dotyczą konfiguracji osiowej warstwy. Podstawowym celem mikromechaniki w odniesieniu do tej grupy kompozytów jest zatem określenie stałych "osiowych" w funkcji charakterystyk materiałowych matrycy i włókien. Cel ten można zapisać symbolicznie w postaci

$$P = P(E_m, E_f, \nu_m, \nu_f, \nu_m, \nu_f) \quad (7.1)$$

$$X = X(X_m, X_f, \nu_m, \nu_f) \quad (7.2)$$

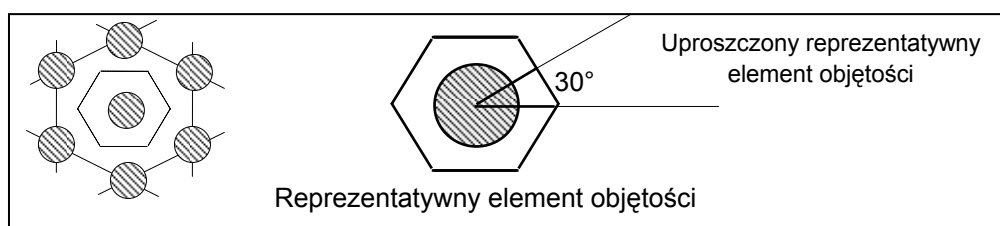
$$\alpha = \alpha(\alpha_m, \alpha_f, E_m, E_f, \nu_m, \nu_f) \quad (7.3)$$

Przez  $P$  należy rozumieć jedną ze stałych sprężystych w osiowej konfiguracji warstwy,  $E_m$ ,  $E_f$  - odpowiednie moduły sprężystości matrycy i włókien,  $\nu_m$ ,  $\nu_f$  - objętościowe udziały matrycy i włókien,  $\nu_m$ ,  $\nu_f$  - odpowiednie współczynniki Poisson'a dla matrycy i włókien.  $X$  oznacza jedną z charakterystyk wytrzymałościowych warstwy osiowej,  $X_m$ ,  $X_f$  - odpowiednie stałe wytrzymałościowe dla matrycy i włókien. Symbolem  $\alpha$  oznaczono współczynniki rozszerzalności liniowej warstwy osiowej,  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$  - odpowiednie współczynniki dla matrycy i włókien.

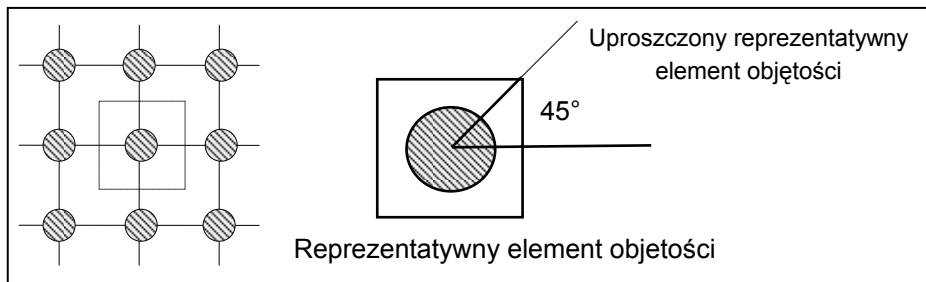
Większość modeli mikroskopowych bazuje na tych samych podstawach formalnych - przyjmuje się, że zarówno matryca, jak i włókna są jednorodne, izotropowe i liniowo sprężyste. Przyjmuje się ponadto, że włókna są regularnie rozmieszczone w przekroju i doskonale połączone z otaczającą je matrycą, co oznacza brak występowania poślizgów na granicy matryca-włókno. W odniesieniu do matryc przyjęte założenia dobrze odpowiadają rzeczywistym materiałom, tak więc z izotropii wynika, że można je opisać przy pomocy tylko dwóch stałych sprężystych - modułu Younga i współczynnika Poisson'a. Nieco inaczej jest z włóknami, które mogą być izotropowe, jak np. włókna szklane, ale mogą także nie spełniać warunku izotropii. Typowym przykładem są włókna węglowe i włókna organiczne (np. Kevlar), których własności w kierunku poprzecznym do włókien są wyraźnie inne niż w kierunku podłużnym, powinno się zatem przy ich opisie używać (w stanie płaskim) 4 stałych tzn. dwóch modułów Younga, jednego ze współczynników Poisson'a i modułu ścinania. Problem polega jednak na tym, że doświadczalne określenie własności poprzecznych włókien napotyka na znaczne trudności, a uzyskiwane wyniki charakteryzują się dużym rozrzutem. Często w związku z tym przyjmuje się założenie izotropii, co w pewnym stopniu tłumaczy dlaczego teoretyczne zależności określające makroskopowy poprzeczny moduł Younga w funkcji własności składników najtrudniej - obok modułu ścinania - "dopasować" do wyników testów wykonywanych na próbkach makroskopowych.

Przy określaniu własności makroskopowych na podstawie własności składników kompozytu stosuje się wiele metod, co z jednej strony jest przejawem dążenia do znalezienia modelu najlepiej pasującego do wyników badań, ale z drugiej - stanowi dowód, że model "idealny", a jednocześnie stosunkowo prosty w praktycznym zastosowaniu w zasadzie nie istnieje.

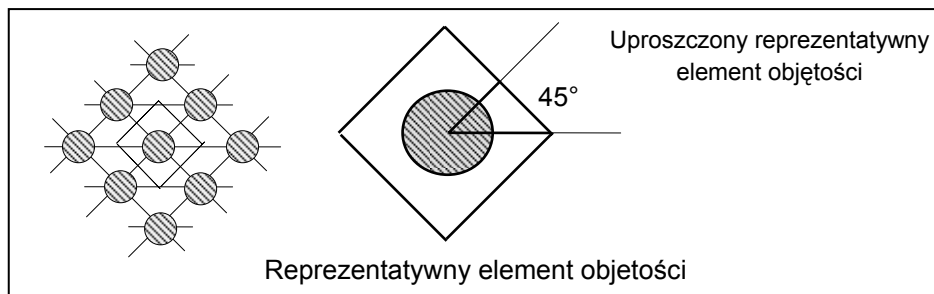
Podstawową rolę w większości modeli mikromechanicznych materiału wieloskładnikowego odgrywa pojęcie **reprezentatywnego elementu objętościowego** (ang. *Representative Volume Element - RVE*), tzn. takiego elementu, który z jednej strony pozwala uwzględnić mikrostrukturę kompozytu, a z drugiej prawidłowo oddaje jego cechy makroskopowe. Można powiedzieć, że RVE to możliwie najmniejsze "okno", przez które obserwujemy kompozyt i dobrze widząc mikrobudowę nie tracimy z oczu jego własności w skali makroskopowej. Stopień komplikacji RVE zależy od typu kompozytu, a w szczególności od jego wypełnienia. Stosowane są dwuwymiarowe, jak i trójwymiarowe elementy reprezentatywne. Wspólną ich cechą jest występowanie w RVE jednego włókna, przy czym zakłada się, że przekroje włókien tworzą "tablicę" o określonej strukturze geometrycznej (np. heksagonalnej, kwadratowej, obróconej kwadratowej i in.). Typowe "tablice" przekrojów włókien okrągłych i odpowiadające im elementy reprezentatywne pokazano na rysunkach 7.1, 7.2 i 7.3.



Rys. 7.1. Heksagonalny układ przekrojów poprzecznych włókien i reprezentatywny element objętości.



Rys. 7.2. Kwadratowy układ przekrojów poprzecznych włókien i reprezentatywny element objętości.



Rys. 7.3. Obrócony kwadratowy układ przekrojów poprzecznych włókien i reprezentatywny element objętości.

Wymiary reprezentatywnego elementu objętości dobierane są zazwyczaj w ten sposób, że za jeden z nich przyjmuje się rozstaw włókien w przekroju poprzecznym, za drugi grubość warstwy kompozytowej (lub rozstaw włókien na grubości warstwy), a trzeci dowolnie.

Celem analizy RVE jest uzyskanie związków między makroskopowo mierzalnymi charakterystykami materiałowymi kompozytu i charakterystykami tworzących go składników, zapisanych symbolicznie w postaci równań (7.1) - (7.3). Analiza ta może być dokonywana przy zastosowaniu wielu metod, opartych na liniowej sprężystości i jej aparacie formalnym. Większość autorów podaje za *Chamisem i Sendekim* podział tych metod na następujące grupy :

- ◆ mechanika materiałów,
- ◆ metody wariacyjne ( twierdzenia ekstremalne - ang. *energy bounding principles*)
- ◆ metody pół-empiryczne
- ◆ metody samo-spójne (ang. *self-consistent field*)
- ◆ metody numeryczne.

Metody numeryczne (metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych, rozwinięcia szeregów) dostarczają cennych rozwiązań, ale ze swej natury dotyczą one określonych materiałów i geometrii włókien, co uniemożliwia jakiegokolwiek ich uogólnienia na inne materiały. Pozwalają one jednak na weryfikację założeń upraszczających wprowadzanych w modelach "analitycznych", dostarczających rozwiązań w formie zamkniętej.

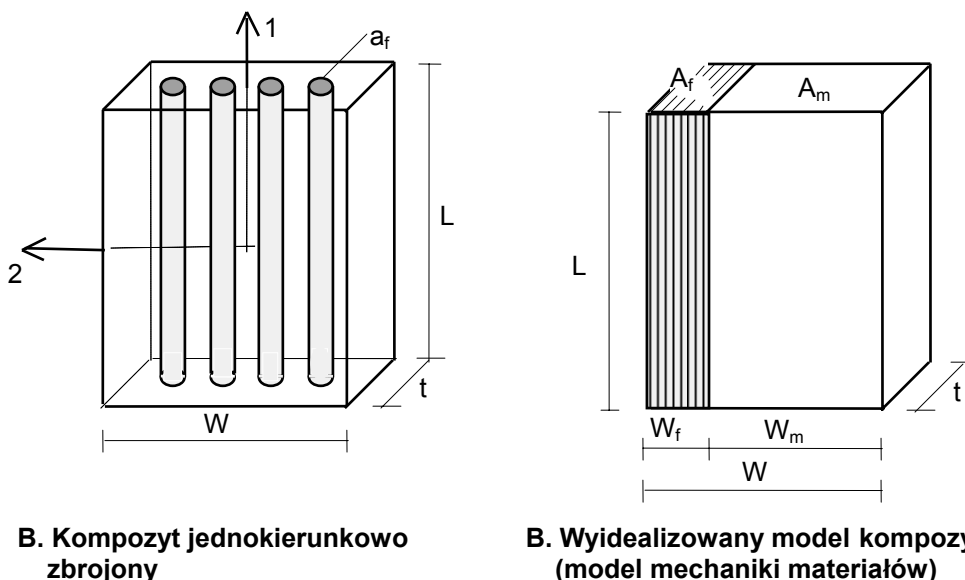
Podejście mechaniki materiałów jest najprostsze tak pojęciowo, jak i obliczeniowo, toteż jest najczęściej wykorzystywane. Należy jednak mieć świadomość, że w przypadku modułu ścinania, a szczególnie poprzecznego modułu Younga daje ono wartości zaniżone w stosunku do wartości mierzonych w próbach doświadczalnych. Wprowadzane poprawki do modeli bazujących na mechanice materiałów nieco złagodziły wspomniane "niedoszacowanie", ale nie na tyle, aby móc bezkrytycznie uznać podejście mechaniczne za wolne od wad czy ograniczeń w zastosowaniu. Niemniej jednak z uwagi na stosunkową jego prostotę, a jednocześnie prawidłowe jakościowo wnioski z niego płynące, a dotyczące wpływu (lub też jego braku) poszczególnych składników kompozytu na określone stałe materiałowe - warte jest szerszego przedstawienia - dotyczyć tego będzie pkt. 7.1. Będzie tam również pokazane tzw. podejście kombinowane mechaniki materiałów.

W punkcie 7.2 przedstawione będzie semi-empiryczne podejście Halpina-Tsai'a, odgrywające podstawową rolę w wyznaczaniu charakterystyk sprężystych kompozytu.

Metody wariacyjne oraz samo-spójne, jako metody o mniejszym znaczeniu praktycznym zostaną tu pominięte. Czytelnicy zainteresowani tą tematyką mogą znaleźć szeroką prezentację tych metod i wynikających z nich rozwiązań we wspomnianych we wstępie do skryptu podręczniku Jones'a, a także Delaware Encyclopedia. (vol.2., sec.2.3).

### 7.1. Charakterystyki materiałowe kompozytu. Podejście mechaniki materiałów

Analizowany będzie kompozyt jednokierunkowo zbrojony pokazany na rysunku 7.4 wraz z wyidealizowanym modelem obliczeniowym.



Rys. 7.4. Kompozyt jednokierunkowy i jego model mechaniczny.

Model wyidealizowany kompozytu jednokierunkowego jest zbudowany w ten sposób, że wszystkie włókna z próbki skupiono w jednym prostopadłościanie o objętości  $L \times t \times W_f$ , przy czym łączna powierzchnia przekrojów poprzecznych włókien  $A_f$  jest sumą powierzchni wszystkich pojedynczych włókien o przekroju jednostkowym  $a_f$ . Podobne rozumowanie zastosowano do matrycy, której pole powierzchni "skupionego" przekroju poprzecznego oznaczono  $A_m$ . Osie współrzędnych (1, 2) są głównymi osiami materiałowymi.

Podejście mechaniki materiałów jest oparte na pewnych założeniach upraszczających, pozwalających uzyskać wielkości stałych materiałowych w postaci zamkniętej. Podstawowe założenia są następujące

- ◆ odkształcenia liniowe o kierunku włókien są takie same w matrycy i we włóknach,
- ◆ obowiązuje jednoosiowy stan naprężenia, gdy próbka poddana jest działaniu obciążenia  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{12}$ .

Pierwsze z nich oznacza, że nie dopuszcza się poślizgów, jakie mogą wystąpić na granicach włókno/matryca i wywołanego nimi efektu "wrywania" włókna z matrycy. Mówiąc inaczej, zakłada się idealne (nierozzerwalne) połączenie składników kompozytu.

W oparciu o podejście mechaniki materiałów wyznaczone zostaną moduły Younga (podłużny  $E_1$  i poprzeczny  $E_2$ ), większy współczynnik Poisson'a  $\nu_{12}$ , moduł ścinania  $G_{12}$ , a także współczynniki rozszerzalności cieplnej  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  w funkcji objętościowych udziałów włókien i matrycy oraz ich charakterystyk materiałowych.

W odniesieniu do własności włókien i matrycy odstępimy od założenia ich izotropii, przyjmując, że są one ortotropowe. Dzięki temu przypadek izotropii (również izotropii poprzecznej) będzie można uzyskać z otrzymanych rozwiązań jako przypadek szczególny.

W dalszej analizie przyjęto następujące oznaczenia

- ◆  $E_1, E_{1m}, E_{1f}$ , - podłużne moduły Younga, odpowiednio kompozytu, matrycy i włókien,
- ◆  $E_2, E_{2m}, E_{2f}$ , - poprzeczne moduły Younga kompozytu, matrycy i włókien,

- ◆  $G_{12}, G_{12m}, G_{12f}$ , - moduły ścinania, kompozytu, matrycy i włókien,
- ◆  $\nu_{12}, \nu_{12m}, \nu_{12f}$ , - większe (ang. *major*) współczynniki Poisson'a kompozytu, matrycy i włókien,
- ◆  $\alpha_1, \alpha_{1m}, \alpha_{1f}$ , - współczynniki podłużnej rozszerzalności cieplnej kompozytu, matrycy i włókien,
- ◆  $\alpha_2, \alpha_{2m}, \alpha_{2f}$ , - współczynniki poprzecznej rozszerzalności cieplnej kompozytu, matrycy i włókien,
- ◆  $\nu_m, \nu_f$ , - objętościowe udziały matrycy i włókien tzn. stosunki łącznej objętości matrycy i włókien do całkowitej objętości kompozytu.

### 7.1.1. Podłużny moduł Younga $E_1$

Zależność określającą podłużny moduł Younga  $E_1$  można uzyskać rozważając odpowiedź modelu na przyłożone do ścianek poprzecznych do osi  $x_1$ , równomierne obciążenie rozciągające  $\sigma_1$ .

Odształcenie liniowe, jakie wówczas powstaje, określone jest zależnością

$$\varepsilon_1 = (L_k - L) / L \quad (7.4)$$

gdzie  $L_k$  oznacza długość próbki po rozciągnięciu.

Podłużny moduł sprężystości kompozytu wyrażony jest w tym przypadku związkiem

$$E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1 \quad (7.5)$$

Tak więc, aby wyznaczyć  $E_1$  należy określić związek naprężenia  $\sigma_1$  z naprężeniami powstającymi w matrycy i we włóknach. Nie zachodzi taka potrzeba w przypadku odkształcenia  $\varepsilon_1$ , gdyż na mocy przyjętego wcześniej założenia, odkształcenia liniowe próbki i jej składników są takie same, tzn.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1f} = \varepsilon_{1m} \quad (7.6)$$

Siły powstające w kompozycie, matrycy i włóknach, a wywołane obciążeniem zewnętrznym wynoszą odpowiednio

$$F_1 = \sigma_1 A$$

$$F_m = \sigma_m A_m \quad (7.7)$$

$$F_f = \sigma_f A_f$$

Siła  $F_1$  rozdziela się między włókna i matrycę, z warunku równowagi sił wynika zatem związek

$$F_1 = F_m + F_f \quad (7.8)$$

Wstawiając (7.7) do (7.8) i korzystając z tego, że objętościowe udziały włókien i matrycy można zapisać w postaci

$$\nu_f = A_f / A, \quad \nu_m = A_m / A \quad (7.9)$$

otrzymujemy zależność między naprężeniami w kompozycie, matrycy i zbrojeniu

$$\sigma_1 = \nu_m \sigma_m + \nu_f \sigma_f \quad (7.10)$$

Podstawienie równania (7.10) do związku określającego podłużny moduł Younga - równanie (7.5), z uwzględnieniem założenia (7.6), pozwala zapisać moduł  $E_1$  w postaci

$$E_1 = \nu_m (\sigma_m / \varepsilon_{1m}) + \nu_f (\sigma_f / \varepsilon_{1f}) \quad (7.11)$$

Dla dalszej analizy kluczowe obecnie jest pytanie - jaką postać mają wyrazy ujęte w nawiasy, w równaniu (7.11). Występujące tam odkształcenia można wyznaczyć ze związku fizycznego (2.2). Pamiętając o przyjętym założeniu o ortotropii tak włókien, jak i matrycy, macierz podatności w (2.2) należy przyjąć w postaci (2.21). Łatwo wykazać, że odkształcenia liniowe  $\varepsilon_{1f}$  i  $\varepsilon_{1m}$  zależą nie tylko od naprężeń normalnych - odpowiednio  $\sigma_{1f}$  i  $\sigma_{1m}$ , ale również pozostałych naprężeń normalnych. W kompozytach, na skutek różnicy między wartościami współczynników Poisson'a dla matrycy i włókien, obciążenie  $\sigma_1$  może wywoływać niezerowe wartości tych naprężeń. Ten efekt jest jednak w modelach mechaniki materiałów pomijany i jak to powiedziano już wcześniej, przyjmuje się jednoosiowy stan naprężenia. W rezultacie odkształcenia liniowe w matrycy i włóknach wynoszą

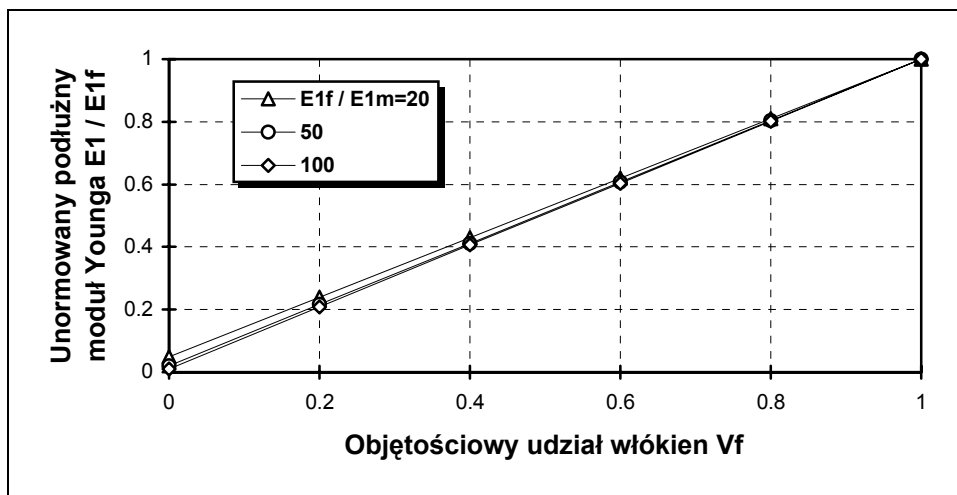
$$\varepsilon_{1m} = \sigma_m / E_{1m} \quad , \quad \varepsilon_{1f} = \sigma_f / E_{1f} \quad (7.12)$$

Z (7.11) po wstawieniu (7.12) otrzymujemy poszukiwaną wartość podłużnego modułu Younga kompozytu, wyrażoną poprzez udziały objętościowe i podłużne moduły Younga matrycy i włókien

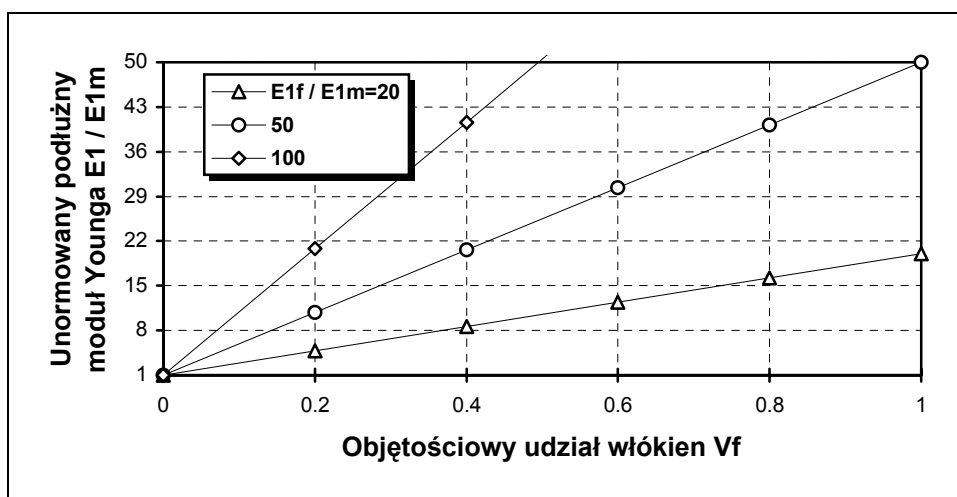
$$E_1 = v_m E_{1m} + v_f E_{1f} \quad (7.13)$$

Równanie (7.13) nosi nazwę **zasady mieszanin** dla podłużnego modułu sprężystości. Wynika z niego liniowa zależność modułu podłużnego od objętościowych udziałów matrycy i włókien.

Na rysunkach 7.5 i 7.6 przedstawiono zależność unormowanego modułu podłużnego kompozytu, odpowiednio  $E_1 / E_{1f}$  i  $E_1 / E_{1m}$  w funkcji objętościowego udziału włókien, przy wartościach stosunku modułu podłużnego matrycy i włókien, występujących w rzeczywistych kompozytach.



Rys. 7.5. Zależność unormowanego modułu sprężystości  $E_1 / E_{1f}$  od objętościowego udziału włókien.



Rys. 7.6. Zależność unormowanego modułu sprężystości  $E_1 / E_{1m}$  od objętościowego udziału włókien.

Z wykresu (7.5) widać, że moduł unormowany  $E_1 / E_{1f}$  w niewielkim stopniu zależy od stosunku modułów sprężystości składników. Zależy on przede wszystkim od udziału włókien (tym samym matrycy) w kompozycie. W pewnym przybliżeniu można powiedzieć, że moduł podłużny kompozytu jest równy iloczynowi objętościowego udziału włókien i ich modułu podłużnego - np. przy 50 procentowym udziale objętościowym składników, moduł podłużny kompozytu jest równy ok. połowie modułu podłużnego włókien. Tak więc **chcąc uzyskać kompozyt o dużej sztywności podłużnej należy zastosować w odpowiedniej ilości włókna z materiału o wysokim module sprężystości, matrycy pozostawiając rolę przede wszystkim spoiwa.**

Powyższe wnioski wynikają także z wykresu (7.6), z którego łatwiej prześledzić jest znaczenie włókien w kompozycie. Weźmy jako stan wyjściowy materiał jednorodny bez udziału włókien tzn. samą matrycę. Jej moduł Younga jest rzędu kilku GPa (tablica 1.3). Dodanie niewielkiej ilości włókien - np. w ilości 20 procent objętości kompozytu (w rzeczywistych kompozytach włókna stanowią średnio 60 procent) powoduje wzrost modułu podłużnego, już nie materiału jednorodnego, ale kompozytu, od kilku do kilkunastu razy (w zależności od modułu włókien) w stosunku do stanu wyjściowego !

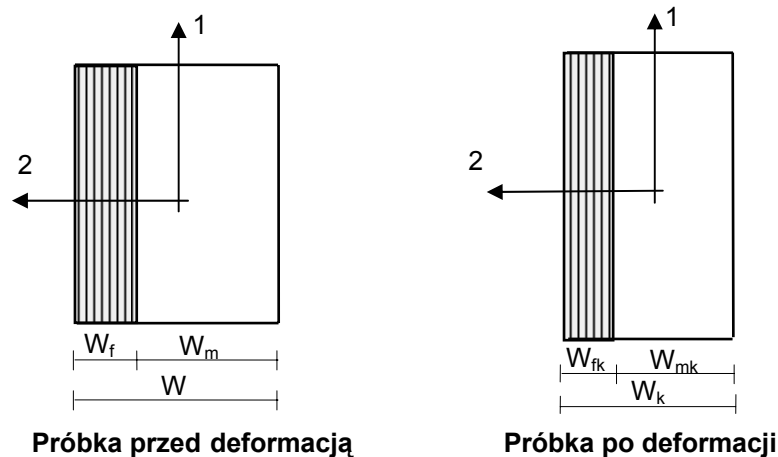
Liczne badania doświadczalne wykazały, że związek (7.13) daje bardzo dobrą zgodność wartości modułu podłużnego obliczonego na podstawie charakterystyk składników kompozytu i pomierzonego w testach.

### 7.1.2. Większy współczynnik Poisson'a $\nu_{12}$

Obciążenie  $\sigma_1$  wywołuje nie tylko wydłużenie próbki w kierunku osi "1", ale również jej poprzeczne zwężenie w kierunku osi "2". Tak więc odkształceniom liniowym  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{1m}$ ,  $\varepsilon_{1f}$  muszą towarzyszyć odkształcenia  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{2m}$  i  $\varepsilon_{2f}$ . Odkształcenie próbki  $\varepsilon_2$  można wyznaczyć na podstawie deformacji warstwy kompozytowej, której model pokazano na rysunku 7.4 B. Zdeformowaną warstwę przedstawiono na rysunku 7.7.

Zgodnie z (2.22) większy współczynnik Poisson'a  $\nu_{12}$  wyznaczymy ze związku

$$\nu_{12} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_1 \quad (7.14)$$



Rys. 7.7. Rozciągana próbka przed i po deformacji.

Stosując oznaczenia jak na rysunku 7.7 (indeks "k" oznacza, że dana wielkość odnosi się do stanu po deformacji, zaś jego brak - wymiary początkowe), odkształcenie poprzeczne warstwy, matrycy i włókien - odpowiednio  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{2m}$  i  $\varepsilon_{2f}$ , można zapisać w postaci

$$\varepsilon_2 = (W_k - W) / W \quad (7.15)$$

$$\varepsilon_{2m} = (W_{mk} - W_m) / W_m \quad (7.16)$$

$$\varepsilon_{2f} = (W_{fk} - W_f) / W_f \quad (7.17)$$

Z rysunku wynikają następujące zależności odnoszące się do wymiarów warstwy

$$W = W_m + W_f \quad (7.18)$$

$$W_k = W_{mk} + W_{fk} \quad (7.19)$$

Po podstawieniu (7.18) i (7.19) do (7.15) otrzymamy

$$\varepsilon_2 = (W_{mk} - W_m) / W + (W_{fk} - W_f) / W \quad (7.20)$$

Objętościowe udziały matrycy i włókien wynoszą

$$v_m = \frac{W_m L t}{W L t} = W_m / W, \quad v_f = \frac{W_f L t}{W L t} = W_f / W \quad (7.21)$$

Wykorzystanie (7.16) i (7.17) oraz (7.21) pozwala zapisać odkształcenie poprzeczne warstwy kompozytowej w postaci zależności

$$\varepsilon_2 = v_m \varepsilon_{2m} + v_f \varepsilon_{2f} \quad (7.22)$$

Zakładając, podobnie jak przy wyznaczaniu podłużnego modułu Younga, jednoosiowy stan naprężenia - odkształcenia poprzeczne matrycy i włókien wyrażają się wyłącznie poprzez ich odkształcenia podłużne; zachodzą zatem związki

$$\varepsilon_{2m} = -v_{12m} \varepsilon_{1m} \quad (7.23)$$

$$\varepsilon_{2f} = -v_{12f} \varepsilon_{1f} \quad (7.24)$$

Tak więc

$$\varepsilon_2 = -v_m v_{12m} \varepsilon_{1m} - v_f v_{12f} \varepsilon_{1f} \quad (7.25)$$

Wstawiając otrzymane wyrażenie do definicji współczynnika Poisson'a (7.14) i wykorzystując założenie o równości odkształceń podłużnych warstwy, matrycy i laminatu - równanie (7.6) - otrzymamy poszukiwany większy współczynnik Poisson'a w postaci zasady mieszanin

$$v_{12} = v_m v_{12m} + v_f v_{12f} \quad (7.26)$$

Zależność modułu Poisson'a od objętościowego udziału włókien ma identyczny charakter jak zależność podłużnego modułu Younga - rysunek 7.5 i 7.6 - i podobnie jak zasada mieszanin dla modułu  $E_1$  - równanie (7.13), tak i zasada mieszanin (7.26) dla większego współczynnika Poisson'a  $v_{12}$  bardzo dobrze odpowiada wynikom doświadczalnym.

### 7.1.3. Poprzeczny moduł Younga $E_2$

W celu wyznaczenia poprzecznego modułu Younga  $E_2$  należy zbadać zachowanie warstwy przy obciążeniu jej powierzchni bocznej  $t \times L$ , równomiernie rozłożonym obciążeniem o wartości  $\sigma_2$ .

Zakłada się, że tak matryca, jak i włókna poddane są działaniu tego samego naprężenia co cała warstwa, zachodzi więc warunek

$$\sigma_2 = \sigma_{2m} = \sigma_{2f} \quad (7.27)$$

Poprzeczny moduł Younga jest zdefiniowany równaniem

$$E_2 = \sigma_2 / \varepsilon_2 \quad (7.28)$$

Występujące w (7.28) odkształcenie  $\varepsilon_2$  wynika z deformacji warstwy, wywołanej obciążeniem zewnętrznym i wynosi

$$\varepsilon_2 = (W_k - W) / W \quad (7.29)$$

Korzystając z podanych w pkt. 7.1.2 zależności geometrycznych (7.16) - (7.21), obowiązujących również w rozpatrywanym przypadku, otrzymujemy

$$\varepsilon_2 = v_m \varepsilon_{2m} + v_f \varepsilon_{2f} \quad (7.30)$$

Po podstawieniu (7.30) do definicji  $E_2$  - (7.28) i wykorzystaniu założenia (7.27), odwrotność poprzecznego modułu Younga wyraża się związkiem

$$(1/E_2) = (\varepsilon_{2m} / \sigma_{2m}) v_m + (\varepsilon_{2f} / \sigma_{2f}) v_f \quad (7.31)$$

Należy teraz ponownie skorzystać z założenia, że na skutek obciążenia zewnętrznego warstwy powstaje w niej jednoosiowy stan naprężenia, dzięki czemu odkształcenia  $\varepsilon_{2m}$  i  $\varepsilon_{2f}$  wynoszą

$$\varepsilon_{2m} = \sigma_{2m} / E_{2m} \quad (7.32)$$

$$\varepsilon_{2f} = \sigma_{2f} / E_{2f} \quad (7.33)$$

Po wstawieniu (7.32) i (7.33) do równania (7.31), przybiera ono postać

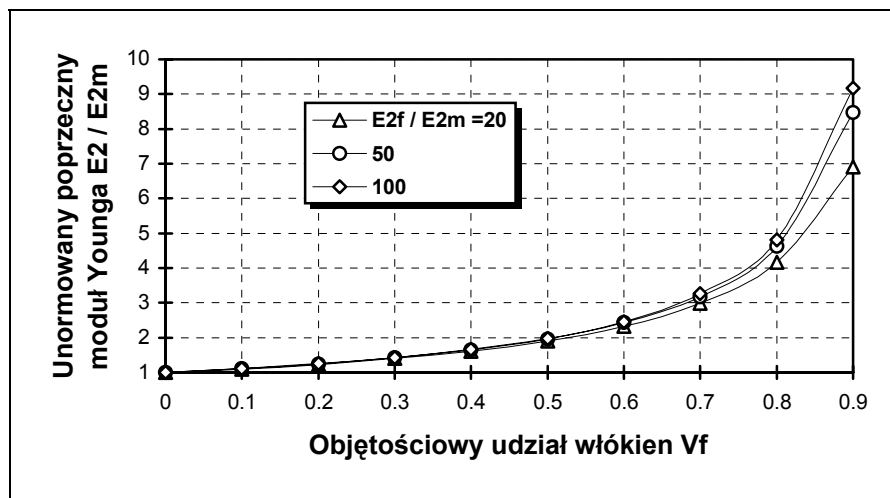
$$(1/E_2) = (v_m/E_{2m}) + (v_f/E_{2f}) \quad (7.34)$$

Równanie (7.34) określające odwrotność poprzecznego modułu Younga  $E_2$  nosi nazwę **odwrotnej zasady mieszanin**.

Przekształcając (7.34) otrzymujemy poszukiwany moduł poprzeczny w postaci

$$E_2 = \frac{E_{2m}E_{2f}}{v_mE_{2f} + v_fE_{2m}} \quad (7.35)$$

Graficzny obraz związku (7.35) przedstawiono w postaci wykresu na rysunku 7.8, na którym pokazano zmianę unormowanego modułu poprzecznego  $E_2/E_{2m}$  w funkcji objętościowego udziału włókien  $V_f$  dla wybranych wartości stosunku  $E_{2f}/E_{2m}$ .



Rys. 7.8. Poprzeczny moduł Younga kompozytu w funkcji objętościowego udziału włókien.

Z wykresu 7.8 widać, że moduł poprzeczny kompozytu jest w bardzo małym stopniu zależny od stosunku modułów włókien i matrycy. Przykładowo, przy 50 procentowym udziale włókien, niezależnie od tego jak duży byłby moduł  $E_2$  włókien, jest on ok. dwukrotnie większy od poprzecznego modułu matrycy. Wynika stąd wniosek, że **o poprzecznych własnościach sprężystych kompozytu decyduje głównie matryca**, zaś włókna nie odgrywają w tym względzie większej roli. Mamy tu więc do czynienia z przypadkiem odwrotnym do własności podłużnych, o których decydowały przede wszystkim włókna, zaś własności matrycy nie miały większego znaczenia.

W przeciwieństwie do zasady mieszanin uzyskanej dla modułu podłużnego Younga i większego współczynnika Poisson'a, odwrotna zasada mieszanin dla modułu poprzecznego nie daje równej dobrej zgodności z wynikami doświadczalnymi. Wartości obliczone z (7.35) są z reguły zaniżone w stosunku do wartości pomierzonych. Przyczyny tego należy szukać w przyjętych założeniach upraszczających. Zauważmy, że nie są one spójne. Wykażemy to na przykładzie odkształceń podłużnych, które muszą powstać w matrycy i włóknach w odpowiedzi na przyłożone obciążenie  $\sigma_2$ . Mają one postać

$$\varepsilon_{1m} = -v_{21m} \varepsilon_{2m} \quad (7.36)$$

$$\varepsilon_{1f} = -v_{21f} \varepsilon_{2f} \quad (7.37)$$

Wstawiając do powyższych związków zależności (7.32) i (7.33), otrzymane przy założeniu jednoosiowego stanu naprężenia, a także korzystając z założenia (7.27) otrzymujemy

$$\varepsilon_{1m} = -v_{21m} (\sigma_2 / E_{2m}) \quad (7.38)$$

$$\varepsilon_{1f} = -v_{21f} (\sigma_2 / E_{2f}) \quad (7.39)$$

Stosunek odkształceń podłużnych w matrycy i włóknach obliczony na podstawie (7.38) i (7.39) wynosi

$$\varepsilon_{1m} / \varepsilon_{1f} = (v_{21m} / E_{2m}) (E_{2f} / v_{21f}) \quad (7.40)$$

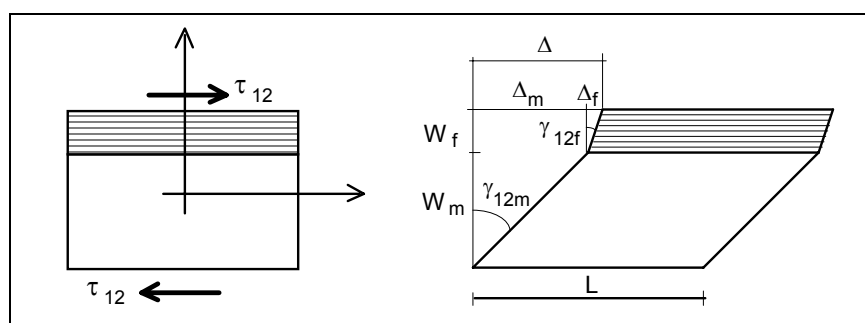
Widać zatem, że za wyjątkiem "teoretycznego" kompozytu, dla którego zachodzi związek

$$v_{21m} / E_{2m} = v_{21f} / E_{2f} \quad (7.41)$$

odkształcenia podłużne matrycy i włókien są różne (różne byłyby w tym przypadku również przemieszczenia), co nie tylko jest sprzeczne z podstawowym założeniem modelu, ale również jest nie do przyjęcia w rzeczywistych kompozytach, gdyż oznaczałoby to niezależną pracę matrycy i włókien.

#### 7.1.4. Moduł ścinania $G_{12}$

Moduł ścinania  $G_{12}$  może być wyznaczony na podstawie analizy deformacji warstwy, pokazanej na rysunku 7.4 B, poddanej działaniu równomiernego obciążenia  $\tau_{12}$ , równoległego do włókien, ale przyłożonego do powierzchni bocznej  $L \times t$ . Przedstawiono to na rysunku 7.9.



Rys. 7.9. Deformacja wyidealizowanego modelu warstwy kompozytu przy ścinaniu.

Moduł ścinania w płaszczyźnie (1, 2) zdefiniowany jest jako stosunek naprężenia  $\tau_{12}$  i wywołanego nim odkształcenia kąтового  $\gamma_{12}$ , tzn.

$$G_{12} = \tau_{12} / \gamma_{12} \quad (7.42)$$

Przyjmuje się założenie, że naprężenia styczne w kompozycie i jego składnikach są takie same

$$\tau_{12} = \tau_{12m} = \tau_{12f} \quad (7.43)$$

Odształcenie kątowe warstwy  $\gamma_{12}$  wywołane przyłożonym obciążeniem zewnętrznym wyraża się poprzez przemieszczenie  $\Delta$  i zgodnie z rysunkiem 7.9 wynosi

$$\tan \gamma_{12} = \Delta / W \quad (7.44)$$

Korzystając z jednego z fundamentalnych założeń "klasycznej" teorii sprężystości, a mianowicie założenia o małych przemieszczeniach, wielkość  $\gamma_{12}$  można uznać za na tyle małą, aby jej tangens uznać za równy samej wielkości. Ponadto, jeżeli uwzględnić zależność geometryczną pomiędzy przemieszczeniami

$$\Delta = \Delta_m + \Delta_f \quad (7.45)$$

to odkształcenie kątowe wynosi

$$\gamma_{12} \cong \Delta_m / W + \Delta_f / W \quad (7.46)$$

Zastosowanie założenia o małych przemieszczeniach w stosunku do odkształceń kątowych matrycy i włókien, pozwala wyrazić je zależnościami

$$\gamma_{12m} \cong \Delta_m / W_m \quad (7.47)$$

$$\gamma_{12f} \cong \Delta_f / W_f \quad (7.48)$$

Wyznaczając z (7.47) i (7.48) przemieszczenia i wstawiając je do (7.46), a także wykorzystując (7.21), odkształcenie kątowe warstwy można zapisać w postaci

$$\gamma_{12} = v_m \gamma_{12m} + v_f \gamma_{12f} \quad (7.49)$$

Związek (7.49) należy teraz podstawić do definicji modułu ścinania (7.42), korzystając dodatkowo z założenia o równości naprężeń stycznych (7.43). W wyniku tej operacji uzyskujemy wyrażenie

$$(1/G_{12}) = (\gamma_{12m}/\tau_{12m})V_m + (\gamma_{12f}/\tau_{12f})V_f \quad (7.50)$$

Założenie, po raz kolejny, jednoosiowego stanu naprężenia powoduje, że wyrażenia ujęte w nawiasy w równaniu (7.50) są równe odwrotnościom modułów ścinania, kolejno matrycy i włókien. Ostatecznie zatem odwrotność modułu ścinania warstwy kompozytowej jest określona związkiem

$$(1/G_{12}) = (V_m/G_{12m}) + (V_f/G_{12f}) \quad (7.51)$$

Po odwróceniu powyższej relacji otrzymujemy poszukiwany związek między modułem ścinania kompozytu, a modułami ścinania jego składników

$$G_{12} = \frac{G_{12m}G_{12f}}{G_{12m}V_f + G_{12f}V_m} \quad (7.52)$$

Związek (7.52) to odwrotna zasada mieszanin dla modułu ścinania. Wnioski dotyczące odwrotnej zasady mieszanin dla modułu poprzecznego odnoszą się w równym stopniu do modułu  $G_{12}$ .

### 7.1.5. Mniejszy współczynnik Poisson'a $\nu_{21}$

Mniejszy współczynnik Poisson'a jest wielkością zależną od podłużnego i poprzecznego modułów Younga oraz większego współczynnika Poisson'a i wyraża się zależnością

$$\nu_{21} = (E_2/E_1)\nu_{12} \quad (7.53)$$

W celu jego wyznaczenia należy wykorzystać wyprowadzone uprzednio związki określające  $E_1$ ,  $E_2$  i  $\nu_{12}$ , czyli równania (7.13), (7.35) i (7.26). Otrzymujemy następującą postać mniejszego współczynnika Poisson'a

$$\nu_{21} = \frac{E_{2m}E_{2f}}{(V_mE_{2f} + V_fE_{2m})(V_mE_{1m} + V_fE_{1f})} (V_m\nu_{12m} + V_f\nu_{12f}) \quad (7.54)$$

Ze względu na obecność modułu poprzecznego Younga (równanie (7.35)) w liczniku wyrażenia (7.53), zależność (7.54) daje, podobnie jak (7.35) wartości zaniżone w stosunku do wartości pomierzonych doświadczalnie.

### 7.1.6. Współczynnik podłużnej rozszerzalności cieplnej $\alpha_1$

Współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej w kierunku podłużnym -  $\alpha_1$  - można wyznaczyć analizując odkształcenia warstwy kompozytu ogrzanej równomiernie (tzn. ogrzana jest zarówno matryca, jak i włókna) o  $\Delta T$  stopni.

Odształcenie liniowe warstwy wywołane jej ogrzaniem wynosi

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 \Delta T \quad (7.55)$$

stąd współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej  $\alpha_1$  - obliczymy ze związku

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 / \Delta T \quad (7.56)$$

Obowiązuje nadal założenie, że odkształcenia podłużne kompozytu i jego składników są równe

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1m} = \varepsilon_{1f} \quad (7.57)$$

Wskutek różnych wartości współczynników rozszerzalności liniowej matrycy i włókien, ich odkształcenia podłużne wywołane zmianą temperatury są również różne i wynoszą

$$\varepsilon_{1m}^T = \alpha_{1m} \Delta T \quad (7.58)$$

$$\varepsilon_{1f}^T = \alpha_{1f} \Delta T \quad (7.59)$$

Różne odkształcenia oznaczałyby w tym przypadku wciąganie (lub wyciąganie) włókien do (z) matrycy. Stoi to w jawnej sprzeczności z przyjętym założeniem (7.57) (także z zachowaniem rzeczywistych kompozytów). Sprzeczność jest jednak "pozorna", gdyż różnica odkształceń czysto cieplnych indukuje tak w matrycy, jak i w włóknach naprężenia mechaniczne, wyrażające się następującymi związkami

$$\sigma_{1m} = E_{1m} \varepsilon_{1m}^M \quad (7.60)$$

$$\sigma_{1f} = E_{1f} \varepsilon_{1f}^M \quad (7.61)$$

Dzięki temu całkowite odkształcenia w matrycy i włóknach wynoszą

$$\varepsilon_{1m} = \varepsilon_{1m}^T + \varepsilon_{1m}^M = \alpha_{1m} \Delta T + \sigma_{1m} / E_{1m} \quad (7.62)$$

$$\varepsilon_{1f} = \varepsilon_{1f}^T + \varepsilon_{1f}^M = \alpha_{1f} \Delta T + \sigma_{1f} / E_{1f} \quad (7.63)$$

Z warunku (7.57), wynika że musi zachodzić związek

$$\alpha_{1m} \Delta T + \sigma_{1m} / E_{1m} = \alpha_{1f} \Delta T + \sigma_{1f} / E_{1f} \quad (7.64)$$

Warunek równowagi sił wymaga, aby

$$\sigma_{1f} A_f + \sigma_{1m} A_m = 0 \quad (7.65)$$

Równania (7.64) i (7.65) tworzą układ równań, którego rozwiązanie względem  $\sigma_{1f}$  i  $\sigma_{1m}$  ma postać

$$\sigma_{1m} = \frac{v_f (\alpha_{1f} - \alpha_{1m}) \Delta T}{(v_f / E_{1m}) + (v_m / E_{1f})} \quad (7.66)$$

$$\sigma_{1f} = -\frac{v_m (\alpha_{1f} - \alpha_{1m}) \Delta T}{(v_f / E_{1m}) + (v_m / E_{1f})} \quad (7.67)$$

Korzystając z równań np. (7.57) i (7.62), współczynnik rozszerzalności liniowej  $\alpha_1$  można wyrazić w postaci

$$\alpha_1 = \alpha_{1m} + \sigma_{1m} / (E_{1m} \Delta T) \quad (7.68)$$

a po wstawieniu (7.66) i prostych przekształceniach otrzymujemy poszukiwaną zależność współczynnika  $\alpha_1$  kompozytu od charakterystyk matrycy i włókien tj. współczynników podłużnej rozszerzalności cieplnej, modułów podłużnych sprężystości i objętościowych udziałów składników

$$\alpha_1 = \frac{v_m \alpha_{1m} E_{1m} + v_f \alpha_{1f} E_{1f}}{v_m E_{1m} + v_f E_{1f}} \quad (7.69)$$

### 7.1.7. Współczynnik poprzecznej rozszerzalności cieplnej $\alpha_2$

Całkowite odkształcenie poprzeczne warstwy kompozytu wywołane przyrostem temperatury  $\Delta T$  określone jest zależnością

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 \Delta T \quad (7.70)$$

gdzie  $\alpha_2$  oznacza współczynnik poprzecznej rozszerzalności cieplnej kompozytu.

Odształcenia składników kompozytu w kierunku poprzecznym do włókien są sumą odkształceń cieplnych i mechanicznych

$$\varepsilon_{1m} = \varepsilon_{1m}^T + \varepsilon_{1m}^M \quad \varepsilon_{1f} = \varepsilon_{1f}^T + \varepsilon_{1f}^M \quad (7.71)$$

gdzie

$$\varepsilon_{2f}^T = \alpha_{2f} \Delta T \quad \varepsilon_{2m}^T = \alpha_{2m} \Delta T \quad (7.72)$$

$$\varepsilon_{2f}^M = -\nu_{12f} \varepsilon_{1f}^M = -\nu_{12f} \sigma_{1f} / E_{1f} \quad (7.73)$$

$$\varepsilon_{2m}^M = -\nu_{12m} \varepsilon_{1m}^M = -\nu_{12m} \sigma_{1m} / E_{1m} \quad (7.74)$$

Odształcenia poprzeczne matrycy i włókien wynoszą zatem

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_{12m} (\sigma_{1m} / E_{1m}) + \alpha_{2m} \Delta T \quad (7.75)$$

$$\varepsilon_{2f} = -\nu_{12f} (\sigma_{1f} / E_{1f}) + \alpha_{2f} \Delta T \quad (7.76)$$

Analiza geometryczna deformacji poprzecznej warstwy jest identyczna z tą, która została przeprowadzona w pkt. 7.1.2 - wzory (7.15) - (7.22). Prawdziwy jest zatem związek

$$\varepsilon_2 = \nu_m \varepsilon_{2m} + \nu_f \varepsilon_{2f} \quad (7.77)$$

Wstawiając do (7.77) związki (7.75) i (7.76) oraz wykorzystując równanie (7.70), otrzymamy po przekształceniach poszukiwany współczynnik poprzecznej rozszerzalności cieplnej  $\alpha_2$  w postaci

$$\alpha_2 = (\nu_m \alpha_{2m} + \nu_f \alpha_{2f}) + \frac{\nu_m \nu_f (E_{1m} \nu_{12f} - E_{1f} \nu_{12m}) (\alpha_{1f} - \alpha_{1m})}{\nu_m E_{1m} + \nu_f E_{1f}} \quad (7.78)$$

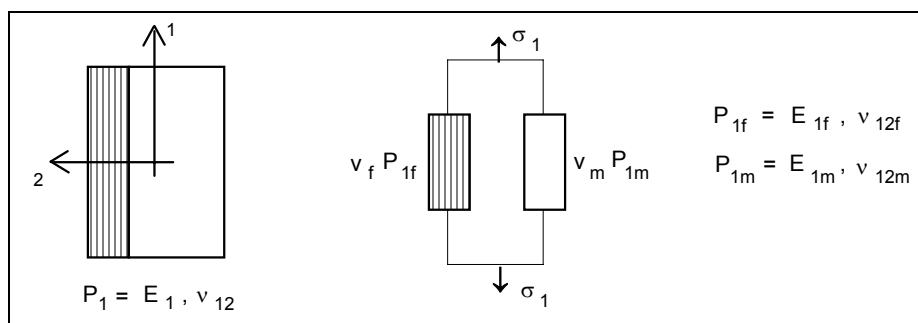
### 7.1.8. Kombinowany model mikromechaniczny

Powiedziano już wcześniej, że "poprzeczne" charakterystyki materiałowe ( $E_2$ ,  $G_{12}$ ) obliczone z odwrotnej zasady mieszanin dają wartości zaniżone w stosunku do pomierzonych. To sprawiło, że poszukiwane były inne modele, które pozwalałyby wyznaczyć te charakterystyki tak, aby lepiej odpowiadały wynikom doświadczalnym. Należy do nich tzw. kombinowany model mikromechaniczny, zaproponowany przez Shaffera w 1964 roku.

Aby wyjaśnić jego budowę, wróćmy jeszcze raz do modelu zaprezentowanego w poprzednich punktach. Zauważmy, że zależności w postaci zasady mieszanin i odwrotnej zasady mieszanin można uzyskać stosując metodę analogiczną do tzw. metody modeli strukturalnych, znanej z teorii lepkosprężystości. W odniesieniu do podłużnego modułu Younga i większego współczynnika Poisson'a model wyidealizowany pokazany na rysunku 7.4 B, traktuje się jak równoległe połączenie fazy matrycy i włókien - rysunek 7.10.

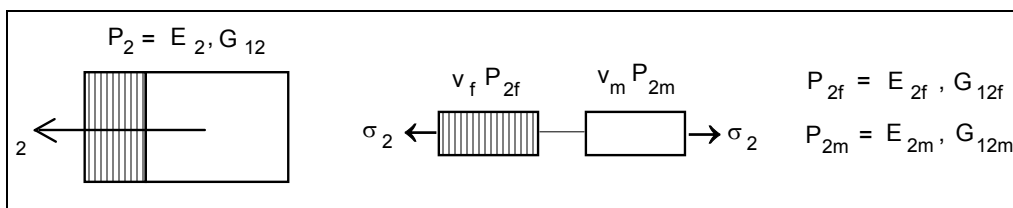
W elementach połączonych równoległe występuje takie samo odkształcenie i w rezultacie charakterystyki podłużne można zapisać ogólnym równaniem

$$P_1 = \sum_{k=f,m} \nu_k P_{1k} \quad (7.79)$$



Rys. 7.10. Równoległe połączenie matrycy i włókien w kierunku podłużnym.

W odniesieniu do poprzecznego modułu Younga i modułu ścinania model wyidealizowany traktuje się jak szeregowe połączenie fazy matrycy i włókien - rysunek 7.11.

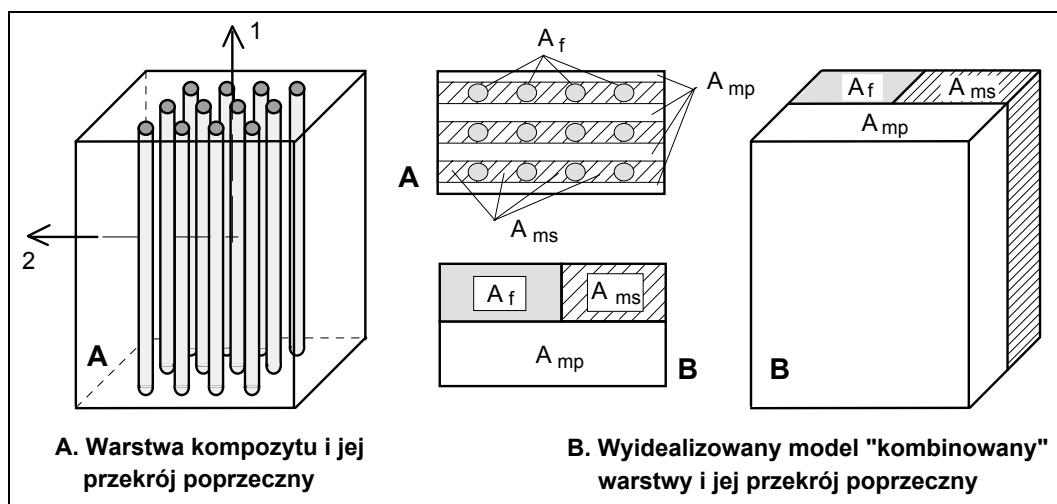


Rys. 7.11. Szeregowe połączenie matrycy i włókien w kierunku poprzecznym.

W tym przypadku w szeregowo połączonych elementach takie samo jest naprężenie, co powoduje, że charakterystyki warstwy można opisać ogólnym równaniem w postaci

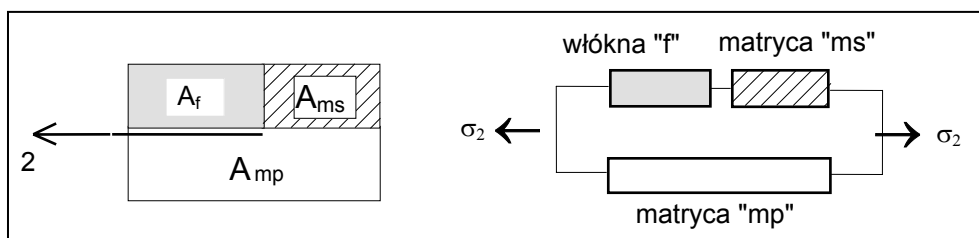
$$\frac{1}{P_2} = \sum_{k=f,m} \frac{v_k}{P_{2k}} \tag{7.80}$$

Cechą, która odróżnia model kombinowany od modelu czysto szeregowego/równoległego jest to, że w kierunku poprzecznym przyjmuje się trójfazową budowę przekroju poprzecznego warstwy kompozytu. Wyróżnia się, jak poprzednio, włókna i matrycę, z tym, że matrycę dzieli się na część o polu  $A_{mp}$ , zawartą w "pasach" wolnych od włókien i część o polu  $A_{ms}$ , leżącą w "pasach" zawierających włókna. Warstwę kompozytu wraz z wyidealizowanym modelem kombinowanym pokazano na rysunku 7.12.



Rys. 7.12. Warstwa kompozytu wraz z wyidealizowanym modelem kombinowanym.

Przekrój B na rysunku 7.12 jest więc na gruncie teorii modeli strukturalnych, w kierunku osi "2", połączeniem równoległym/szeregowym dwuobszarowej matrycy i włókien. Pokazano to na rys. 7.13.



Rys. 7.13. Połączenie matrycy i włókien w modelu kombinowanym.

Wprowadza się następujące określenia udziałów objętościowych poszczególnych faz

$$v_f = A_f / A \tag{7.81}$$

$$v_m = (A_{mp} + A_{ms}) / A \tag{7.82}$$

$$v_{mp} = A_{mp} / A \tag{7.83}$$

$$v_s = A_s / A \tag{7.84}$$

$$v_{ms} = A_{ms} / A_s \tag{7.85}$$

$$v_{fs} = A_f / A_s \tag{7.86}$$

gdzie

$$A = A_{mp} + A_s \tag{7.87}$$

$$A_s = A_{ms} + A_f \tag{7.88}$$

Z powyższych definicji wynikają następujące zależności

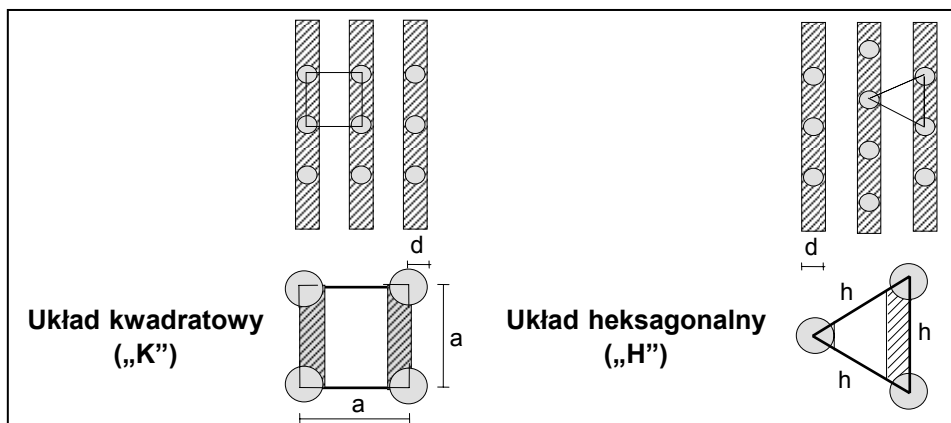
$$v_m + v_f = 1 \tag{7.89}$$

$$v_{mp} + v_s = 1 \tag{7.90}$$

$$v_{fs} = v_f / (1 - v_{mp}) \tag{7.91}$$

$$v_{ms} = (v_m - v_{mp}) / (1 - v_{mp}) = 1 - v_{fs} \tag{7.92}$$

Dla zilustrowania podanych związków, na rysunku 7.14 pokazane zostały typowe sposoby ułożenia ("upakowania") włókien o przekroju kołowym w przekroju poprzecznym warstwy, a mianowicie układ kwadratowy (układ "K") i heksagonalny (układ "H") wraz z elementami reprezentatywnymi.



Rys. 7.14. Typy "upakowania" włókien w przekroju, wykorzystywane w modelu kombinowanym.

W tabeli 7.1 podano wszystkie charakterystyki powierzchniowe i udziały objętościowe faz, występujące w analizie modelu kombinowanego, dla podstawowych układów włókien kołowych w przekroju poprzecznym warstwy kompozytowej.

|           | A                       | A <sub>s</sub> | A <sub>f</sub>      | A <sub>ms</sub>                    | A <sub>mp</sub>                        | v <sub>f</sub>                 | v <sub>fs</sub>    | v <sub>mp</sub>            | Ograniczenia  |
|-----------|-------------------------|----------------|---------------------|------------------------------------|--|--------------------------------|--------------------|----------------------------|---|
| układ "K" | a <sup>2</sup>          | ad             | $\frac{\pi d^2}{4}$ | $\frac{ad - \pi d^2}{4}$           | (a-d) a                                | $\frac{\pi d^2}{4a^2}$         | $\frac{\pi d}{4a}$ | $1 - \frac{d}{a}$          | a ≥ d<br>v <sub>f</sub> ≤ 0.785                     |
| układ "H" | $\frac{\sqrt{3}h^2}{4}$ | $\frac{hd}{2}$ | $\frac{\pi d^2}{8}$ | $\frac{dh}{2} - \frac{\pi d^2}{8}$ | $\frac{\sqrt{3}h^2}{4} - \frac{hd}{2}$ | $\frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}h^2}$ | $\frac{\pi d}{4h}$ | $1 - \frac{2d}{\sqrt{3}h}$ | h ≥ $\frac{2}{\sqrt{3}}d$<br>v <sub>f</sub> ≤ 0.680 |

TABELA 7.1. Charakterystyki powierzchniowe i objętościowe dla różnych typów ułożenia włókien.

W dalszej analizie stosowane będą następujące oznaczenia :

- ♦  $P$  - wybrana charakterystyka materiałowa kompozytu ( moduł Younga, współczynnik Poisson'a, moduł ścinania),
- ♦  $P_m$  - charakterystyka materiałowa matrycy, odpowiadająca wyznaczonej wielkości  $P$ ,
- ♦  $P_f$  - charakterystyka materiałowa włókien, odpowiadająca wyznaczonej wielkości  $P$ ,
- ♦  $P_s$  - charakterystyka materiałowa "sub-modelu", powstałego z szeregowego połączenia włókien i matrycy.

Stosując w odniesieniu do elementów modelu kombinowanego, połączonych równolegle (rys. 7.13) zależność (7.79), otrzymujemy

$$P = v_{mp} P_m + (1 - v_{mp}) P_s \quad (7.93)$$

Wielkość  $P_s$  wyznacza się z zależności (7.80) dla połączenia szeregowego

$$(1/P_s) = (v_{fs}/P_f) + (v_{ms}/P_m) \quad (7.94)$$

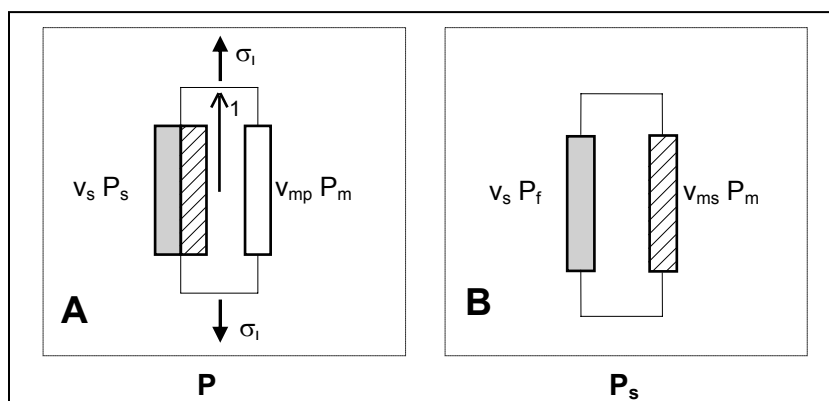
która po odwróceniu daje

$$P_s = \frac{P_f P_m}{P_f + v_{fs}(P_m - P_f)} \quad (7.95)$$

Po wstawieniu (7.95) do (7.93) i wykorzystaniu (7.91) otrzymujemy zależność danej charakterystyki materiałowej warstwy od odpowiadających jej charakterystyk materiałowych i geometrycznych składników kompozytu w postaci równania

$$P = \frac{P_m P_f (1 - v_{mp} - v_{mp} v_f) + v_{mp} v_f P_m^2}{P_f (1 - v_{mp}) - v_f (P_f - P_m)} \quad (7.96)$$

W przypadku charakterystyk "podłużnych" tzn. modułu sprężystości  $E_1$  i większego współczynnika Poisson'a  $\nu_{12}$ , model kombinowany należy traktować jako połączenie równoległe elementów, przedstawione na rysunku 7.15.



Rys. 7.15. Połączenie matrycy i włókien w kierunku podłużnym w modelu kombinowanym.

Zgodnie z zależnością (7.19), dla połączenia równoległego przedstawionego na rysunku 7.15 A i B otrzymujemy odpowiednio

$$P = v_{mp} P_m + v_s P_s = v_{mp} P_m + (1 - v_{mp}) P_s \quad (7.97)$$

$$P_s = v_{ms} P_m + v_{fs} P_f = v_{ms} P_m + (1 - v_{ms}) P_f \quad (7.98)$$

Wstawiając (7.98) do (7.97) i wykorzystując związek (7.92), otrzymamy po przekształceniach zależność między charakterystykami kompozytu i charakterystykami materiałowo-geometrycznymi matrycy i włókien w kierunku podłużnym, w postaci

$$P = v_m P_m + v_f P_f \quad (7.99)$$

Równanie (7.99) to oczywiście zasada mieszanin dla stałych materiałowych  $E_1$  i  $\nu_{12}$ , tak więc w odniesieniu do własności podłużnych model kombinowany nie wnosi nic nowego w porównaniu ze zwykłym modelem mechanicznym.

Równania (7.96) i (7.99) można zapisać w postaci jednego, wspólnego równania

$$P = \frac{P_m(1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f}$$

gdzie

$$\xi = \frac{V_{mp} V_f}{1 - V_f - V_{mp}} \quad (7.101)$$

$$\chi = \frac{P_f - P_m}{P_f + \xi P_m} \quad (7.102)$$

Dla ułatwienia dalszej analizy wstawmy (7.101) i (7.102) do (7.100). Otrzymamy wówczas

$$P = \frac{P_m [P_f + \xi P_m + \xi V_f (P_f - P_m)]}{P_f + \xi P_m - V_f (P_f - P_m)} \quad (7.103)$$

Korzystając z (7.103) można wykazać, że dla granicznych wartości  $\xi$ , tzn.  $\xi \rightarrow 0$  i  $\xi \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$P = V_m P_m + V_f P_f \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (7.104)$$

$$P = \frac{P_m P_f}{V_m P_f + V_f P_m} \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow 0 \quad (7.105)$$

Równanie (7.104) jest ogólnym zapisem równań (7.13) i (7.26) przedstawiających odpowiednio podłużny moduł Younga  $E_1$  i większy współczynnik Poisson'a  $\nu_{12}$ , natomiast równanie (7.105) stanowi ogólną postać równań (7.35) i (7.52) określających odpowiednio moduł Younga  $E_2$  i moduł ścinania  $G_{12}$ . Charakterystyki materiałowe rzeczywistych materiałów kompozytowych leżą w przedziale zawartym między wartościami granicznymi określonymi przez (7.104) i (7.105).

Najważniejsze wnioski wynikające z dotychczasowej analizy modelu kombinowanego są następujące

- ◆ przy wyznaczaniu charakterystyk materiałowych w kierunku podłużnym, tzn.  $E_1$  i  $\nu_{12}$  należy korzystać z zasady mieszanin (7.99),
- ◆ przy wyznaczaniu charakterystyk materiałowych w kierunku poprzecznym do włókien, tzn.  $E_2$  i  $G_{12}$  należy stosować równania (7.96) lub (7.100) - (7.102).

Warto w tym miejscu sprawdzić, w jakim stopniu przyjęcie modelu kombinowanego wpływa na zmianę wartości charakterystyk poprzecznych w stosunku do rezultatów wynikających ze "zwykłego" modelu mikromechanicznego.

W tym celu wykorzystamy pokazane na rysunku 7.14 typy upakowania włókien w przekroju i wyznaczmy dla nich wartości unormowanego modułu poprzecznego  $E_2/E_{2m}$  w funkcji objętościowego udziału włókien  $v_f$ . Z zależności podanych w tabeli 7.1 wynikają następujące związki dla układu, odpowiednio, kwadratowego i heksagonalnego

$$v_{mp}^{''K''} = 1 - \sqrt{4v_f/\pi} \quad (7.106)$$

$$v_{mp}^{''H''} = 1 - \sqrt{8v_f/\pi\sqrt{3}} \quad (7.107)$$

Z równania (7.101) należy wyznaczyć parametr upakowania  $\xi$ , a następnie z równania (7.102) parametr  $\chi$ , który w omawianym przypadku można zapisać w postaci

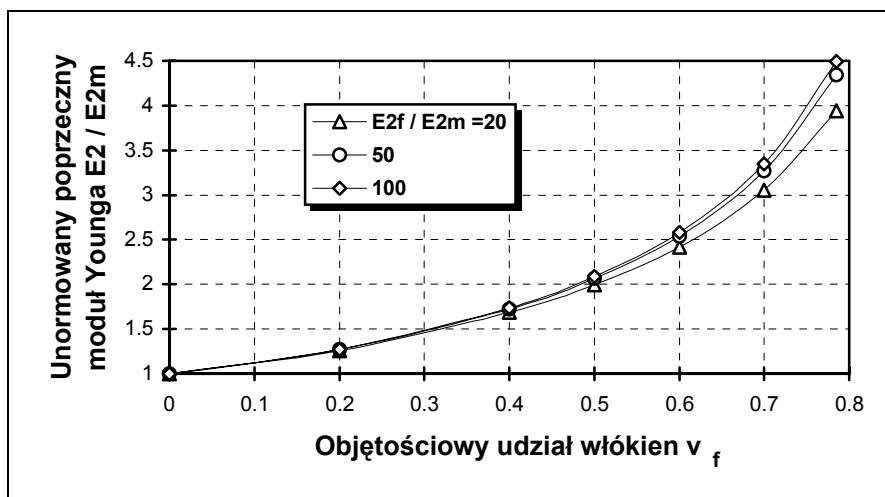
$$\chi = \frac{(E_{2f}/E_{2m}) - 1}{(E_{2f}/E_{2m}) + \xi} \quad (7.108)$$

Korzystając z (7.100) otrzymujemy ostateczną postać unormowanego modułu Younga  $E_2/E_{2m}$  w funkcji objętościowego udziału włókien i parametrów geometrycznych zależnych od sposobu ich upakowania w przekroju

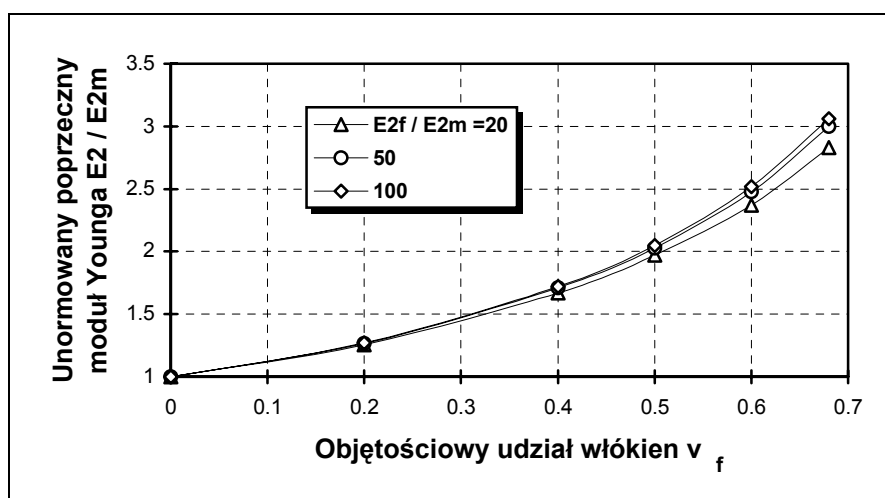
$$\frac{E_2}{E_{2m}} = \frac{1 + \xi \chi V_f}{1 - \chi V_f} \quad (7.109)$$

Wykresy zależności (7.109) dla obu typów ułożenia włókien przedstawiono na rysunkach 7.16 i 7.17.

Wykresy te praktycznie są identyczne, co więcej niewiele różnią się od analogicznego wykresu otrzymanego dla modelu "zwykłego", pokazanego na rysunku 7.8. Model kombinowany w porównaniu z modelem zwykłym daje wartości modułu poprzecznego większe o ok. 2-5.5 procent w przypadku typu kwadratowego i 1.5-4.5 procent w przypadku typu heksagonalnego (zależnie od wartości  $V_f$ ).



Rys. 7.16. Unormowany poprzeczny moduł sprężystości dla ułożenia włókien typu kwadratowego wg modelu kombinowanego.



Rys. 7.17. Unormowany poprzeczny moduł sprężystości dla ułożenia włókien typu heksagonalnego wg modelu kombinowanego.

Tak więc model kombinowany poprawia niedoszacowanie wartości charakterystyk poprzecznych, właściwe dla modelu zwykłego, ale w stopniu nie wystarczającym, jeśli wziąć pod uwagę wartości otrzymywane w badaniach doświadczalnych.

### 7.1.9. Podsumowanie podejścia mikromechaniki materiałów

Podsumowując podejście oparte na analizie modeli mikromechanicznych należy stwierdzić, że :

- ◆ mimo wielu założeń upraszczających, dostarcza ono prawidłowych jakościowo informacji dotyczących roli włókien i matrycy w kompozycie (pkt. 7.1.2 i 7.1.3)
- ◆ koncepcja ta może być bez trudu zastosowana do ośrodków wielofazowych, o składnikach dowolnie (ale szeregowo lub równolegle) połączonych w modelu wyidealizowanym,

- ◆ podłużne charakterystyki materiałowe  $E_1$ ,  $\nu_{12}$  i  $\alpha_1$ , wynikające z zasady mieszanin są zgodne z rezultatami badań doświadczalnych, tak więc

$$E_1 = V_m E_{1m} + V_f E_{1f}$$

$$\nu_{12} = V_m \nu_{12m} + V_f \nu_{12f}$$

$$\alpha_1 = \frac{V_m \alpha_{1m} E_{1m} + V_f \alpha_{1f} E_{1f}}{V_m E_{1m} + V_f E_{1f}}$$

- ◆ wartości poprzecznych charakterystyk materiałowych  $E_2$ ,  $G_{12}$  wynikające z odwrotnej zasady mieszanin są zaniżone w porównaniu z wartościami uzyskiwanymi w badaniach doświadczalnych, tak więc zależności

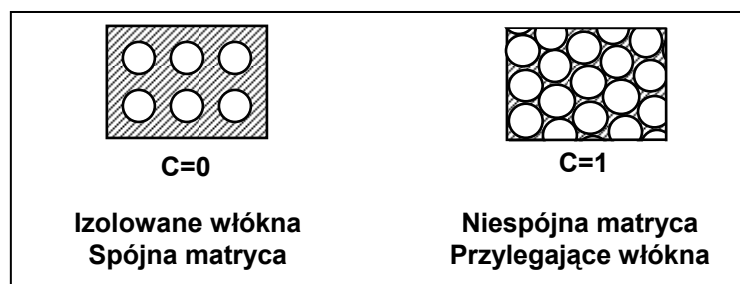
$$E_2 = \frac{E_{2m} E_{2f}}{V_m E_{2f} + V_f E_{2m}} \qquad G_{12} = \frac{G_{12m} G_{12f}}{G_{12m} V_f + G_{12f} V_m}$$

służą przede wszystkim jako dolne oszacowanie wartości rzeczywistych.

## 7.2. Charakterystyki materiałowe kompozytu Podejście semi-empiryczne Halpina - Tsai'a

Zależności określające poprzeczne charakterystyki kompozytu w funkcji własności materiałowych i geometrycznych jego składników, wynikające z podejścia mechaniki materiałów, jakkolwiek proste w użyciu i słuszne jakościowo, nie dają oszacowań ilościowych zgodnych z wynikami doświadczalnymi.

Metody bardziej wyrafinowane, oparte na analizie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości dla reprezentatywnej próbki kompozytu prowadzą do zależności lepiej oddających związek własności kompozytu z własnościami składników. Wyrażają się one jednak skomplikowanymi równaniami, a ponadto występują w nich dodatkowe współczynniki (oprócz tych, którymi operuje się w analizie modeli mikromechanicznych), których interpretacja i powiązanie z "klasycznymi" pojęciami, jak ułożenie włókien w przekroju, jest niejasne, a ich wartości prowadzące do prawidłowych oszacowań w jednym przypadku, zawodzą w innym. Taka sytuacja ma miejsce np. w zaproponowanym przez Tsai'a modelu uwzględniającym stopień przylegania włókien (ang. *elasticity approach with contiguity*), który wprowadza współczynnik skupienia (przylegania - ang. *contiguity factor*)  $C$  - rysunek 7.18.



Rys. 7.18. Przypadki graniczne stopnia przylegania włókien.

Szeroką analizę tego modelu można znaleźć w monografii Jones'a .

W świetle powyższych uwag naturalne więc wydaje się poszukiwanie takich relacji, które z jednej strony byłyby w miarę proste, a z drugiej pozwalałyby w miarodajny sposób wyznaczać własności kompozytu. Warunki te spełnia semi-empiryczny związek podany w 1969 roku przez Halpina i Tsai'a. Stanowi on przybliżenie rozwiązań Hermansa z 1967 roku, uogólniających z kolei model Hill'a z 1965 roku. Równanie Halpina-Tsai'a ma postać

$$\frac{P}{P_m} = \frac{(1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f} \qquad (7.110)$$

gdzie

$$\chi = \frac{(P_f / P_m) - 1}{(P_f / P_m) + \xi} \quad (7.111)$$

Zauważmy, że identyczny formalnie rezultat uzyskaliśmy z analizy modelu kombinowanego, z tą różnicą, że współczynnik  $\xi$  jest w modelu Halpina-Tsai'a rozumiany jako parametr wyznaczany doświadczalnie, a nie wynikający wprost z teoretycznej analizy ułożenia włókien w przekroju poprzecznym kompozytu, jak to miało miejsce w modelu kombinowanym.

Formalne podobieństwo podejścia Halpina-Tsai'a i modelu kombinowanego sprawia, że aktualne jest równanie (7.103) i widoczne z niego przejścia graniczne

$$P = v_m P_m + v_f P_f \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (7.112)$$

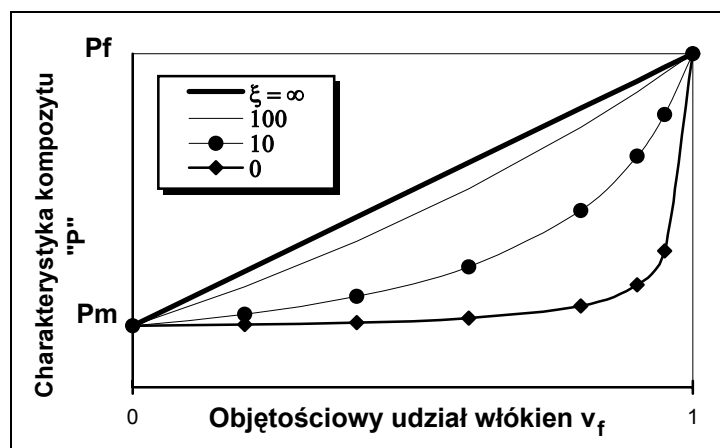
$$P = \frac{P_m P_f}{v_m P_f + v_f P_m} \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow 0 \quad (7.113)$$

Na rysunku 7.19 pokazano wykres zależności (7.110) wraz z ograniczeniami (7.112) (7.113). Widać z niego, że wraz ze wzrostem wartości parametru  $\xi$  rośnie wpływ włókien na wartość charakterystyki materiałowej "P" kompozytu (przy ustalonym ich udziale objętościowym, wartość charakterystyki materiałowej P zbliża się coraz bardziej do charakterystyki włókien). Z tego względu współczynnik  $\xi$  jest nazywany miarą "wydajności zbrojenia".

Wartość współczynnika  $\xi$  określa się w ten sposób, że dla próbki kompozytowej o znanych własnościach fizycznych i geometrycznych składników wyznacza się doświadczalnie daną charakterystykę materiałową  $P=P^*$ . Z przekształconego równania (7.103) oblicza się dla tej wartości  $P^*$  współczynnik  $\xi$

$$\xi = \frac{P_f(P^* - P_m) - v_f P^*(P_f - P_m)}{P_m[(P_f - P^*) - (1 - v_f)(P_f - P_m)]} \quad (7.114)$$

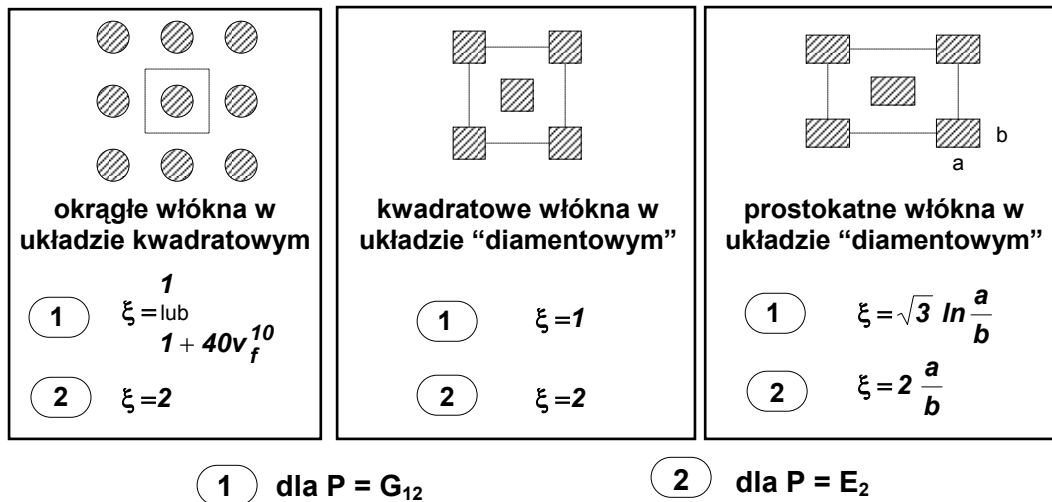
Na podstawie raz obliczonej wartości  $\xi$  dla danego układu danych ( $P^*$ ,  $v_f$ ) można wyznaczyć wartość P dla dowolnego udziału objętościowego włókien, gdyż przyjmuje się, że nie ma on większego wpływu na współczynnik zbrojenia  $\xi$ .



Rys. 7.19. Wpływ współczynnika zbrojenia  $\xi$  na wartość charakterystyki materiałowej P.

W okresie, gdy Halpin i Tsai zaproponowali równanie (7.110) liczba danych doświadczalnych była tak skąpa, że przedstawiona powyżej procedura została "zmodyfikowana" w ten sposób, że wartość  $P^*$ , która powinna być wzięta z doświadczeń, została zastąpiona wartościami uzyskanymi z bardzo starannych obliczeń numerycznych. Wykazały one ponadto, że  $\xi$  zależy od kształtu przekroju włókien i sposobu ich upakowania.

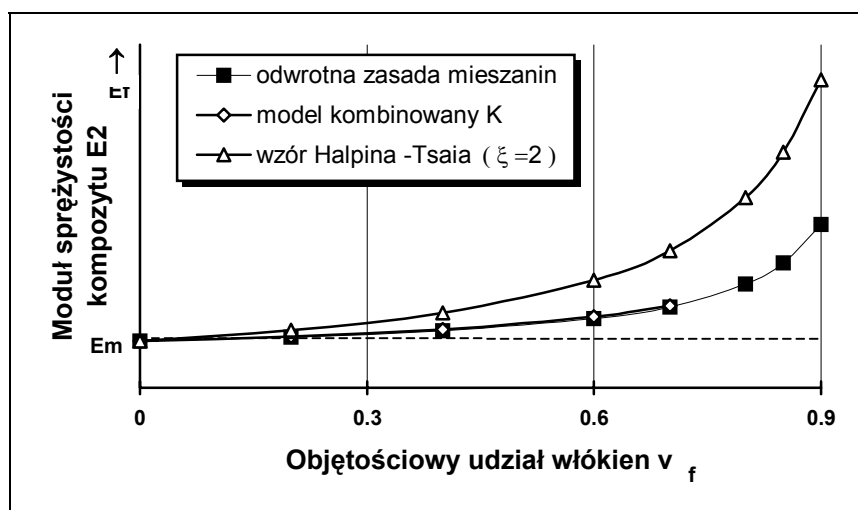
Na rysunku 7.20 podano wartości  $\xi$  dla typowych kształtów włókien i ich ułożenia w przekroju kompozytu, które zostały uzyskane na podstawie obliczeń numerycznych Adamsa i Donera (włókna kołowe) i Foye (włókna kwadratowe i prostokątne).



Rys. 7.20. Wartości współczynnika zbrojenia dla typowych włókien i ich układów.

Na rysunku (7.21) pokazano schematycznie wykres poprzecznego modułu sprężystości  $E_2$  w funkcji objętościowego udziału włókien, sporządzony zgodnie z odwrotną zasadą mieszania (7.105), wg modelu kombinowanego (7.100)-(7.102) dla układu "kwadratowego (7.106) oraz wg. wzoru Halpina-Tsaia (7.110) dla  $\xi=2$ . Widać, że wartości otrzymane z tego wzoru są zdecydowanie większe niż wartości wynikające z modeli mikromechaniki materiałów, a różnice wynoszą - w zależności od objętościowego udziału włókien - od kilkudziesięciu do stukilkudziesięciu procent! Badania doświadczalne przeprowadzone na różnych materiałach kompozytowych wykazały bardzo dobrą korelację wyników doświadczeń z wartościami obliczonymi ze wzoru Halpina-Tsaia. Okazało się, że opisuje on prawidłowo charakterystyki materiałowe nawet kompozytów wzmacnianych cząsteczkami, a więc zupełnie odmiennych od kompozytów włóknistych

Równanie Halpina-Tsaia jest zgodne formalnie z wieloma innymi modelami teoretycznymi (np. modelem kombinowanym i modelami numerycznymi Adamsa, Donera i Foye), unika natomiast ich wad lub stopnia komplikowania. Uważa się je nadal za najbardziej użyteczne narzędzie przy określaniu stałych materiałowych kompozytu w funkcji własności składników. Poszukiwanie lepszych wydaje się być zajęciem w pewnym sensie niecelowym, a także i prawdopodobnie niewykonalnym, gdyż "wrodzoną" cechą technologii wytwarzania kompozytów jest to, iż produkt finalny zawsze charakteryzuje się nieregularnościami w ułożeniu włókien, nie wspominając o różnicach we własnościach, katalogowo tych samych, tak matryc jak i włókien, co oczywiście znajduje swoje odbicie w wartościach charakterystyk materiałowych. Tak więc wszelkie oczekiwania, że można przewidzieć te charakterystyki ze stuprocentową dokładnością są z góry skazane na porażkę, a dokładność, z jaką można je określić z równania Halpina-Tsaia jest całkowicie wystarczająca.



Rys. 7.21. Poprzeczny moduł Younga wg różnych metod mikromechanicznych

Na zakończenie rozdziału poświęconego określaniu charakterystyk materiałowych kompozytu w zależności od charakterystyk jego składników warto podać wzory określające te charakterystyki, wynikające ze semi-empirycznego wzoru Halpina-Tsaia, powszechnie stosowane w mikromechanice kompozytów ortotropowych. Zebrano je w tabeli 7.2.

| CHARAKTERYSTYKA MATERIAŁOWA KOMPOZYTU "P"       | "P = P (P <sub>m</sub> , v <sub>m</sub> , P <sub>f</sub> , v <sub>f</sub> ) "  | WSPÓŁCZYNNIK ZBROJENIA $\xi$   |
|---|--|--|
| Podłużny moduł Younga E <sub>1</sub>            | $E_1 = v_m E_{1m} + v_f E_{1f}$  | $\infty$   |
| Poprzeczny moduł Younga E <sub>2</sub>          | $E_2 = E_{2m} \frac{(1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f}$<br>$\chi = \frac{(E_{2f} / E_{2m}) - 1}{(E_{2f} / E_{2m}) + \xi}$         | 2 - włókna okrągłe i kwadratowe<br>2a / b - włókna wstążkowe                   |
| Moduł ścinania G <sub>12</sub>                  | $G_{12} = G_{12m} \frac{(1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f}$<br>$\chi = \frac{(G_{12f} / G_{12m}) - 1}{(G_{12f} / G_{12m}) + \xi}$ | 1 - włókna okrągłe i kwadratowe *)<br>$\sqrt{3} \ln(a / b)$ - włókna wstążkowe |
| Większy współczynnik Poisson'a v <sub>12</sub>  | $v_{12} = v_m v_{12m} + v_f v_{12f}$   | $\infty$   |
| Mniejszy współczynnik Poisson'a v <sub>21</sub> | $v_{21} = (E_2 / E_1) v_{12}$  | -  |

\*) dla włókien okrągłych w układzie kwadratowym, o udziale objętościowym  $V_f > 0.5$  przyjmować  $\xi = 1 + 40 V_f^{10}$

TABELA 7.2. Zestawienie stałych materiałowych dla kompozytu ortotropowego w funkcji charakterystyk materiałowo-geometrycznych matrycy i włókien.

### 7.3. Wytrzymałość kompozytu. Podejście mechaniki materiałów

W przeciwieństwie do problematyki związanej z określaniem charakterystyk sprężystych kompozytu na podstawie charakterystyk jego składników, zagadnienie wyznaczania parametrów wytrzymałościowych kompozytu jest dość słabo rozwinięte i w zasadzie ogranicza się do analizy mikromechanicznej wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu warstwy kompozytu. Zostanie ono przedstawione w kolejnych punktach tego rozdziału.

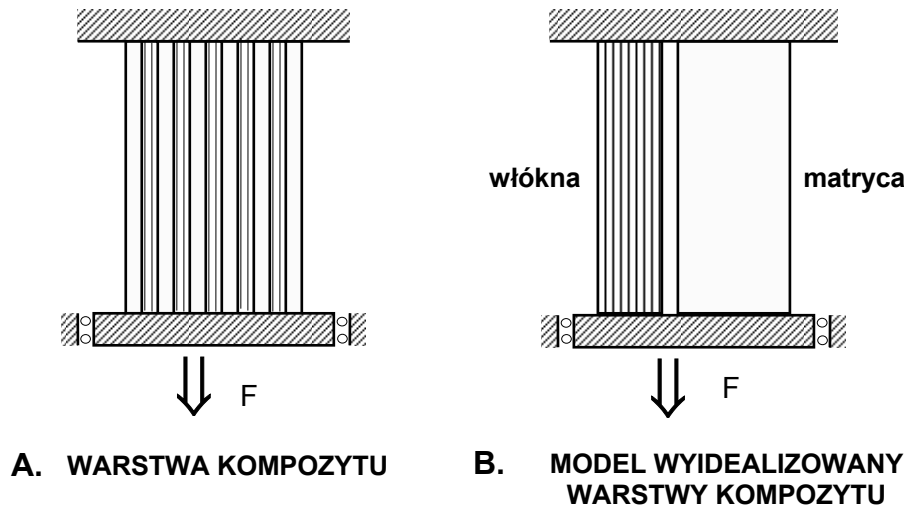
#### 7.3.1. Wytrzymałość przy rozciąganiu w kierunku włókien

##### ◆ Włókna o równej wytrzymałości.

Rozpatrywana będzie warstwa kompozytu włóknistego, obciążona siłą rozciągającą F, działającą w kierunku włókien. Warstwa zastąpiona jest wyidealizowanym modelem mikromechanicznym, w którym włókna i matryca skupione są w dwu obszarach, przy czym zakłada się, że nie występuje między nimi kontakt wzdłuż ich wspólnej granicy. Mówiąc inaczej - włókna i matryca stanowią dwa, rozdzielne obszary, równoległe połączone (w sensie teorii modeli strukturalnych) na brzegach, do których przyłożono obciążenie zewnętrzne. Pokazano to na rysunku 7.22.

Przyjęto następujące oznaczenia

- ◆ X<sub>f</sub> - wytrzymałość włókien na rozciąganie,
- ◆ X<sub>m</sub> - wytrzymałość matrycy na rozciąganie,
- ◆ X<sub>t</sub> - wytrzymałość warstwy kompozytu na rozciąganie,
- ◆  $\varepsilon_f^*$  - odkształcenie niszczące włókna,
- ◆  $\varepsilon_m^*$  - odkształcenie niszczące matrycę.

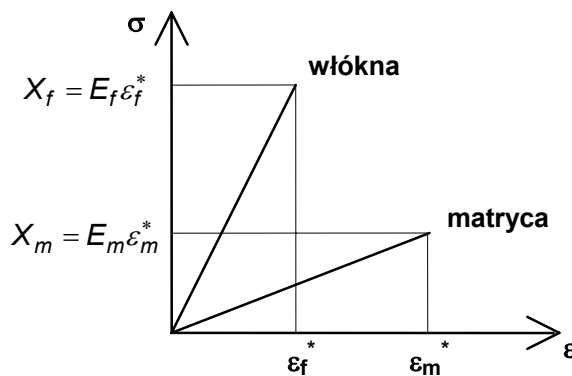


Rys. 7.22. Warstwa kompozytu włóknistego i jej model mikromechaniczny.

W analizie wytrzymałościowej modelu zakłada się, że

- ◆ zarówno włókna, jak i matryca są liniowo sprężyste aż do zniszczenia (rysunek 7.23),
- ◆ wszystkie włókna mają jednakową wytrzymałość (nie uwzględnia się losowej zmienności wytrzymałości),
- ◆ odkształcenia podłużne matrycy i włókien pod wpływem przyłożonego obciążenia są takie same,
- ◆ mimo pęknięcia włókien lub matrycy, w warstwie rozciąganej nadal panuje jednoosiowy stan naprężenia (pomija się wieloosiowy stan naprężenia, który powstaje w pobliżu miejsca pęknięcia).

Mimo tych założeń upraszczających, model mikromechaniczny jest ogólnie akceptowany, gdyż daje on dobry obraz wytrzymałości kompozytu w zależności od wytrzymałości i udziału objętościowego włókien i matrycy.



Rys. 7.23. Schematyczny wykres zależności naprężenie - odkształcenie dla włókien i matrycy.

Pod wpływem przyłożonej siły  $F$  w matrycy i włóknach powstają naprężenia w kierunku włókien, wynoszące

$$\sigma_f = E_f \varepsilon \quad , \quad \sigma_m = E_m \varepsilon \tag{7.115}$$

Siła  $F$  rozdziela się między składniki kompozytu w ten sposób, że jej części przypadające na matrycę i włókna wynoszą odpowiednio

$$F_f = \sigma_f A_f = \sigma_f V_f A = E_f V_f \varepsilon A \tag{7.116}$$

$$F_m = \sigma_m A_m = \sigma_m V_m A = E_m V_m \varepsilon A \tag{7.117}$$

gdzie  $A$ ,  $A_f$ ,  $A_m$ ,  $V_f$ ,  $V_m$  oznaczają odpowiednio pole przekroju poprzecznego warstwy, włókien i matrycy oraz objętościowe udziały włókien i matrycy.

Siła całkowita wynosi zatem

$$F = \varepsilon A (E_f v_f + E_m v_m) \quad (7.118)$$

Siły niszczące matrycę i włókna, odpowiadające odkształceniom niszczącym, wynoszą

$$F_m^* = E_m v_m \varepsilon_m^* A = X_m v_m A \quad (7.119)$$

$$F_f^* = E_f v_f \varepsilon_f^* A = X_f v_f A \quad (7.120)$$

Składniki kompozytu tak długo pozostają nie naruszone, aż odkształcenie odpowiadające sile  $F$  nie osiągnie wartości niszczącej bądź to włókna, bądź matrycę. Dalsze zachowanie kompozytu zależy od tego, który z jego składników uległ zniszczeniu wskutek przekroczenia wytrzymałości jako pierwszy. Należy zatem rozróżnić trzy możliwe przypadki

- ◆ przypadek I -  $\varepsilon_f^* < \varepsilon_m^*$  (włókna bardziej kruche niż matryca),
- ◆ przypadek II -  $\varepsilon_f^* > \varepsilon_m^*$  (matryca bardziej krucha od włókien),
- ◆ przypadek III -  $\varepsilon_f^* = \varepsilon_m^*$  (matryca i włókna o takiej samej kruchości).

#### Przypadek I - kruche włókna, "ciągliwa" matryca

W tym przypadku, z warunku  $\varepsilon_f^* < \varepsilon_m^*$ , równoważnego warunkowi

$$(E_m / E_f) < (X_m / X_f) \quad (7.121)$$

wynika, że jako pierwsze zniszczeniu ulegną oczywiście włókna.

Zauważmy, że w rzeczywistych kompozytach wytrzymałość włókien jest wielokrotnie większa od wytrzymałości matrycy, co pociąga za sobą relację między modułami sprężystości  $E_m < E_f$ .

Obciążenie zewnętrzne przy jakim nastąpi zniszczenie włókien wynosi

$$F' = \varepsilon_f^* A (E_f v_f + E_m v_m) = X_f A [v_f + (E_m / E_f) v_m] \quad (7.122)$$

Obciążenie zewnętrzne może teraz być przenoszone wyłącznie przez matrycę. O tym, czy matryca przejmie dalszy wzrost obciążenia decyduje stosunek siły  $F'$  i siły niszczącej matrycę  $F_m^*$ . Możliwe są oczywiście dwa przypadki

1. siła  $F' > F_m^*$  - równocześnie z włóknami ulegnie zniszczeniu również matryca, co oznacza że siła  $F'$  jest zarazem obciążeniem niszczącym warstwę kompozytu,
2. siła  $F' < F_m^*$  - obciążenie zewnętrzne może wzrosnąć aż do wartości  $F_m^*$ , przy której nastąpi zniszczenie matrycy, a zarazem całej warstwy.

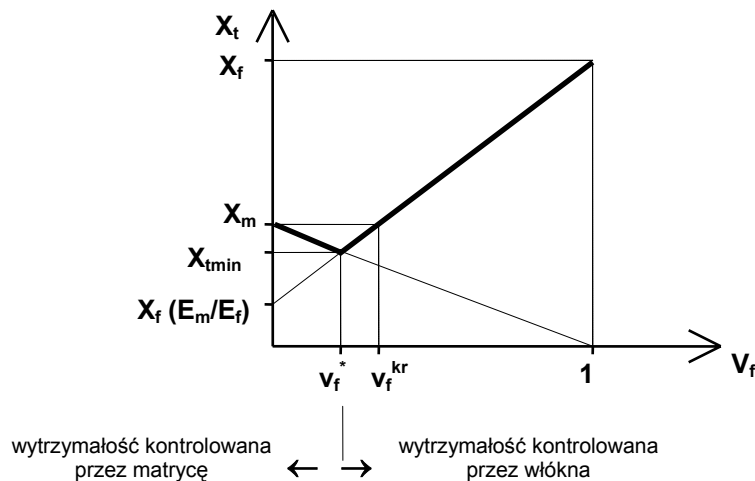
To, który z powyższych warunków będzie zachodził zależy od objętościowego udziału włókien. Wartość graniczną  $v_f^*$  otrzymujemy z warunku  $F' = F_m^*$ . Korzystając z (7.119) i (7.122) otrzymujemy

$$v_f^* = \frac{1 - (X_f / X_m)(E_m / E_f)}{1 - (X_f / X_m)(E_m / E_f) + (X_f / X_m)} \quad (7.123)$$

Ostatecznie zatem wytrzymałość na rozciąganie warstwy zbrojonej włóknami kruchymi wynosi

$$X_t = \begin{cases} \frac{F_m^*}{A} = X_m v_m = X_m (1 - v_f) & \text{dla } 0 \leq v_f < v_f^* \\ \frac{F'}{A} = X_f [v_f + (E_m / E_f)(1 - v_f)] & \text{dla } v_f^* < v_f \leq 1 \end{cases} \quad (7.124)$$

Wykres zależności (7.124) przedstawiono na rysunku 7.24.



Rys. 7.24. Wytrzymałość na rozciąganie warstwy kompozytu w funkcji objętościowego udziału włókien (kruche włókna, "ciągliwa" matryca).

Z wykresu 7.24 wynikają ważne wnioski praktyczne, dotyczące wpływu kruchych włókien na wytrzymałość kompozytu

- ◆ zbrojenie matrycy włóknami, których udział objętościowy jest mniejszy od wartości  $v_f^*$  nie tylko nie zwiększa wytrzymałości kompozytu, ale zmniejsza nawet wytrzymałość samej matrycy. Minimalna wytrzymałość odpowiadająca tej granicznej objętości włókien wynosi

$$X_{tmin} = \frac{X_f}{1 - (X_f/X_m)(E_m/E_f) + (X_f/X_m)} \quad (7.125)$$

Jest to wniosek dość nieoczekiwany, jeśli wziąć pod uwagę, że wytrzymałość włókien jest wielokrotnie większa od wytrzymałości matrycy. Można powiedzieć, że włókna są w tym przypadku, jak gdyby obcymi wtrąceniami, osłabiającymi materiał matrycy.

W przedziale  $0 \leq v_f < v_f^*$  o wytrzymałości kompozytu decyduje więc przede wszystkim matryca,

- ◆ dodanie włókien w objętości większej niż  $v_f^*$  powoduje wzrost wytrzymałości kompozytu, ale dopiero poczynając od wartości krytycznej

$$v_f^{kr} = \frac{(X_m/X_f) - (E_m/E_f)}{1 - (E_m/E_f)} \quad (7.126)$$

wytrzymałość warstwy jest większa od wytrzymałości matrycy, czyli włókna w realny sposób poprawiają wytrzymałość kompozytu.

W przedziale  $v_f^* \leq v_f \leq 1$  wytrzymałość kompozytu jest sterowana przede wszystkim przez objętościowy udział włókien.

### Przypadek II - krucha matryca, "ciągliwe" włókna

W tym przypadku, określonym zależnością  $\varepsilon_f^* > \varepsilon_m^*$ , jako pierwsza ulegnie zniszczeniu matryca i o dalszym zachowaniu kompozytu zadecyduje objętość włókien. Jeżeli jest ona odpowiednio duża, to włókna umożliwią dalszy przyrost obciążenia, w przeciwnym razie ulegną one zniszczeniu wraz z matrycą. Analiza wytrzymałości kompozytu przebiega w tym przypadku w pełni analogicznie do przypadku I. Z tego względu ograniczymy się jedynie do podania jej rezultatów. Czytelnik może potraktować ich uzyskanie jako samodzielne ćwiczenie.

Warunek  $\varepsilon_f^* > \varepsilon_m^*$  oznacza, że zachodzi związek

$$(E_m/E_f) > (X_m/X_f) \quad (7.127)$$

co oznacza, że moduł sprężystości włókien może być większy od modułu sprężystości matrycy, ale może również być od niego mniejszy (wynika to z warunku  $X_m/X_f < 1$ ). Będzie to miało wpływ na zależność wytrzymałości kompozytu od udziału włókien.

Wytrzymałość kompozytu w przypadku kruchej matrycy jest określona równaniami

$$X_t = \begin{cases} X_m [1 - v_f(1 - E_f/E_m)] & \text{dla } 0 \leq v_f < v_f^{**} \\ X_f v_f & \text{dla } v_f^{**} < v_f \leq 1 \end{cases} \quad (7.128)$$

Graniczna wartość objętościowego udziału włókien wynosi

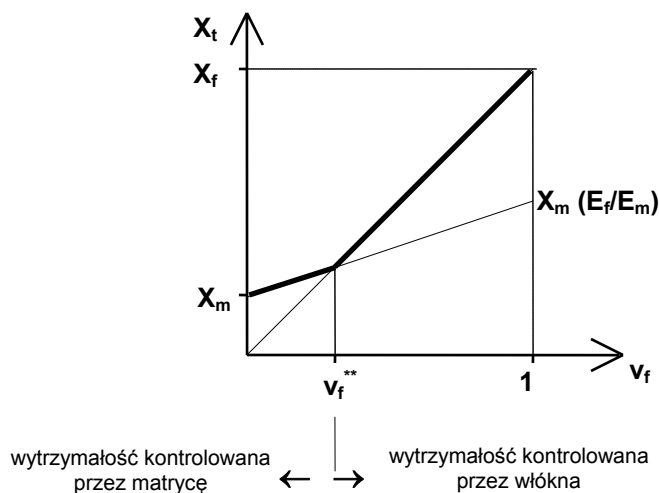
$$v_f^{**} = [1 - (E_f/E_m) + (X_f/X_m)]^{-1} \quad (7.129)$$

Wykres zależności (7.128) zależy od stosunku  $E_f/E_m$ . Wykres dla wartości tego stosunku większej od jedności przedstawiono na rysunku 7.25, a dla mniejszej od jedności na rysunku 7.26.

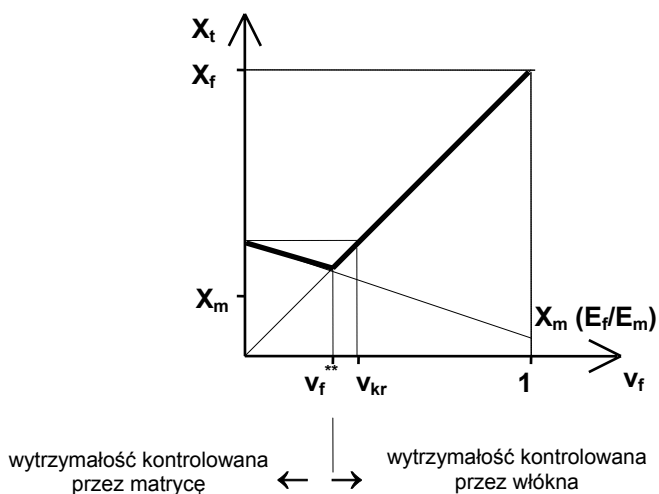
Z rysunku 7.25 wynika, że w kompozytach o kruchej matrycy, dla których zachodzi warunek (7.127) i  $E_f > E_m$ , nawet dowolnie mały udział włókien powoduje wzrost wytrzymałości matrycy. Włókna są bardziej efektywne z punktu widzenia wytrzymałości kompozytu, gdy ich udział przekracza wartość  $v_f^{**}$ . Nie można w tym przypadku mówić o pojęciu krytycznego udziału włókien.

Rysunek 7.26 świadczy, że w przypadku gdy  $E_f < E_m$ , włókna w objętości mniejszej od  $v_f^{**}$  powodują osłabienie matrycy i dopiero dodanie ich w ilości  $v_{kr}$  powoduje realny wzrost wytrzymałości matrycy. Krytyczna objętość włókien wynosi

$$v_{kr} = X_m/X_f \quad (7.130)$$



Rys. 7.25. Wytrzymałość na rozciąganie warstwy kompozytu w funkcji objętościowego udziału włókien (krucha matryca, "ciągliwe" włókna) dla  $E_f > E_m$



Rys. 7.26. Wytrzymałość na rozciąganie warstwy kompozytu w funkcji objętościowego udziału włókien (krucha matryca, "ciągliwe" włókna) dla  $E_f < E_m$ .

**Przypadek III - matryca i włókna o jednakowej kruchości**

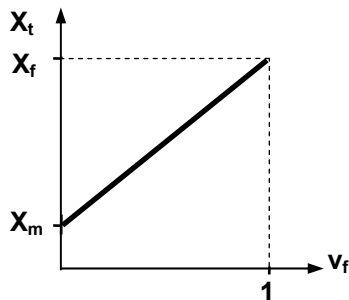
Warunek  $\varepsilon_f^* = \varepsilon_m^*$  oznacza, że między stałymi materiałowymi składników zachodzi związek

$$(E_m / E_f) = (X_m / X_f) \tag{7.131}$$

Zniszczenie w kompozycie spełniającym ten warunek występuje w wyniku równoczesnego zniszczenia włókien i matrycy. Rozwiązanie wynika wprost z równania (7.124 b) i obowiązuje dla dowolnej wartości objętościowego udziału włókien  $v_f$ . Ma ono po uwzględnieniu (7.131) postać

$$X_t = X_m v_m + X_f v_f \tag{7.132}$$

Równanie (7.132) to tzw. zasada mieszanin dla wytrzymałości kompozytu. Przedstawiono ją graficznie na rysunku 7.27.



Rys. 7.27. Wytrzymałość na rozciąganie warstwy kompozytu w funkcji objętościowego udziału włókien (matryca i włókna jednakowo kruche) dla  $E_f = E_m$ .

**Wytrzymałość na rozciąganie typowych kompozytów włóknistych**

Otrzymane w pkt. 7.3.1 zależności zilustrujemy na przykładzie typowych kompozytów włóknistych o matrycy epoksydowej, zbrojonej różnymi typami włókien. Reprezentatywne własności tych włókien i matrycy zestawiono w tabeli 7.3.

|                     | WŁÓKNA        |           |               |           |           |                | MATRYCA   |         |
|---------------------|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------|----------------|-----------|---------|
|                     | grafit UHM *) | szkło "E" | grafit HM **) | Kevlar 49 | Kevlar 29 | grafit HS ***) | szkło "S" | epoksyd |
| X [MPa]             | 1030          | 1700      | 1790          | 2270      | 2270      | 2480           | 2500      | 65      |
| E [GPa]             | 520           | 72        | 370           | 124       | 83        | 230            | 87        | 3.5     |
| $\varepsilon^*$ [%] | 0.2           | 2.36      | 0.48          | 1.83      | 2.73      | 1.08           | 2.87      | 1.86    |

- \*) - ultra wysokomodułowy (*Ultra High Modulus*)
- \*\*\*) - wysokomodułowy (*High Modulus*)
- \*\*\*\*) - wysokowytrzymały (*High Strength*)

TABELA 7.3. Wytrzymałości podłużne, moduły sprężystości i odkształcenia niszczące dla typowych włókien i matrycy epoksydowej.

Z danych zamieszczonych w powyższej tabeli wynika, że w każdym przypadku zachodzą zależności

♦  $E_f > E_m$  ,  $X_f > X_m$  (7.133)

- ♦ warunek "kruchej matrycy"  $\varepsilon_m^* < \varepsilon_f^*$  zachodzi w przypadku obu typów włókien szklanych i włókien Kevlar 29. Uwzględniając (7.133) i wcześniejsze rozważania, wnioskujemy, że dodanie do matrycy epoksydowej o charakterystyce jak w tabeli 7.3 dowolnie małej ilości włókien, poprawia jej wytrzymałość podłużną. Graniczne wartości objętościowego udziału włókien zestawiono w tab. 7.4.
- ♦ warunek "kruchych włókien"  $\varepsilon_m^* > \varepsilon_f^*$  jest spełniony w przypadku zbrojenia matrycy włóknami grafitowymi i Kevlarem 49. Wzmacniają one wytrzymałość matrycy tylko wówczas, gdy ich objętości przekraczają wartości krytyczne, podane w tabeli 7.4.

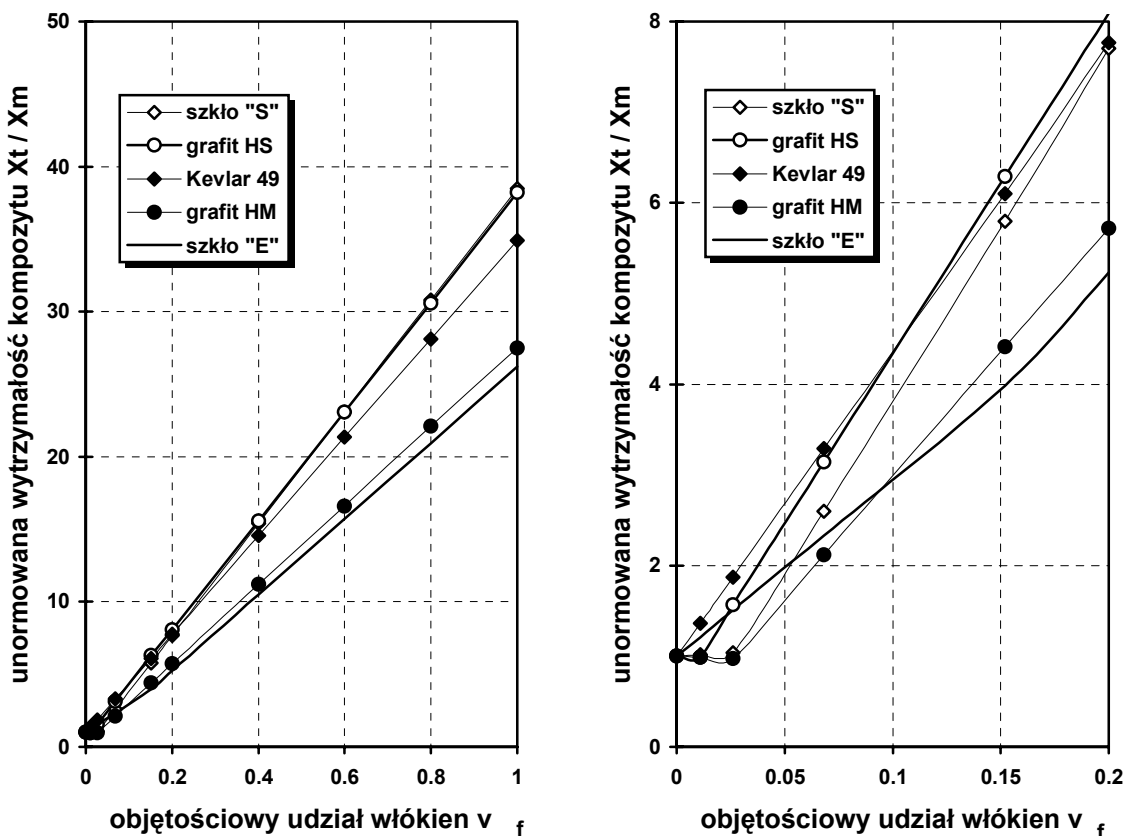
|                | WŁÓKNA     |           |           |           |           |           |           |
|----------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                | grafit UHM | szkło "E" | grafit HM | Kevlar 49 | Kevlar 29 | grafit HS | szkło "S" |
| $v_f^*$ [%]    | 5.33       |           | 2.62      | 0.04      |           | 1.09      |           |
| $v_f^{**}$ [%] |            | 15.2      |           |           | 8.2       |           | 6.8       |
| $v_{kr}^f$ [%] | 5.68       | 0         | 2.71      | 0.042     | 0         | 1.12      | 0         |

TABELA 7.4. Przykładowe graniczne i krytyczne udziały objętościowe typowych włókien w matrycy epoksydowej

Na rysunku 7.28 przedstawiono wykres unormowanej wytrzymałości na rozciąganie  $X/X_m$  kompozytu o matrycy epoksydowej, zbrojonej typowymi włóknami ( wykorzystano dane z tabeli 7.3). Pokazane tam jest także powiększenie wykresu dla  $0 \leq v_f \leq 0.2$ , pozwalające zilustrować charakterystyczne cechy ogólnych wykresów 7.24 i 7.25.

Z wykresów pokazanych na rys.7.28 widać, że sformułowanie ogólnych zasad, określających efektywność stosowania określonych włókien w celu maksymalnego zwiększenia wytrzymałości na rozciąganie kompozytu jest niemożliwe. Jednak ograniczając analizę do wartości  $v_f$ , występujących w rzeczywistych kompozytach (rzędu kilkudziesięciu procent) można pokusić się o pewne uogólnienia. Na podstawie przykładowego wykresu 7.28 stwierdzamy, że

- ♦ dla ustalonego objętościowego udziału włókien, największy wzrost wytrzymałości kompozytu w porównaniu z wytrzymałością czystej matrycy daje zbrojenie jej włóknami szklanymi "S" i grafitowymi wysokowytrzymałymi, a następnie kolejno kevlarowymi 49, grafitowymi wysokomodułowymi i szklanymi "E",
- ♦ aby uzyskać takie sam wzrost wytrzymałości kompozytu w stosunku do matrycy, najmniej objętościowo należy dodać włókien szklanych "S" i grafitowych HS, a następnie kolejno kevlarowych 49, grafitowych HM i szklanych "E".



Rys. 7.28. Unormowana wytrzymałość kompozytu w funkcji objętościowego udziału włókien.

W celu skorelowania tych wniosków jakościowych z charakterystykami materiałowymi włókien i matrycy zestawimy je w odpowiedni sposób w tablicy 7.5.

|             | WŁÓKNA    |           |           |           |           |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|             | szkło "S" | grafit HS | Kevlar 49 | grafit HM | szkło "E" |
| $X_f / X_m$ | 38.5      | 38.2      | 34.9      | 27.5      | 26.2      |
| $E_f / E_m$ | 24.9      | 65.7      | 35.4      | 105.7     | 20.6      |

TABLICA 7.5. Unormowana wytrzymałość i moduł sprężystości włókien.

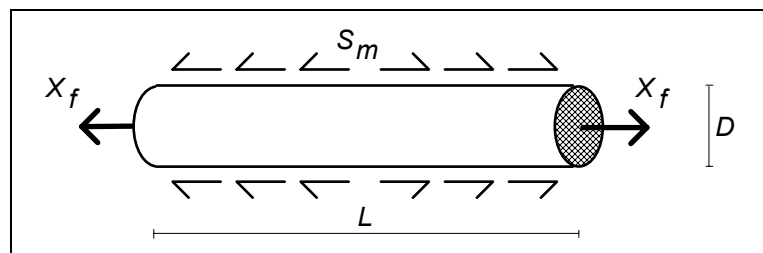
Konfrontacja wniosków płynących z wykresu 7.28 i danych zamieszczonych w tabeli 7.5 pozwala stwierdzić, że

- ♦ o wytrzymałości kompozytu decydują przede wszystkim własności wytrzymałościowe składników. Im stosunek wytrzymałości włókien do wytrzymałości matrycy jest większy, tym włókna są bardziej efektywne z punktu widzenia wzrostu wytrzymałości kompozytu. W rzeczywistych kompozytach stosunek ten jest na tyle duży, że o wytrzymałości kompozytu decydują przede wszystkim włókna,
- ♦ własności sprężyste składników mają drugorzędny wpływ na wytrzymałość kompozytu.

### Wpływ długości włókien na wytrzymałość kompozytu

Parametrem mającym istotny wpływ na wytrzymałość kompozytu przy rozciąganiu podłużnym jest długość włókien zbrojących matrycę. Od długości włókien zależy to, w jakim stopniu obciążenie zewnętrzne rozdziela się między matrycę i włókna, a zatem i efektywność włókien z punktu widzenia wytrzymałości kompozytu. Obciążenie przekazywane jest przez matrycę do włókien poprzez powierzchnię styku obu faz, przy czym nie dotyczy to końców włókien, przez które obciążenie nie jest przekazywane. O wielkości obciążenia przekazywanego do włókna decyduje jego średnica  $D$  oraz wytrzymałość połączenia włókno-matryca, za którą uważa się wytrzymałość matrycy na ścinanie  $S_m$ .

Na rys. 7.29 pokazano włókno, na którego powierzchni bocznej działa naprężenie  $S_m$ , reprezentujące obciążenie przekazywane przez matrycę na włókno, a na ściankach czołowych maksymalna siła,  $F_f$ , jaką jest ono w stanie przenieść.



Rys. 7.29. Obciążenie włókna.

Siła  $F$  w odległości  $x$  od dowolnego końca włókna przekazywana na włókno przez matrycę wynosi

$$F = \int_0^x \pi D S_m dx = \pi D S_m x \quad (7.134)$$

Maksymalna siła  $F_f$ , jaka może być przyniesiona przez włókno wynosi

$$F_f = \frac{\pi D^2}{4} X_f \quad (7.135)$$

Włókno w pełni wykorzystuje swą wytrzymałość wówczas, gdy te dwie siły są równe. Z porównania (7.134) i (7.135) wynika, że warunek ten jest spełniony dopiero w odległości  $x_{kr}$  od końców włókna, wynoszącej

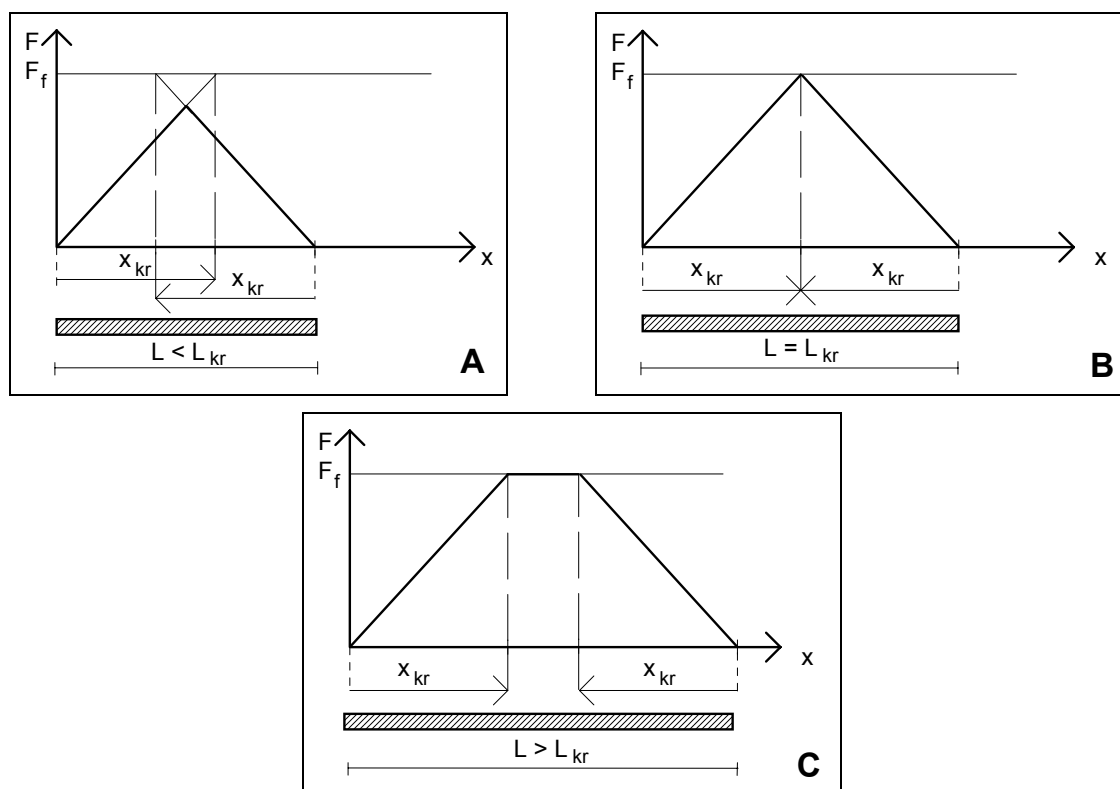
$$x_{kr} = \frac{D}{4} \frac{X_f}{S_m} \quad (7.136)$$

Tak więc włókno efektywnie poprawia wytrzymałość kompozytu wówczas, gdy jego długość, nazywana długością krytyczną, wynosi

$$L_{kr} = 2 x_{kr} = \frac{D}{2} \frac{X_f}{S_m} \quad (7.137)$$

Na rys. 7.30 przedstawiono rozkład siły wzdłuż osi podłużnej włókna, przekazywanej na nie przez matrycę, dla włókien o różnej długości. Z rys. 7.30 A widać, że gdy długość włókna jest mniejsza od krytycznej, przekazywana siła nie osiąga wartości obciążenia maksymalnego  $F_f$  - włókno nie jest zatem efektywnie wykorzystane. Efektywność włókna rośnie wraz z jego długością, co widać z rys. 7.30 B i C. W praktyce - w kompozytach jednokierunkowo zbrojonych stosowane są włókna o długości wyraźnie większej od krytycznej ( $L > 15 L_{kr}$ ), określane jako **włókna ciągłe**.

W wielu zastosowaniach (np. przy produkcji kompozytowych karoserii samochodowych), a także w wielu technologiach wytwarzania kompozytów (np. metoda natryskowa) wykorzystywane są krótkie włókna cięte ( $L < L_{kr}$ ) o losowym rozmieszczeniu w elemencie kompozytowym. Wytrzymałość takiego elementu jest trudna do oszacowania, należy jednak stwierdzić, że możliwości wytrzymałościowe włókien są w takim przypadku silnie ograniczone, po pierwsze z przyczyn, o których była mowa wcześniej, a po drugie dlatego, że tylko część włókien jest rozmieszczona wzdłuż kierunku obciążenia rozciągającego (przyjmuje się, że ok. 25%) i tym samym przekazywana jest do nich tylko część tego obciążenia.



Rys. 7.30. Siła przekazywana przez matrycę na włókno w funkcji położenia jego przekroju, gdy długość włókna jest : A. mniejsza od długości krytycznej, B. równa długości krytycznej, C. większa od długości krytycznej włókna.

### Podsumowanie

W celu podsumowania rozważań dotyczących wytrzymałości na rozciąganie w kierunku włókien kompozytów o osnowie "plastycznej" (żywice epoksydowe, poliestrowe, poliwęglanowe itd.) zbrojonych typowymi włóknami (szklanymi, grafitowymi, kevlarowymi), a także syntetycznego ujęcia

uzyskanych zależności określających tę wytrzymałość (liczba różnych przypadków może wywoływać wrażenie pewnego "zamętu") zestawmy najważniejsze wiadomości i wnioski

- ◆ w kompozytach tych, zawsze są prawdziwe następujące zależności między stałymi sprężystymi i wytrzymałościowymi składników

$$E_f > E_m \quad , \quad X_f > X_m \quad (7.138)$$

- ◆ biorąc pod uwagę rzeczywiste objętościowe udziały włókien w kompozycie, rzędu kilkudziesięciu procent - objętości graniczne i krytyczne włókien (rzędu kilku procent, a nawet mniejsze) nie mają większego znaczenia przy wyborze zależności określających wytrzymałość kompozytu,
- ◆ jeżeli stałe materiałowe składników spełniają związek  $(E_m/E_f) < (X_m/X_f)$  to wytrzymałość kompozytu wynika z równania

$$X_t = X_f [v_f + (E_m/E_f)(1 - v_f)] \quad (7.139)$$

- ◆ jeżeli stałe materiałowe składników spełniają związek  $(E_m/E_f) > (X_m/X_f)$  to wytrzymałość kompozytu wynika z równania

$$X_t = X_f v_f \quad (7.140)$$

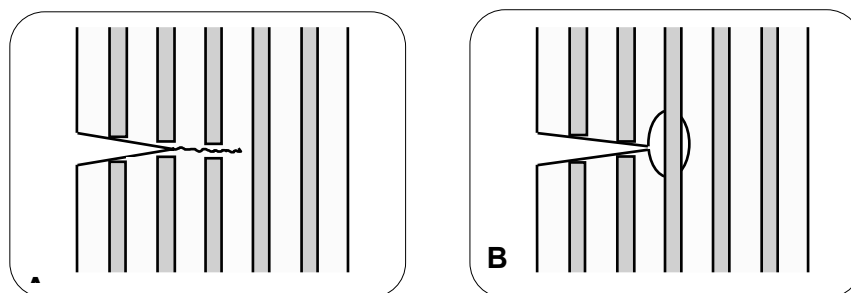
- ◆ jeżeli stałe materiałowe składników spełniają związek  $(E_m/E_f) = (X_m/X_f)$  to wytrzymałość kompozytu określona jest przez zasadę mieszania

$$X_t = X_f v_f + X_m v_m \quad (7.141)$$

- ◆ najbardziej efektywne z punktu widzenia wykorzystania wytrzymałości włókien jest zbrojenie matrycy jednokierunkowymi włóknami ciągłymi.

#### ◆ Włókna o losowym rozkładzie wytrzymałości.

Jedno z założeń wykorzystywanych przy wyznaczaniu wytrzymałości kompozytu na rozciąganie, podanych w pkt. 7.3.1 mówiło, że wytrzymałość każdego włókna jest identyczna, co tym samym oznacza, iż zniszczenie kompozytu związane jest z jednoczesnym pęknięciem wszystkich włókien. W rzeczywistych kompozytach wytrzymałość włókna zmienia się na jego długości (może to być wynikiem np. procesu produkcyjnego i wywołanych nim defektów powierzchni włókna) - jest zatem wielkością losową. Jest oczywiste, że skoro zmienna jest wytrzymałość pojedynczego włókna to wszystkie włókna różnią się między sobą cechami wytrzymałościowymi - część włókien pęka przy mniejszym obciążeniu, inne przy większym. W sytuacji, gdy pewne włókna uległy zerwaniu możliwe są różne mechanizmy dalszego uszkodzania się kompozytu w zależności od własności matrycy i jej połączenia z włóknem. Zasadniczo występują dwa mechanizmy pęknięcia kompozytu. W przypadku gdy połączenie matryca-włókno jest bardzo mocne, a sama matryca jest krucha - szczeliny utworzone na pękniętych włóknach propagują się poprzez matrycę, a następnie "przecinają" kolejne włókna, prowadząc do zniszczenia kompozytu. Drugi możliwy mechanizm dotyczy kompozytów, w których połączenie matrycy z włóknami jest słabe, bądź też sama matryca jest ciągliwa (tzn. ma niską granicę plastyczności). Polega on na tym, że uszkodzenie poprzeczne inicjujące się na pękniętych włóknach po dojściu do matrycy zmienia kierunek propagacji i rozwija się dalej wzdłuż kierunku włókna, bądź to wskutek zerwania połączenia włókna z matrycą (ang. *debonding*), bądź uplastycznienia matrycy. Oba mechanizmy pokazano na rys. 7.31.

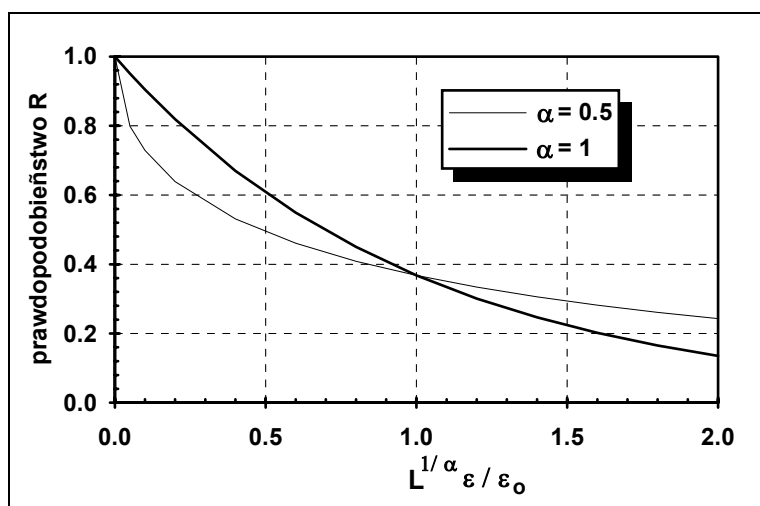


Rys. 7.31. Mechanizmy zniszczenia warstwy kompozytu przy rozciąganiu: A. pęknięcie poprzeczne, B. podłużne zrywanie połączenia matryca-włókno.

W drugim typie zniszczenia warstwy przy rozciąganiu w kierunku włókien, mamy w istocie do czynienia z rozseparowaniem włókien pękniętych i włókien nieuszkodzonych, a kompozyt zachowuje się tak jak wiązka włókien. Przypuśćmy, że przy danym obciążeniu odkształcenia powstające we wszystkich włóknach są takie same i równe  $\varepsilon$ . Prawdopodobieństwo tego, że dane włókno nie ulegnie pęknięciu przy tym odkształceniu (tzw. prawdopodobieństwo "przeżycia" włókna) czy mówiąc inaczej udział włókien nieuszkodzonych opisuje równanie:

$$R(\varepsilon) = \exp\left[-L(\varepsilon/\varepsilon_0)^\alpha\right] \quad (7.142)$$

gdzie  $L$  oznacza długość włókna, zaś  $\varepsilon_0$  i  $\alpha$  są stałymi. Schematyczny wykres funkcji prawdopodobieństwa pokazano na rys. 7.32.



Rys. 7.32. Prawdopodobieństwo nie uszkodzenia włókna w funkcji odkształcenia.

Naprężenie nominalne (tzn. odpowiadające powierzchni włókien nie uszkodzonych) w włóknach wiązki wynosi

$$\sigma = E_f \varepsilon R(\varepsilon) \quad (7.143)$$

a po wstawieniu (7.142) przyjmuje postać :

$$\sigma = E_f \varepsilon \exp\left(-L \varepsilon_0^{-\alpha} \varepsilon^\alpha\right) \quad (7.144)$$

Wiązka ulegnie zniszczeniu wówczas, gdy nie będzie w stanie przejąć żadnego dalszego przyrostu obciążenia (a w konsekwencji i naprężenia). Oznacza to, że odkształcenie  $\varepsilon_b$ , przy którym nastąpi zniszczenie wiązki musi spełniać warunek:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_b} = 0 \quad (7.145)$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy odkształcenie niszczące w następującej postaci:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_0 (L \alpha)^{-1/\alpha} \quad (7.146)$$

Naprężenie  $X_b$  niszczące wiązkę (wytrzymałość wiązki na rozciąganie), odpowiadające temu odkształceniu otrzymujemy z rów. (7.144). Wynosi ono :

$$X_b(L) = E_f \varepsilon_0 (L \alpha e)^{-1/\alpha} \quad (7.147)$$

Wprowadźmy funkcję  $F(\varepsilon)$ , zdefiniowaną w następujący sposób:

$$F(\varepsilon) = 1 - R(\varepsilon) \quad (7.148)$$

Skoro funkcja  $R(\varepsilon)$  oznaczała prawdopodobieństwo "przeżycia" włókna przy odkształceniu  $\varepsilon$ , to funkcja  $F(\varepsilon)$  musi oznaczać prawdopodobieństwo zniszczenia włókna. Wstawiając do rów. (7.148) funkcję opisaną rów. (7.142), otrzymujemy:

$$F(\varepsilon) = 1 - \exp\left[-L(\varepsilon/\varepsilon_0)^\alpha\right] \quad (7.149)$$

Z formalnego punktu widzenia jest to dystrybuanta zmiennej losowej  $\varepsilon$ , charakteryzującej się rozkładem Weibulla.

Odształcenie niszczące włókno  $\varepsilon_f^*$  można wyznaczyć jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej. Wyraża się ona zależnością:

$$\varepsilon_f^* = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (7.150)$$

gdzie  $f(\varepsilon)$  jest gęstością prawdopodobieństwa opisaną związkiem:

$$f(\varepsilon) = \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -\frac{dR(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (7.151)$$

Po zróżniczkowaniu rów. (7.149), otrzymujemy:

$$f(\varepsilon) = L \alpha \varepsilon_0^{-\alpha} \varepsilon^{\alpha-1} \exp\left[-L(\varepsilon/\varepsilon_0)^\alpha\right] \quad (7.152)$$

Odształcenie niszczące, po wykorzystaniu (7.152) wyraża się następującą zależnością:

$$\varepsilon_f^* = L \alpha \varepsilon_0^{-\alpha} \int_0^\infty \varepsilon^\alpha \exp\left[-L(\varepsilon/\varepsilon_0)^\alpha\right] d\varepsilon \quad (7.153)$$

Wartość całki występującej w (7.153) można znaleźć w tablicach całek<sup>\*)</sup>. Ostatecznie odkształcenie niszczące wynosi:

$$\varepsilon_f^* = \varepsilon_0 L^{-1/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (7.154)$$

gdzie  $\Gamma$  oznacza funkcję gamma Eulera.

Wartość oczekiwana wytrzymałości włókna przy rozciąganiu  $X_f$ , odpowiadająca odkształceniu  $\varepsilon_f^*$  wynosi: zatem

$$X_f(L) = E_f \varepsilon_f^* = E_f \varepsilon_0 L^{-1/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (7.155)$$

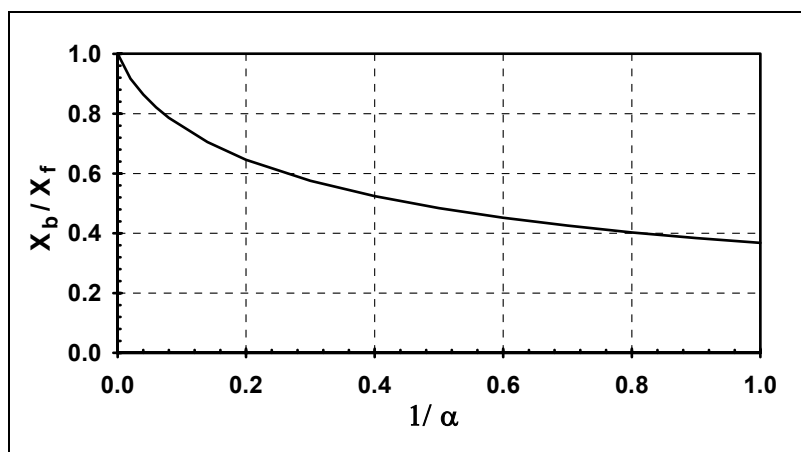
Porównajmy wytrzymałość wiązki włókien - rów. (7.147) - z wytrzymałością włókna, określoną przez rów. (7.155). Stosunek tych wytrzymałości wynosi:

$$\frac{X_b(L)}{X_f(L)} = \frac{1}{(\alpha e)^{1/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \quad (7.156)$$

\*) Stosując odpowiednie (w oczywisty sposób narzucające się) podstawienia, całkę (7.153) można wyznaczyć z rozwiązania podanego w "Tablicach całek, sum, szeregów i wyrażeń" - Gradsztajn, Ryżyk (w jęz. ros.) - wzór (3.478):

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\mu x^\rho} dx = \frac{1}{|\rho|} \mu^{-\nu/\rho} \Gamma\left(\frac{\nu}{\rho}\right)$$

Wykres zależności (7.156) pokazano na rys. 7.33. Wartości funkcji  $\Gamma$  zaczerpnięto z tablic matematycznych (można je znaleźć np. w "Poradnik inżyniera - matematyka", t. 1, WNT, 1987).



Rys. 7.33. Stosunek wytrzymałości wiązki włókien do wytrzymałości włókna w funkcji współczynnika zmienności.

Tsai i Hahn wykazali, że współczynnik  $1/\alpha$  jest bardzo bliski wartości współczynnika zmienności<sup>\*)</sup> wytrzymałości włókna, mówiąc inaczej jest miarą jej rozrzutu. Z rys. 7.33 widać, że czym rozrzut ten jest większy tym wytrzymałość wiązki włókien jest coraz mniejsza w stosunku do wytrzymałości pojedynczego włókna.

Na bazie przedstawionego tu statycznego podejścia do zagadnienia wytrzymałości kompozytu przy rozciąganiu, Rosen analizował model zniszczenia łączący mechanizmy pęknięcia poprzecznego i podłużnego., zakładający, że pęknięcie przebiega częściowo poprzecznie do kierunku włókien, a częściowo wzdłuż ich kierunku. W modelu tym przyjmuje się, że kompozyt ulega zniszczeniu wówczas, gdy w strefie interakcji włókien pękniętych, której długość wynosi  $\delta$  - pozostałe włókna jeszcze nie pęknięte również ulegną zniszczeniu. Model zniszczenia typu "mieszanego" wg Rosena pokazano na rys. 7.34. Za wytrzymałość warstwy kompozytu przy rozciąganiu przyjęto wytrzymałość wiązki włókien o długości  $\delta$  powiększoną o wytrzymałość matrycy. Równanie opisujące tak określoną wytrzymałość ma postać:

$$X_t = X_b(\delta)v_f + \sigma_m^* v_m \quad (7.157)$$

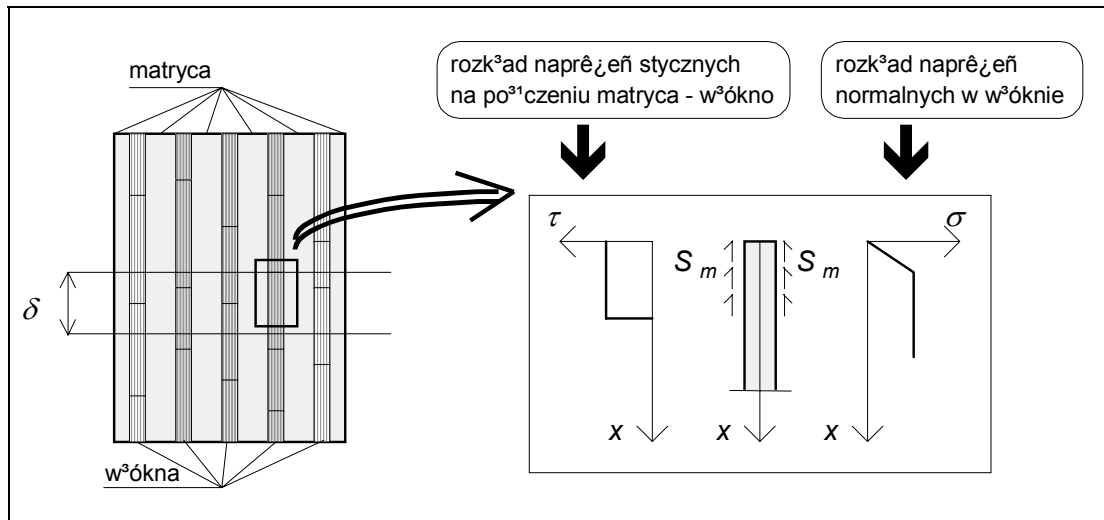
gdzie  $\sigma_m^*$  oznacza naprężenie w matrycy przy obciążeniu niszczącym kompozyt. Wielkość tę wyznacza się z warunku liniowości i równości odkształceń w matrycy i włóknach, który dla stanu zniszczenia przyjmuje postać:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m \Rightarrow \sigma_m^* = \frac{E_m}{E_f} X_f \quad (7.158)$$

Z rów. (7.157), po wstawieniu (7.147) (z wykorzystaniem (7.155)) i (7.158) otrzymujemy:

$$X_t = \frac{1}{(\alpha e)^{1/\alpha} \Gamma(1+1/\alpha)} \left(\frac{L}{\delta}\right)^{1/\alpha} v_f X_f(L) + \frac{E_m}{E_f} X_f v_m \quad (7.159)$$

<sup>\*)</sup> Współczynnik zmienności zmiennej losowej jest to stosunek odchylenia standardowego rozkładu tej zmiennej i jej wartości oczekiwanej (średniej).



Rys. 7.34. Model Rosena zniszczenia "poprzeczno-podłużnego" przy rozciąganiu.

W oparciu o liniowo sprężysty rozkład naprężeń normalnych w włóknie (naprężenie normalne rośnie od zera na pękniętym końcu do stałej wartości "nominalnej", takiej jak we włóknach nieuszkodzonych) i sztywno-idealnie plastyczny rozkład naprężeń stycznych na granicy włókna i matrycy w strefie ich separacji, Rosen wyznaczył zależność określającą długość  $\delta$  strefy interakcji. Ma ona następującą postać:

$$\frac{\delta}{D} = 2 \left( \frac{X_f}{4S_m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left[ (\alpha + 1) \frac{L}{D} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (7.160)$$

gdzie  $D$  oznacza średnicę włókna.

Rozważmy przypadek, gdy współczynnik zmienności wytrzymałości włókna  $1/\alpha$  jest bardzo mały (tzn. włókno jest równomiernej wytrzymałości).

Zależność (7.159) redukuje się wówczas do równania:

$$X_t = X_f \left[ v_f + \frac{E_m}{E_f} (1-v_f) \right] \quad (7.161)$$

Jest ono identyczne z równaniem (7.139) określającym wytrzymałość kompozytu w omówionym już w tym rozdziale przypadku "kruchych włókien". Tak więc podejście statystyczne Rosena sprowadza się w przypadku granicznym do modelu deterministycznego kompozytu o kruchych włóknach.

Zależność (7.160) dla małych wartości  $1/\alpha$  redukuje się do równania :

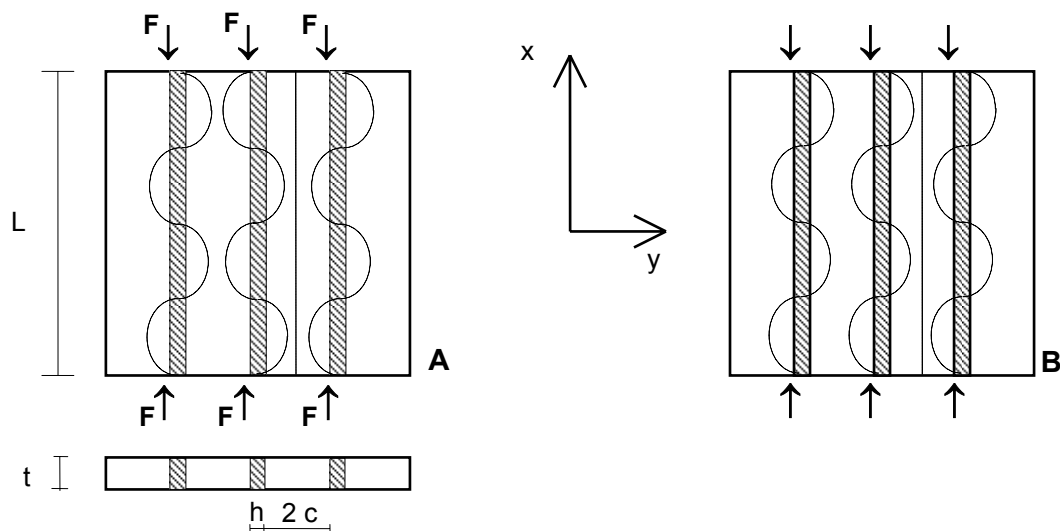
$$\delta = \frac{D}{2} \frac{X_f}{S_m} \quad (7.162)$$

identycznego z rów. (7.137), określającym krytyczną długość włókna, tzn. minimalną długość jaką powinno mieć włókno, aby było efektywne z punktu widzenia wytrzymałości kompozytu.

### 7.3.2. Wytrzymałość kompozytu przy ścisnieniu w kierunku włókien

Przy obciążeniu ścisakającym, działającym wzdłuż kierunku włókien, zniszczenie kompozytu jest związane z efektem wyboczenia włókien w płaszczyźnie warstwy kompozytowej. Rola matrycy jest w tym przypadku znacznie większa niż przy obciążeniu rozciągającym, gdyż stanowi ona rodzaj podpory dla włókien, utrudniającej ich wyboczenie.

Wyróżnia się dwa typy wyboczenia włókien, przedstawione na rysunku 7.35.



Rys. 7.35. Wyboczenie włókien przy ściskaniu warstwy kompozytu: A. typ poprzeczny, B. typ ścinający.

Typ A charakteryzuje się tym, że sąsiednie włókna ulegają wyboczeniu symetrycznie względem linii środkowej, przebiegającej między nimi. Nosi ono nazwę wyboczenia "poprzecznego" lub "wydłużeniowego". Nazwa wywodzi się stąd, że materiał matrycy między włóknami jest wskutek wyboczenia włókien na zmianę ściskany i rozciągany (mówiąc mało precyzyjnie, ale obrazowo ulega on "skróceniu" lub "wydłużeniu") w kierunku poprzecznym do włókien.

W przypadku wyboczenia typu B, włókna są położone antysymetrycznie względem linii środkowej. W rezultacie materiał matrycy podlega ścinaniu, stąd ten typ wyboczenia nosi nazwę "ścinającego".

Każdy z typów wyboczenia prowadzi do różnych oszacowań wytrzymałości warstwy kompozytowej przy obciążeniu ściskającym. Jako miarodajne przyjmuje się to oszacowanie, które daje mniejszą wartość wytrzymałości.

Niezależnie od typu wyboczenia, włókno traktuje się jak pręt o przekroju poprzecznym  $h \times t$  i długości  $L$ , "zanurzony" w matrycy, obciążony siłą ściskającą  $F$ , wybaczający się w zakresie liniowo sprężystym w płaszczyźnie  $(x, y)$ . Zakłada się, że matryca i włókna są idealnie liniowo sprężyste. W analizie pomijany jest efekt ścinania włókien, jako drugorzędny w stosunku do ścinania matrycy, co usprawiedliwione jest zależnością między modułami ścinania włókien i matrycy  $G_f \gg G_m$ .

#### ◆ Wyboczenie typu poprzecznego

Na skutek przyłożenia do włókna siły ściskającej  $F$  i wywołanego nią przemieszczenia poprzecznego (a mówiąc prościej - ugięcia)  $w(x)$ , odkształcenie matrycy wynosi

$$\varepsilon_{ym} = w / c \quad (7.163)$$

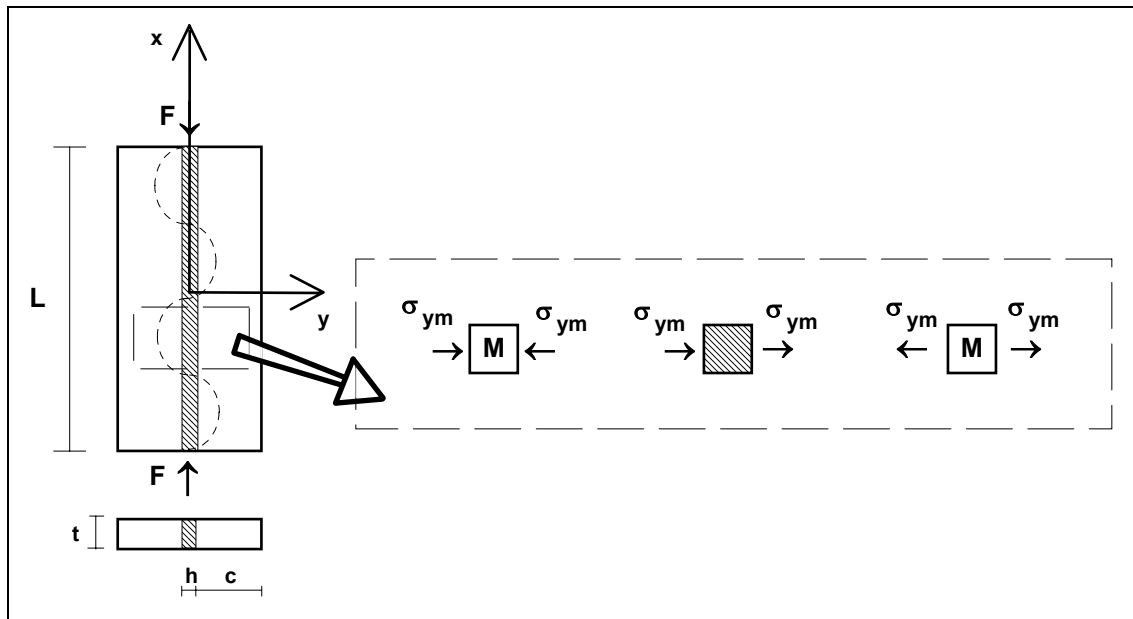
Odpowiadające mu naprężenie w matrycy wynosi

$$\sigma_{ym} = E_m \varepsilon_m = E_m w / c \quad (7.164)$$

Naprężenie to wywołuje "dodatkowe" obciążenie włókna, które przeciwstawia się jego wyboczeniu. Matryca spełnia rolę swego rodzaju ciągłej, dwustronnej podpory biegnącej wzdłuż kierunku włókna. "Reakcją" od tej swoistej podpory jest właśnie to dodatkowe obciążenie, którego wartość przypadająca na jednostkę długości wyraża się równaniem

$$q = 2 \sigma_{ym} t = 2 E_m t w / c \quad (7.165)$$

Pokazano to na rysunku 7.36 i 7.37.



Rys. 7.36. Obciążenie włókna wywołane naprężeniem poprzecznym w matrycy.

W celu wyznaczenia naprężenia krytycznego, tzn. wywołującego wyboczenie włókna należy rozwiązać równanie różniczkowe ugięć, które ma postać

$$E_f I_f w'' = -M(x) \quad (7.166)$$

gdzie  $I_f$  oznacza moment bezwładności przekroju poprzecznego włókna względem osi zginania i wynosi

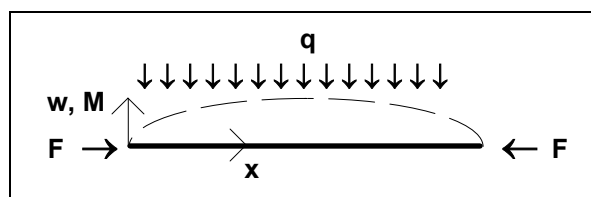
$$I_f = th^3 / 12 \quad (7.167)$$

zaś  $M(x)$  - moment zginający, który wynosi (rysunek 7.37)

$$M(x) = Fw + qx^2/2 \quad (7.168)$$

Podstawiając równanie (7.168) do (7.166) i wykonując operację dwukrotnego różniczkowania, otrzymamy równanie ugięć w formie równania różniczkowego IV rzędu w postaci

$$E_f I_f w'''' + Fw'' + 2E_m(t/c)w = 0 \quad (7.169)$$



Rys. 7.37. Obciążenie półfali włókna.

Rozwiązania równania (7.169) będziemy poszukiwać w postaci szeregu trygonometrycznego

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (7.170)$$

Po obliczeniu kolejnych pochodnych do IV włącznie wyrażenia (7.170) i wykorzystaniu odpowiednich pochodnych w równaniu (7.169) otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_f I_f \frac{n^4 \pi^4}{L^4} - F \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{2E_m t}{c} \right] a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \quad (7.171)$$

Siłę krytyczną  $F_k$  otrzymujemy z warunku zerowania się wyrażenia w nawiasie prostokątnym - wynosi ona

$$F_k = E_f \frac{t h^3 n^2 \pi^2}{12 L^2} + E_m \frac{2t L^2}{c n^2 \pi^2} \quad (7.172)$$

Odpowiadające jej naprężenie krytyczne dla włókna wynosi

$$\sigma_{fk} = \frac{F_k}{th} = E_f \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \left[ n^2 + \frac{K}{n^2} \right] \quad (7.173)$$

gdzie  $K$  jest wielkością stałą i wynosi

$$K = \frac{24 L^4 E_m}{\pi^2 h^3 c E_f} \quad (7.174)$$

Poszukujemy takiej szczególnej postaci wyboczenia, a zatem liczby "n", aby odpowiadające jej naprężenie krytyczne było minimalne. Z warunku istnienia ekstremum funkcji (7.173) wynika, że

$$n^2 = \sqrt{K} \quad (7.175)$$

Po wstawieniu (7.175) do (7.173) w wyniku prostych przekształceń otrzymamy

$$\sigma_{fk}^{min} = \sqrt{\frac{2 h}{3 c} E_m E_f} \quad (7.176)$$

Zauważmy, że objętość reprezentatywnej próbki kompozytu, pokazanej na rysunku 7.36 i objętość zawartych w niej włókien wynoszą odpowiednio

$$\bar{V} = Lt(2c + h) \quad , \quad \bar{V}_f = Lth \quad (7.177)$$

Objętościowy udział włókien wynosi zatem

$$v_f = \frac{h}{2c + h} \quad (7.178)$$

Wykorzystując tę zależność w równaniu (7.176), minimalne naprężenie krytyczne dla pojedynczego włókna wynosi

$$\sigma_{fk}^{min} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{v_f}{1 - v_f} E_m E_f} \quad (7.179)$$

Wielkość tę wykorzystamy teraz do określenia naprężenia krytycznego dla warstwy. W przenoszeniu obciążenia ściskającego ma swój udział także matryca. Udział ten wyznaczamy korzystając z założenia o równości odkształceń liniowych  $\varepsilon_x$  w matrycy i włóknach

$$\varepsilon_{xm} = \varepsilon_{xf} \quad \Rightarrow \quad (\sigma_m / E_m) = (\sigma_f / E_f) \quad (7.180)$$

Naprężenie w matrycy, odpowiadające minimalnemu naprężeniu krytycznemu dla włókien, wynosi

$$\sigma_m = (E_m / E_f) \sigma_{fk}^{min} \quad (7.181)$$

Warunek równowagi sił wymaga, aby siła wypadkowa była równa sumie minimalnej siły krytycznej w włóknie i siły w matrycy, tzn.

$$F_k = F_{fk}^{min} + F_m = \sigma_{fk}^{min} A_f + \sigma_m A_m \quad (7.182)$$

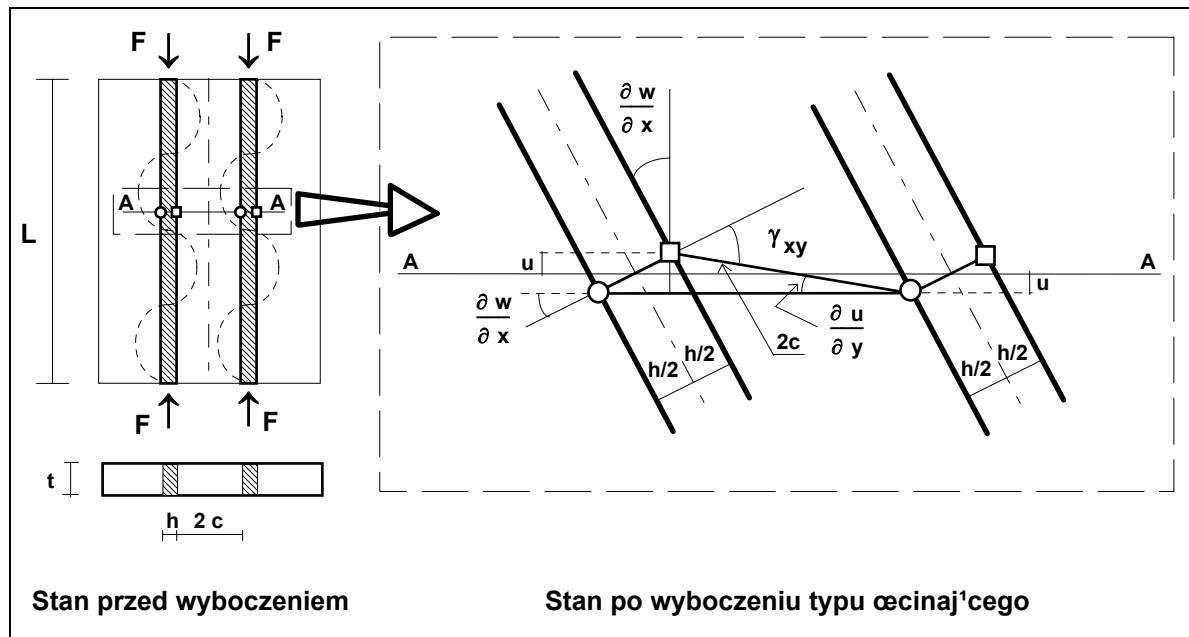
Korzystając z (7.179) i (7.181), równanie (7.182) można przekształcić do postaci

$$\sigma_k = 2 \sqrt{\frac{v_f E_f E_m}{3(1 - v_f)}} \left[ v_f + \frac{E_m}{E_f} (1 - v_f) \right] \quad (7.183)$$

Równanie (7.183) określa wytrzymałość na ściskanie warstwy kompozytu, wynikającą z wybożenia włókien typu poprzecznego. W celu wyznaczenia ostatecznej wartości wytrzymałości należy rozważyć teraz drugi typ wybożenia włókien, tzn. wybożenie typu ścinającego.

◆ **Wybożenie typu ścinającego**

Wybożenie typu ścinającego charakteryzuje się antysymetrycznym ułożeniem wybożonych włókien względem linii środkowej, przebiegającej między nimi. Taki mechanizm deformacji sprawia, że materiał matrycy podlega ścinaniu - pokazano to na rysunku 7.38.



Rys. 7.38. Deformacja warstwy kompozytu przy wybożeniu typu ścinającego.

Związane z tym odkształcenie styczne określone jest równaniem Cauchy'ego

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.184}$$

gdzie  $w(x)$  oznacza przemieszczenie poprzeczne do włókien, a  $u(y)$  - przemieszczenie w kierunku włókien. Zakłada się, że

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_m = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_f \tag{7.185}$$

Z rysunku 7.38 wynikają następujące zależności geometryczne

$$\sin\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{2u}{2c} \tag{7.186}$$

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{2u}{h} \tag{7.187}$$

Na mocy założenia o małych pochodnych przemieszczeń możemy powyższe zależności zapisać w prostszej postaci

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2u}{h} \Rightarrow u = \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \tag{7.188}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{c} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{h}{2c} \frac{\partial w}{\partial x} \tag{7.189}$$

Odształcenie ścinające w matrycy, określone równaniem (7.184), po wykorzystaniu (7.178) wynosi zatem

$$\gamma_{xym} = \frac{1}{v_m} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.190)$$

gdzie  $v_m = (1 - v_f)$  oznacza objętościowy udział matrycy w kompozycie.

Naprężenie styczne w matrycy, odpowiadające odkształceniom ścinającym wynosi

$$\tau_{xym} = G_m \gamma_{xym} \quad (7.191)$$

Przy wyznaczaniu obciążenia krytycznego (a zarazem wytrzymałości warstwy kompozytu na ściskanie) wykorzystamy podejście energetyczne. Wynika z niego, że przejście pręta (w tym przypadku włókna) ze stanu początkowego, nie zdeformowanego do stanu krytycznego (wyboczonego) zachodzi wówczas, gdy praca obciążenia zewnętrznego działającego na włókno jest równa sumie energii odkształcenia włókna i przylegającej do niego matrycy, tzn.

$$W_f = U_f + U_m \quad (7.192)$$

Ze względu na to, że matryca podlega przede wszystkim ścinaniu, jej energia odkształcenia jest równa energii ścinania matrycy, zawartej w obszarze o powierzchni  $2c \times L$  między sąsiednimi włóknami (rysunek 7.38) i wyraża się wzorem

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \tau_{xym} \gamma_{xym} dV \quad (7.193)$$

który po wykorzystaniu (7.190) i (7.191) przyjmuje postać

$$U_m = G_m \frac{ct}{v_m^2} \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (7.194)$$

Obliczając pierwszą pochodną funkcji ugięć (7.170) i korzystając z zależności

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{4} (\sin 2t + 2t) \quad (7.195)$$

obliczamy wartość występującej w (7.194) całki

$$\int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^2 \quad (7.196)$$

Ostatecznie zatem energia ścinania matrycy wynosi

$$U_m = \frac{G_m ct}{v_m^2} \frac{\pi^2}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^2 \quad (7.197)$$

Energia odkształcenia włókien związana jest głównie z ich zginaniem przy ścisaniu. Przy jej wyznaczaniu skorzystamy ze wzoru określającego energię zginania pręta

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{E_f I_f} dx \quad (7.198)$$

Korzystając ze związku między momentem zginającym  $M(x)$ , a drugą pochodną funkcji ugięć (równanie (7.166)), energia zginania ma postać

$$U_f = \frac{1}{2} E_f I_f \int_0^L \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (7.199)$$

Obliczając drugą pochodną funkcji ugięć (7.170) i korzystając z zależności

$$\int \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{4} (\sin 2t - 2t) \quad (7.200)$$

otrzymujemy po przekształceniach

$$U_f = \frac{\pi^4 E_f l_f}{4L^3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^4 \quad (7.201)$$

Pozostaje jeszcze do wyznaczenia praca sił zewnętrznych. Siła  $F$  ściskająca włókno, działa na przemieszczeniu podłużnym włókna, wynikającym z jego ugięcia przy ściskaniu. Zakłada się, że długość włókna przed wyboczeniem i po wyboczeniu jest taka sama, tzn. zaniedbuje się efekt skrócenia włókna.

Z wytrzymałości materiałów [patrz - np. Gere, Timoshenko] wiadomo, że przemieszczenie podłużne belki zginanej o długości  $L$  wyraża się równaniem

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (7.202)$$

Wspomniano już wcześniej, że w analizie ściskania warstwy, włókno traktowane jest jak belka ściskana, tak więc

$$W_f = F\lambda \quad (7.203)$$

Korzystając z (7.196) i (7.202) otrzymujemy

$$W_f = F \frac{\pi^2}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^2 \quad (7.204)$$

Z kryterium wyboczeniowego (7.192), po wstawieniu do niego (7.197), (7.201) i (7.204) otrzymujemy

$$F \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^2 = 2ct \frac{G_m}{v_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^2 + \frac{\pi^2}{L^2} E_f l_f \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^4 \quad (7.205)$$

W analizie stateczności, opartej na metodzie energetycznej przyjmuje się, że minimalna siła krytyczna  $F = F_k^{\min}$  odpowiada szczególnej postaci wyboczenia, określonej przez liczbę  $n = m$ . Równanie (7.205) uprości się, po wykorzystaniu (7.167), do postaci

$$F_k^{\min} = \frac{G_m}{v_m^2} A_m + \pi^2 E_f \left( m \frac{h}{L} \right)^2 A_f \quad (7.206)$$

Naprężenie krytyczne dla włókna, odpowiadające tej sile, wyraża się równaniem

$$\sigma_{fk}^{\min} = \frac{G_m}{v_m v_f} + \pi^2 E_f \left( \frac{h}{L} m \right)^2 \quad (7.207)$$

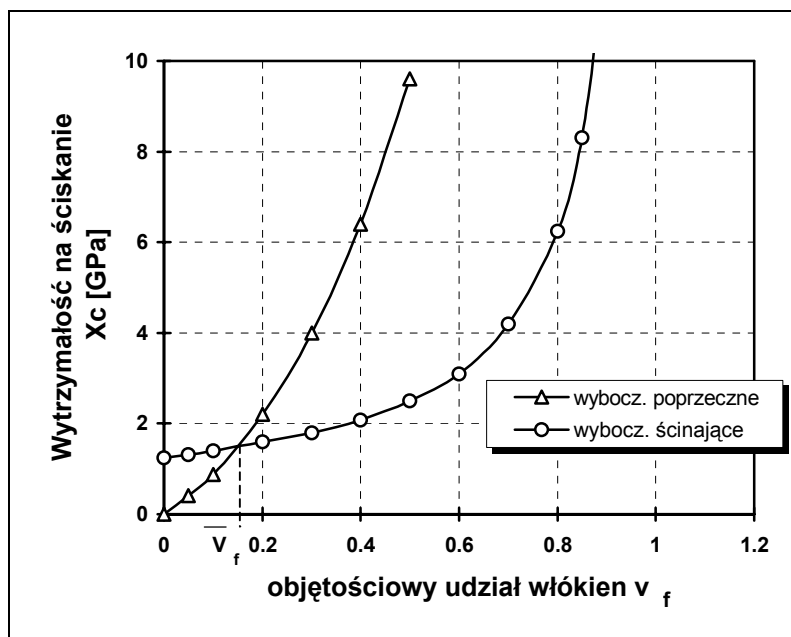
Ułamek  $h/L$  występujący w drugim członie powyższego równania obrazuje stosunek średnicy włókna do jego długości. Z tabeli 1.1 widać, że średnice włókien są rzędu  $10^{-5}$  [ $\mu\text{m}$ ] (jedynie włókna boronowe mają średnice rzędu  $10^{-4}$  [ $\mu\text{m}$ ]). Długości włókien w rzeczywistych kompozytach są uzależnione praktycznie tylko od wymiarów elementów konstrukcyjnych z nich wykonanych i przekraczają średnicę co najmniej o kilka rzędów wielkości. Biorąc pod uwagę, że  $h/L$  występuje w (7.207) w drugiej potęgce, cały drugi człon tego równania jest znikomo mały w stosunku do pierwszego i może być zaniedbany w dalszych rozważaniach.

Ostatecznie zatem naprężenie krytyczne dla warstwy kompozytu przy ściskaniu, wynikające z mechanizmu zniszczenia wywołanego wyboczeniem włókien typu ścinającego wynosi

$$\sigma_k = \sigma_{fk}^{min} V_f = \frac{G_m}{1 - V_f} \quad (7.208)$$

Jest to zarazem wytrzymałość warstwy na ściskanie przy wyboczeniu ścinającym.

Wykresy zależności (7.183) i (7.208), określających wytrzymałość warstwy przy ścisaniu pokazano na rysunku 7.39. Sporządzono je dla przykładowego kompozytu o matrycy epoksydowej, zbrojonej włóknami szklanymi typu "E". Przyjęto następujące wartości stałych materiałowych dla składników kompozytu :  $E_f=72$  GPa,  $E_m=3.5$  GPa,  $\nu_m=0.4$ . Moduł ścinania matrycy  $G_m=E_m/[2(1+\nu_m)]=1.25$  GPa.



Rys. 7.39. Wytrzymałość na ściskanie dla kompozytu szkło "E"/ epoksyd.

Z przykładowych wykresów na rys. 7.39 widać, że o typie wyboczenia przy ścisaniu warstwy decyduje objętościowy udział włókien. Wartość graniczna tego udziału, poniżej której wyboczenie ma charakter poprzeczny, a powyżej ścinający wynika z warunku przecięcia się krzywych (7.183) i (7.208). Otrzymujemy w ten sposób dość kłopotliwe do rozwiązania równanie algebraiczne. Uwzględniając, że  $G_m \ll E_f$ , bardzo dobrym przybliżeniem rozwiązania jest zależność

$$\bar{v}_f = 0.66 \sqrt[3]{\frac{G_m}{E_f}} \quad (7.209)$$

### Podsumowanie

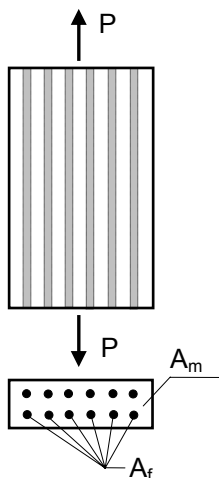
- ♦ wytrzymałość warstwy kompozytu włóknistego na ściskanie zdeterminowana jest naprężeniem krytycznym dla włókien przy ich wyboczeniu, które może być typu poprzecznego lub ścinającego,
- ♦ wytrzymałość na ściskanie przy wyboczeniu poprzecznym (w stanie wyboczonym włókna są symetryczne względem linii środkowej przebiegającej między nimi), zdeterminowana jest głównie ugięciem włókien,
- ♦ wytrzymałość na ściskanie przy wyboczeniu ścinającym (w stanie wyboczonym włókna są antysymetryczne względem linii środkowej), związana jest przede wszystkim ze ścinaniem matrycy,
- ♦ w zależności od typu wyboczenia, wytrzymałość na ściskanie  $X_c$  warstwy kompozytu określona jest związkami

$$X_c = \begin{cases} 2 \sqrt{\frac{v_f E_f E_m}{3(1-v_f)}} \left[ v_f + \frac{E_m}{E_f} (1-v_f) \right] & \text{dla } 0 \leq v_f \leq \bar{v}_f \\ \frac{G_m}{1-v_f} & \text{dla } \bar{v}_f \leq v_f \end{cases} \quad (7.210)$$

## 7.4. Przykłady

### ◆ Przykład 1

Próbka z kompozytu jednokierunkowego typu włókno szklane/epoksyd jest rozciągana siłą  $P$ . Łączną powierzchnię włókien, matrycy i powierzchnię całkowitą przekroju próbki oznaczono odpowiednio  $A_f$ ,  $A_m$ ,  $A$ . Moduł sprężystości włókien wynosi  $E_f = 75$  GPa, a matrycy  $E_m = 3$  GPa. Wyznaczyć naprężenie w matrycy i włóknach.



Przy rozwiązaniu tego przykładu wykorzystamy rozważania zawarte w pkt. 7.1.1. Naprężenia w kompozycie związane są z naprężeniami w matrycy i włóknach równaniem (7.10)

$$\sigma_k = \frac{P}{A} = v_m \sigma_m + v_f \sigma_f \quad (7.211)$$

gdzie  $v_m$ ,  $v_f$  oznaczają objętościowe udziały matrycy i włókien.

Korzystając z założenia (7.6) o jednakowych odkształceniach matrycy i włókien wywołanych przyłożonym obciążeniem rozciągającym oraz założenia o jednoosiowym stanie naprężenia w kompozycie - (7.12) - otrzymujemy równanie

$$\sigma_f = \frac{1}{k} \sigma_m \quad \text{gdzie} \quad k = \left( \frac{E_m}{E_f} \right) = 0.04 \quad (7.212)$$

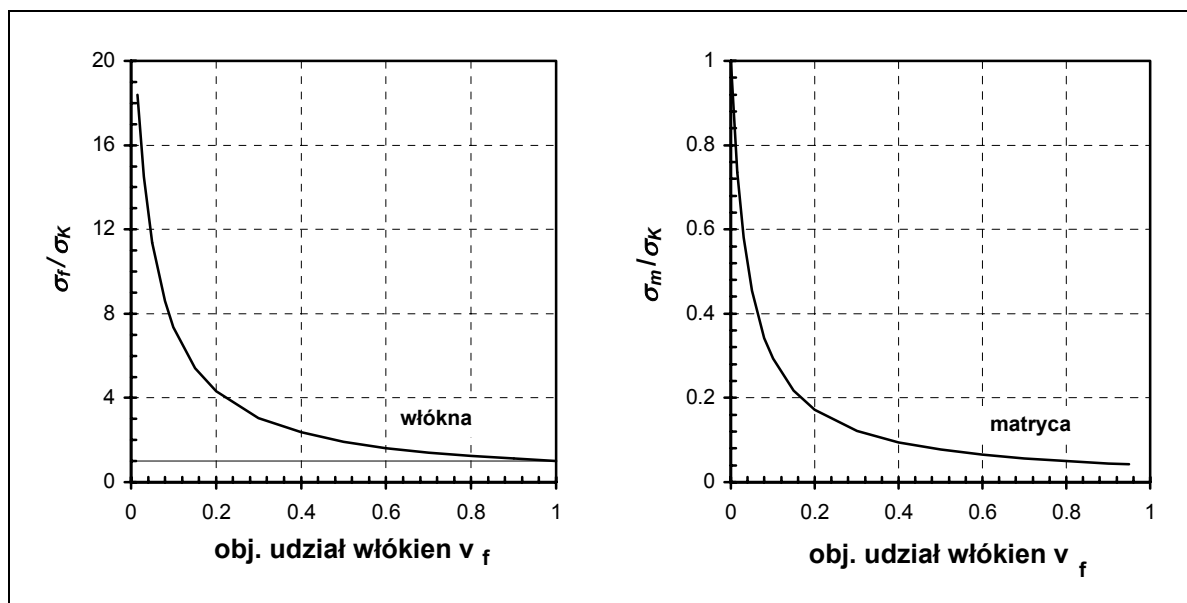
Ostatecznie z (7.211) i (7.212) otrzymujemy naprężenia w matrycy i włóknach w postaci

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_k} = \frac{1}{1 + 24 v_f} \quad (7.213)$$

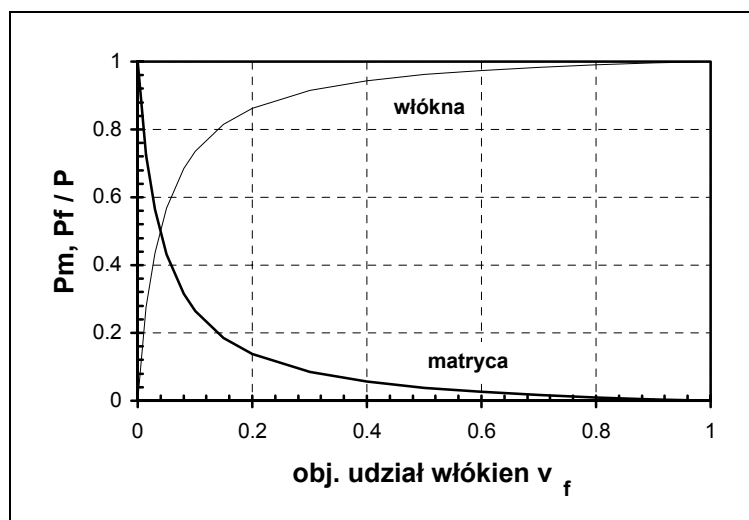
$$\frac{\sigma_f}{\sigma_k} = \frac{1}{0.04 + 0.96 v_f} \quad (7.214)$$

(7.212)

Wykresy zależności (7.213) i (7.214) przedstawiono na rys. 7.40. Na rys. 7.41 pokazano siłę przenoszoną przez włókna i matrycę jako ułamek siły rozciągającej próbkę w funkcji objętościowego udziału włókien. Widać z niego, że na włókna, już przy 10% ich udziale przypada blisko 75% siły zewnętrznej, a przy 30% - włókna przejmują powyżej 92% siły. W rzeczywistych kompozytach włókna stanowią ok. 60% objętości, tak więc w zasadzie całą siłę podłużną przenoszą wyłącznie włókna.



Rys. 7.40. Napężenie w włóknach i matrycy w funkcji objętościowego udziału włókien.



Rys. 7.41. Siła przenoszona przez matrycę i włókna w funkcji objętościowego udziału włókien.

#### ◆ Przykład 2

Określić stosunek wytrzymałości wiązki włókien do średniej wytrzymałości włókna w warstwie kompozytu zbrojonego włóknami grafitowymi. Parametr rozkładu wytrzymałości  $\alpha$  wynosi 7.68.

Wartość poszukiwanego stosunku wyznaczmy korzystając z równ. (7.156). Otrzymujemy stąd:

$$\frac{X_b}{X_f} = \frac{1}{(7.68e)^{1/7.68} \Gamma(1+1/7.68)} = \frac{0.673}{\Gamma(1.13)} = \frac{0.673}{0.939} = 0.717 \quad (7.215)$$

Wytrzymałość wiązki jest zatem o ok. 30 % mniejsza od wytrzymałości pojedynczego włókna.

#### ◆ Przykład 3

Warstwa kompozytu zbudowana jest z matrycy epoksydowej zbrojonej włóknami grafitowymi o długości  $L=25$  mm i średnicy  $D=7$   $\mu\text{m}$ . Średnia wytrzymałość włókna na rozciąganie  $X_f=2.80$  GPa, parametr rozkładu wytrzymałości  $\alpha=7.68$ , moduł sprężystości  $E_f=230$  GPa. Objętościowy udział włókien w kompozycie wynosi  $v_f=0.5$ . Wytrzymałość matrycy na rozciąganie  $X_m=50.0$  MPa, moduł sprężystości  $E_m=3.45$  GPa. Granica plastyczności na granicy połączenia włókna z matrycą ma wartość równą połowie wytrzymałości na rozciąganie  $S_m=25.0$  MPa. Wyznaczyć długość strefy

interakcji pękniętych włókien, statystyczną wytrzymałość kompozytu oraz wytrzymałość kompozytu przy założeniu równej wytrzymałości włókien.

Długość strefy interakcji pękniętych włókien wyznaczmy z rów. (7.160), skąd otrzymamy:

$$\delta = 2 \times 7 \times 10^{-3} \left( \frac{2.8 \times 10^3}{4 \times 25} \right)^{\frac{7.68}{7.68+1}} \left[ (7.68 + 1) \frac{25}{7 \times 10^{-3}} \right]^{\frac{1}{7.68+1}} = 0.879 \text{ mm} \quad (7.216)$$

Średnia wytrzymałość kompozytu wynika z rów. (7.159), z którego po wstawieniu wartości liczbowych występujących tam zmiennych otrzymamy:

$$X_t = \frac{1}{(7.68e)^{1/7.68} \Gamma(1.13)} \left( \frac{25}{0.879} \right)^{\frac{1}{7.68}} 0.5 \times 2.8 \times 10^3 + \frac{3.45}{230} 0.5 \times 2.8 \times 10^3 = 1573 \text{ MPa} \quad (7.217)$$

Uwzględniając warunek, jaki spełniają wytrzymałości i moduły sprężystości matrycy i włókien, a mianowicie :

$$\frac{E_m}{E_f} = 0.015 \quad ; \quad \frac{X_m}{X_f} = 0.0179 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_m}{E_f} < \frac{X_m}{X_f} \quad (7.218)$$

wytrzymałość kompozytu przy założeniu równej wytrzymałości włókien (zauważmy, że z danych podanych w temacie wynikało, iż rozrzut w wytrzymałości pojedynczego włókna wynosił  $\gamma = 1.2 / \alpha \times 100 \% = 15.6 \%$ ) obliczymy z rów. (7.139) - otrzymamy z niego:

$$X_t = 2.8 \times 10^3 [0.5 + (3.45 / 230) 0.5] = 1421 \text{ MPa} \quad (7.219)$$

Wartość wytrzymałości kompozytu otrzymana z podejścia statystycznego jest w tym przypadku większa o ok. 10 % od wytrzymałości wynikającej z zasady mieszanin.