

ROZDZIAŁ 6

ROZDZIAŁ 6

WYTRZYMAŁOŚĆ KOMPOZYTÓW WARSTWOWYCH

Zagadnienia wytrzymałościowe w przypadku materiałów kompozytowych, a mówiąc ściślej włóknistych kompozytów warstwowych (np. laminaty zbrojone włóknami) należy rozpatrywać na trzech poziomach obserwacji, wynikających z ich budowy.

Najniższy poziom obserwacji to poziom mikroskopowy (można też nazwać go materiałowym), na którym rozróżniamy składniki tworzące kompozyt tzn. włókna i matrycę. Ich własności wytrzymałościowe decydują bezpośrednio o cechach wytrzymałościowych warstwy kompozytowej. Temu zagadnieniu, wymagającemu odmiennego podejścia od tego stosowanego w dotychczasowych rozważaniach poświęcony jest pkt. 7.3, rozdziału 7.

Kolejny poziom obserwacji to poziom warstwy, rozumianej jako podstawowy "budulec" kompozytu warstwowego, ale jednocześnie będącej już elementem zdolnym do samodzielnego przenoszenia obciążenia. Pojawia się zatem problem określenia jej nośności, czyli wartości obciążenia, jakie jest ona w stanie bezpiecznie przenieść.

I wreszcie najwyższy poziom analizy wytrzymałościowej to poziom laminatu jako zbioru warstw, których własności i sposób ułożenia decydują bezpośrednio o nośności kompozytu.

Z praktycznego punktu widzenia najbardziej istotny jest ten ostatni przypadek, gdyż zadaniem konstruktora jest zaprojektowanie do określonego celu odpowiedniego laminatu z warstw, rzadko natomiast zajmuje się on doбором składu samej warstwy, co jest domeną inżynierii materiałowej i technologii i w zasadzie jest zadaniem dla producentów materiałów kompozytowych.

W tym rozdziale przedstawione będą podstawowe koncepcje odnoszące się do analizy wytrzymałościowej warstwy, a następnie na tej podstawie omówione będą podstawowe zagadnienia dotyczące wytrzymałości laminatów warstwowych.

6.1. Nośność warstwy ortotropowej, jednokierunkowo zbrojonej

Określenie nośności warstwy ortotropowej jednokierunkowo zbrojonej (kompozytu jednokierunkowego) jest pojęciowo znacznie bardziej złożone niż dla materiału izotropowego. W tym ostatnim, powszechnie używanymi narzędziami są różnorakie hipotezy wyężeniowe, z których większość zdefiniowana jest poprzez naprężenia lub odkształcenia główne, bądź ich niezmienniki. W tle takiego podejścia stoi zawsze współosiowość tensorów naprężenia i odkształcenia. W przypadku materiałów anizotropowych, a w szczególności ortotropowych takie podejście jest bezużyteczne, gdyż kierunki główne obu tensorów są różne. Innym ważnym czynnikiem różniącym pod względem analizy wytrzymałościowej materiały anizotropowe od izotropowych jest, że w tych ostatnich w celu określenia stanów bezpiecznych w oparciu o większość kryteriów wyężeniowych, wystarczy znać wartość pewnej umownej granicy niebezpiecznej naprężeń, wyznaczanej z testu jednoosiowego rozciągania. W przeciwieństwie do tego w przypadku np. warstwy kompozytowej jednokierunkowo zbrojonej włóknami, granice niebezpieczne naprężeń przy rozciąganiu wzdłuż kierunku włókien i w kierunku do nich prostopadłym są zasadniczo różne. Podobna sytuacja ma miejsce dla ściskania. Dochodzi do tego jeszcze granica naprężeń niebezpiecznych przy ścinaniu. Tak więc w miejsce jednej granicy niebezpiecznej, jak w przypadku materiałów izotropowych, mamy pięć różnych charakterystyk wytrzymałościowych, a mianowicie

- ♦ $X_t (\sigma_{Lt})$ - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku włókien (*ang. longitudinal tensile strength*),

- ◆ X_c (σ_{Lc}) - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku włókien (*ang. longitudinal compressive strength*),
- ◆ Y_t (σ_{Tt}) - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku poprzecznym do włókien (*ang. transverse tensile strength*),
- ◆ Y_c (σ_{Tc}) - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku poprzecznym do włókien (*ang. transverse compressive strength*),
- ◆ S (τ_{LT}) - wytrzymałość warstwy na ścinanie w płaszczyźnie głównych osi materiałowych (1,2) (*ang. longitudinal shear strength* lub krótko *shear strength*)

Powyżej podano podwójną symbolikę stosowaną przez różnych autorów. W niniejszym skrypcie stosowane będą pierwsze oznaczenia.

Można również podawać jako charakterystyki wytrzymałościowe zamiast naprężeń granicznych odkształcenia graniczne (niszczące) (*ang. ultimate strains*) ε_{Lt} , ε_{Lc} , ε_{Tt} , ε_{Tc} , γ_{LT} , których określenia wynikają wprost z tych dla naprężeń granicznych.

Wartości naprężeń i odkształceń granicznych dla niektórych kompozytów podane są w tabeli 6.1.

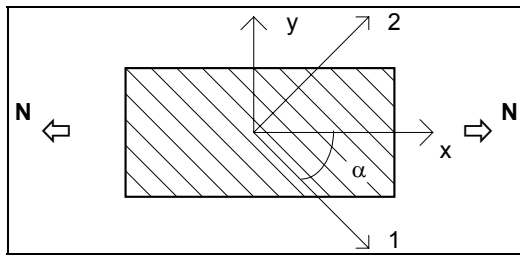
Niezależnie od typu kompozytu jednokierunkowego, widoczne jest, że jego wytrzymałości poprzeczne (w kierunku poprzecznym do włókien) są wielokrotnie mniejsze od wytrzymałości podłużnych (w kierunku włókien). Wynika to wprost z charakterystyk wytrzymałościowych składników kompozytu, tzn. włókien i matrycy (patrz - rozdz.1, tab. 1.1, 1.3) oraz ich roli w kompozycie. W przenoszeniu obciążenia podłużnego podstawową rolę pełnią włókna, a te mają w porównaniu z matrycą wytrzymałość na rozciąganie o 2 rzędy wielkości większą, co bezpośrednio rzutuje na podłużną wytrzymałość kompozytu. Z kolei w kierunku poprzecznym podstawowe znaczenie dla zachowania się kompozytu ma matryca, charakteryzująca się niską wytrzymałością. Tak więc i kompozyt w kierunku poprzecznym musi być mało wytrzymały. Analogiczny wniosek można wysnuć w stosunku do wytrzymałości na ścinanie, również wielokrotnie mniejszej od podłużnej, gdyż przy obciążeniu ścinającym główną rolę także odgrywa matryca.

KOMPOZYT		WYTRZYMAŁOŚĆ [MPa]					ODKSZTAŁCENIA NISZCZĄCE [%]				
MATERIAŁ	v_f	X_t	X_c	Y_t	Y_c	S	ε_{Lt}	ε_{Lc}	ε_{Tt}	ε_{Tc}	γ_{LT}
T300/5208 (włókna węglowe / epoksyd)	0.70	1500	1500	40	246	68	1.24	1.23	0.39	2.41	1.42
Scotch ply 1002 (wł. szklane E / epoksyd)	0.45	1062	610	31	118	72	2.36	1.36	0.26	0.98	1.31
boron / epoksyd	0.50	1260	2500	61	202	67	0.60	1.19	0.32	1.06	1.40
kevlar 49 / epoksyd	0.60	1400	235	12	53	34	1.84	0.31	0.22	0.96	1.62

Tabela 6.1. Charakterystyki wytrzymałościowe dla kompozytów jednokierunkowych

Kluczowym pytaniem w analizie wytrzymałościowej kompozytu jednokierunkowo zbrojonego (warstwy lub zbioru warstw jednakowo zorientowanych) jest pytanie - jak w oparciu o podanych pięć charakterystyk wytrzymałościowych określić nośność warstwy, w której występuje wieloosiowy stan naprężenia w układzie współrzędnych określonym przez główne osie materiałowe. Podkreśmy to wyraźnie - w analizie wytrzymałościowej jest nim zawsze właśnie układ osi głównych, co wiąże się wprost ze znajomością charakterystyk wytrzymałościowych wyłącznie w tym układzie.

Zwróćmy uwagę na to, że wieloosiowość stanu naprężenia nie musi być w przypadku warstwy ortotropowej wywołana działaniem obciążenia złożonego. Wystarczy, aby jej obciążenie stanowiło np. obciążenie jednokierunkowe, ale działające wzdłuż kierunku nie pokrywającego się z żadną z głównych osi materiałowych. Pokazano to na rys. 6.1.



Rys. 6.1

W ukł. (x, y) jedyną niezerową składową tensora naprężenia jest oczywiście σ_x , ale przechodząc do ukł. głównych osi materiałowych $(1, 2)$ poprzez ujemną transformację tensora naprężenia otrzymamy tensor, którego wszystkie trzy składowe są niezerowe, a ich wartości zależą od kąta α . Nie wnikając w kryteria wytrzymałościowe dla złożonych stanów naprężenia, nie trudno sobie wyobrazić, że przy tym samym co do wartości obciążeniu, dla pewnych kątów α warstwa może ulec zniszczeniu, a dla innych nie. Tak więc należy podkreślić, iż wytrzymałość warstwy zależy od orientacji naprężeń w niej występujących (czy też orientacji obciążenia). Jest to efekt, który nie występuje w materiałach izotropowych.

Wróćmy do zasadniczego problemu tzn. kryteriów wytrzymałościowych dla wieloosiowego stanu naprężenia w warstwie. Podobnie jak w przypadku znanych z analizy materiałów izotropowych hipotez wyężeniowych, tak i w przypadku kompozytów żadne z nich nie ma uzasadnienia teoretycznego. Wszystkie wynikają z obserwacji doświadczalnych i jako takie mogą być nazwane kryteriami empirycznymi. Biorąc pod uwagę różnorodność materiałów kompozytowych i wręcz nieograniczoną swobodę w doborze ich konfiguracji trudno oczekiwać uniwersalności tych kryteriów i precyzji wyników uzyskiwanych na ich podstawie w każdym przypadku. Podobne zastrzeżenie można jednak zgłosić także i pod adresem hipotez wyężeniowych dla izotropii, a przecież są one powszechnie stosowane i akceptowane.

Podstawowe kryteria wytrzymałościowe (zwane czasami kryteriami dwuosiowymi, ze względu na to, że dotyczą stanów dwuosiowych naprężenia) w kolejności odpowiadającej częstotliwości ich stosowania w projektowaniu (klasyfikacja ta pokrywa się z podziałem wedle prostoty kryterium) to :

- ◆ **kryterium maksymalnego naprężenia,**
- ◆ **kryterium maksymalnego odkształcenia,**
- ◆ **kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a,**
- ◆ **kryterium Tsai'a - Wu.**

Wszystkie te kryteria, jakkolwiek różne, mają tę cechę wspólną, że są kryteriami "makroskopowymi", nie uwzględniającymi żadnych mechanizmów mikrouszkodzeń wewnątrz kompozytu, tak więc poziomem obserwacji przez nie wykorzystywanym jest warstwa, a nie jej składniki i ich możliwe różnorodne uszkodzenia prowadzące do zniszczenia warstwy.

W dalszej części rozdziału przedstawione będą wymienione kryteria. Porównanie wyników uzyskanych na ich podstawie czytelnik znajdzie w pkt. 6.3 "Przykłady", przykł. 1.

6.1.1. Kryterium naprężenia maksymalnego

Kryterium naprężenia maksymalnego mówi, że warunkiem stanu bezpiecznego kompozytu jednokierunkowego jest, aby naprężenia normalne σ_1 i σ_2 oraz naprężenie styczne σ_6 nie przekraczały wartości wytrzymałości odpowiadających ich kierunkom. Formalny zapis tego kryterium ma zatem postać

$$-X_c \leq \sigma_1 \leq X_t \quad (6.1)$$

$$-Y_c \leq \sigma_2 \leq Y_t \quad (6.2)$$

$$|\sigma_6| \leq S \quad (6.3)$$

W wypadku, gdy którykolwiek z warunków (6.1) - (6.3) nie jest spełniony to w myśl kryterium naprężenia maksymalnego uważa się, że materiał ulega zniszczeniu w wyniku mechanizmu

zniszczenia związanego z naprężeniami normalnymi lub stycznymi. Tak więc pozwala ono na identyfikację sposobu zniszczenia kompozytu. Jego wadą jest natomiast to, że nie uwzględnia ono sprzężenia między tymi mechanizmami. W istocie zatem powinno się mówić o trzech oddzielnych i nie związanych ze sobą sub-kryteriach.

Krytyczny czytelnik zauważy z pewnością, że "filozofia" kryterium maksymalnego naprężenia ma swe źródło w znanej z analizy wytrzymałościowej materiałów izotropowych hipotezie Galileusza - maksymalnych naprężeń głównych.

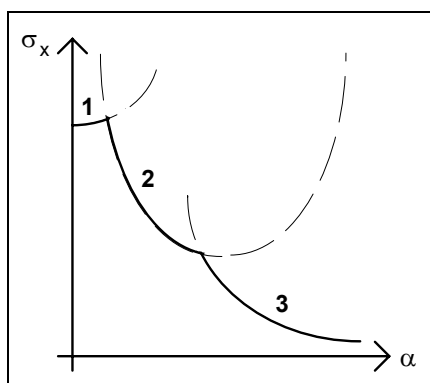
W celu ilustracji omawianego kryterium przeanalizujemy przypadek obciążenia w postaci jednoosiowego rozciągania pokazany na rys. 6.1. Obciążenie to w ukł. (x, y) wywołuje stan naprężenia o jedynej składowej niezerowej σ_x . Wykorzystując ujemną transformację tensora naprężenia do ukł. (1, 2) (równanie (3.4)) otrzymujemy tensor w postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \sigma_x \sin^2 \alpha \\ -\sigma_x \cos \alpha \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Stosując kryterium naprężenia maksymalnego (6.1), (6.2) i (6.3) otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} \sigma_x &< \frac{X_t}{\cos^2 \alpha} \\ \sigma_x &< \frac{Y_t}{\sin^2 \alpha} \\ \sigma_x &< \frac{S}{\cos \alpha \sin \alpha} \end{aligned} \quad (6.5)$$

W układzie współrzędnych (σ_x , α) otrzymujemy zatem trzy krzywe. Wytrzymałość dla analizowanego obciążenia otrzymujemy jako linię powstałą z części tych krzywych. Pokazano to schematycznie na rys. 6.2. Krzywa oznaczona na rys. 6.2. jako "1" odpowiada zniszczeniu wskutek przekroczenia wytrzymałości na rozciąganie podłużne X_t , krzywa "2" - zniszczeniu w wyniku przekroczenia wytrzymałości na ścinanie S, zaś krzywa "3" - wytrzymałości na rozciąganie poprzeczne Y_t .



Rys. 6.2. Schematyczny obraz kryterium naprężenia maksymalnego.

Dane doświadczalne w wielu wypadkach odbiegają od przewidywań teoretycznych wynikających z omawianego kryterium, szczególnie dla kompozytów typu włókno szklane/epoksyd. Niezależnie od rodzaju kompozytu nie obserwuje się wzrostu wytrzymałości kompozytu w stosunku do wytrzymałości na rozciąganie podłużne X_t dla małych kątów α , na co wskazywałaby krzywa "1", jak również punktów nieciągłości na krzywej (σ_x , α), widocznych na rys. 6.2.

6.1.2. Kryterium odkształcenia maksymalnego

Kryterium odkształcenia maksymalnego jest koncepcyjnie bardzo zbliżone do kryterium naprężenia maksymalnego. Różnica między nimi polega jedynie na tym, że warunki graniczne nałożone są nie na naprężenia, jak w przypadku tego ostatniego, ale na odkształcenia. Mają one następujące postaci

$$-\varepsilon_{Lc} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{Lt} \quad (6.6)$$

$$-\varepsilon_{Tc} \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{Tt} \quad (6.7)$$

$$|\varepsilon_6| \leq \gamma_{LT} \quad (6.8)$$

Odształcenia wykorzystywane w tym kryterium muszą być wyrażone w układzie głównych osi materiałowych.

Graniczne wartości odkształceń, w przypadku liniowej teorii sprężystości mogą być wyznaczone z odpowiadających im naprężeniowych charakterystyk wytrzymałościowych ze związków

$$\varepsilon_{Lt} = \frac{X_t}{E_1} \quad \varepsilon_{Lc} = \frac{X_c}{E_1} \quad (6.9)$$

$$\varepsilon_{Tt} = \frac{Y_t}{E_2} \quad \varepsilon_{Tc} = \frac{Y_c}{E_2} \quad (6.10)$$

$$\gamma_{LT} = \frac{S}{G_{12}} \quad (6.11)$$

Wartości odkształceń granicznych można też wziąć bezpośrednio z badań doświadczalnych.

Dla zilustrowania kryterium odkształcenia maksymalnego posłużymy się tym samym przykładem co poprzednio. Odształcenia w osiach materiałowych wyznaczamy ze związku fizycznego dla konfiguracji osiowej (rów. (2.18)) w postaci

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1) \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{G_{12}} \sigma_6 \quad (6.14)$$

Wstawiając naprężenia σ_1 , σ_2 i σ_6 z rów. (6.4) - kryteria (6.6), (6.7) i (6.8), po wykorzystaniu związków (6.9) - (6.11) dają odpowiednio

$$\sigma_x < \frac{X_t}{\cos^2 \alpha - \nu_{12} \sin^2 \alpha}$$

$$\sigma_x < \frac{Y_t}{\sin^2 \alpha - \nu_{21} \cos^2 \alpha} \quad (6.15)$$

$$\sigma_x < \frac{S}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

Krzywa wytrzymałości kompozytu w ukl. (σ_x, α) składa się, podobnie jak to miało miejsce w kryterium naprężenia maksymalnego, z trzech linii określonych związkami (6.15). Wszystkie wady i zalety kryterium naprężeniowego odnoszą się w równym stopniu do kryterium odkształcenia maksymalnego.

Bez trudu także można wskazać jego "protoplastę" wśród izotropowych hipotez wyężeniowych, a mianowicie hipotezę de Saint-Venanta - maksymalnych odkształceń głównych.

6.1.3. Kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a

Kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a (A-T-H) należy do grupy kryteriów empirycznych uwzględniających sprzężenie między różnymi mechanizmami zniszczenia kompozytu, wyrażone w postaci jawnej poprzez zależność kryterium wytrzymałościowego od wszystkich składowych stanu naprężenia.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego został uogólniony na materiały ortotropowe przez Hill'a w 1950 roku. Uogólnienie to ma postać

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1 \quad (6.16)$$

Warunek plastyczności został jednocześnie uznany za kryterium wytrzymałościowe dla kompozytu, tak więc *de facto* zakłada się, że o wytrzymałości kompozytu decyduje osiągnięcie granicznego stanu liniowo sprężystego. Parametry F, G, H, L, M, N , związane z plastycznym zachowaniem kompozytu zostały zastąpione standardowymi charakterystykami wytrzymałościowymi X, Y, S , bez uwzględnienia różnic w ich wartościach dla rozciągania i ściskania.

Rozpatrując jednoosiowe przypadki stanu naprężenia -Tsai uzyskał związki między parametrami F, G, H, L, M, N i charakterystykami wytrzymałościowymi X, Y, S . Rozumowanie Tsai'a przedstawiono poniżej

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_1 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_1=X$, z (6.16) wynika zależność

$$G + H = 1/X^2 \quad (6.17)$$

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_2 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_2=Y$, z (6.16) wynika zależność

$$F + H = 1/Y^2 \quad (6.18)$$

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_3 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_3=Z$, z (6.16) wynika zależność

$$F + G = 1/Z^2 \quad (6.19)$$

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_6 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_6=S$, z (6.16) wynika zależność

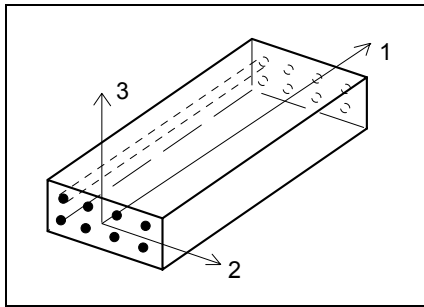
$$2N = 1/S^2 \quad (6.20)$$

Rozwiązując układ równań (6.17) - (6.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2F &= -\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \\ 2G &= \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \\ 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \end{aligned} \quad (6.21)$$

W warunkach płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie (1, 2) kompozytu - rys. 6.3 - zachodzą warunki

$$\tau_{13} = \tau_{23} = \sigma_3 = 0 \quad (6.22)$$



Rys. 6.3.

Z symetrii własności mechanicznych kompozytu w płaszczyźnie jego przekroju poprzecznego (2, 3) (płaszczyzna poprzecznie izotropowa) wynika, że wytrzymałości w kierunku osi 2 i 3 muszą być takie same, tzn.

$$Y = Z \quad (6.23)$$

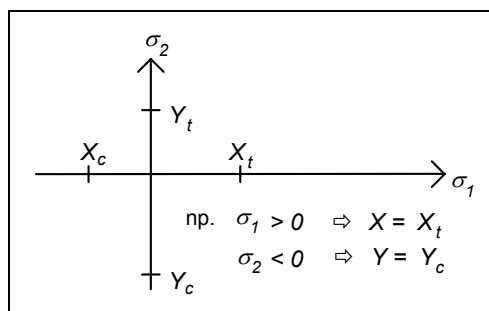
Kryterium (6.16) po wykorzystaniu związków (6.20) i (6.21) oraz zależności (6.23), przyjmuje dla płaskiego stanu naprężenia postać

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (6.24)$$

Azzi i Tsai wykazali, że kryterium w postaci (6.24) zachowuje ważność również wówczas, gdy materiał kompozytowy ma różne charakterystyki wytrzymałościowe na rozciąganie i ściskanie. Modyfikacja kryterium polega wówczas na wstawieniu w miejsce X i (lub) Y - w zależności od znaku naprężeń σ_1, σ_2 - wartości wytrzymałości na rozciąganie X_t, Y_t lub na ściskanie X_c, Y_c . Sposób wyboru odpowiedniej charakterystyki wytrzymałościowej w zależności od znaku naprężeń normalnych pokazany jest na rys. 6.4. Kryterium, z tak pomyślanymi modyfikacjami nazywane jest w literaturze kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a, bądź Tsai'a - Hill'a.

W celu ilustracji tego kryterium, posłużymy się ponownie przykładem kompozytu obciążonego nie osiowo, analizowanym przy dwu poprzednich kryteriach. Wstawiając do kryterium A-T-H naprężenia określone przez (6.4), otrzymamy równanie linii, określającej wytrzymałość σ_x w zależności od kąta α , pod jakim działa obciążenie. Ma ono postać

$$\sigma_x = \left[\frac{\cos^4 \alpha}{X_t^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X_t^2} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{Y_t^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (6.25)$$



Rys. 6.4. Sposób wyboru charakterystyk wytrzymałościowych w kryterium Azzi'ego-Tsai'a-Hill'a w zależności od znaku naprężeń normalnych.

Przewaga kryterium A-T-H nad kryteriami naprężenia i odkształcenia maksymalnego przejawia się tym, że :

- ◆ pozostaje w lepszej zgodności z wynikami doświadczalnymi,
- ◆ uwzględnia interakcję składowych stanu naprężenia,
- ◆ jego obrazem jest jedna gładka krzywa, a nie trójodcinkowa krzywa z punktami nieciągłości.

6.1.4. Kryterium Tsai'a - Wu.

U podstaw tego kryterium leżało dążenie do jak najlepszego dopasowania teoretycznych krzywych zniszczenia do wyników doświadczalnych. Jest to więc kolejne kryterium empiryczne. Tsai i Wu zaproponowali w 1971 roku nowe charakterystyki wytrzymałościowe związane głównie ze współzależnościami naprężeń w wieloosiowych stanach naprężenia w formie tzw. tensorów wytrzymałości - rzędu II F_{ij} i rzędu IV F_{ijkl} .

W notacji zwężonej (zapis Voigta) kryterium Tsai'a-Wu opisujące powierzchnię zniszczenia w przestrzeni naprężeń ma postać

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (6.26)$$

W płaskim stanie naprężenia w kompozycie ortotropowym (6.26) redukuje się do postaci

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (6.27)$$

W przypadku płaskim wszystkie występujące w (6.27) elementy tensorów wytrzymałości, z wyjątkiem F_{12} , można wyznaczyć w próbach jednoosiowego rozciągania i ściskania oraz próbie ścinania.

◆ Jednoosiowe rozciąganie i ściskanie w kierunku osi 1

Wytrzymałość kompozytu na rozciąganie podłużne wynosi X_t , zaś na ściskanie X_c . W stanie granicznym, z rów. (6.27) otrzymujemy dla rozciągania i ściskania odpowiednio^{*})

$$F_1 X_t + F_{11} X_t^2 = 1 \quad (6.28)$$

$$F_1 (-X_c) + F_{11} (-X_c)^2 = 1 \quad (6.29)$$

W wyniku rozwiązania układu równań (6.28), (6.29) otrzymujemy F_1 i F_{11} w postaci

$$F_{11} = \frac{1}{X_c X_t} \quad F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad (6.30)$$

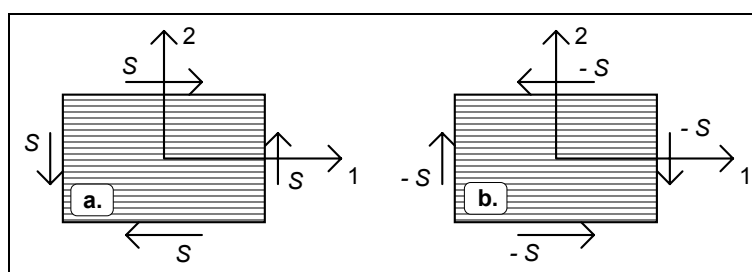
◆ Jednoosiowe rozciąganie i ściskanie w kierunku osi 2

Procedura odnosząca się do rozciągania i ściskania w kierunku poprzecznym do włókien, w pełni analogiczna do tej przedstawionej powyżej, prowadzi do następujących postaci składowych F_2 i F_{22} ^{*})

$$F_{22} = \frac{1}{Y_c Y_t} \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \quad (6.31)$$

◆ Ścinanie w płaszczyźnie (1, 2)

Wytrzymałość na ścinanie w głównych osiach materiałowych (1, 2) nie zależy od zwrotu naprężeń ścinających. Bez względu na to czy działają one tak, jak pokazano na rys. 6.5a, czy na rys. 6.5b zniszczenie kompozytu nastąpi przy tej samej wielkości naprężeń ścinających, których graniczna wartość wynosi S .



Rys. 6.5. Naprężenia ścinające w osiach materiałowych kompozytu.

^{*})W części literatury człony zawierające wytrzymałość na ściskanie X_c , Y_c występują z przeciwnymi znakami. Wynika to stąd, że X_c i Y_c jako graniczne wartości naprężeń ściskających uważane są za liczby ujemne. W tym skrypcie X_c i Y_c uważa się za dodatnie stałe materiałowe. Chcąc zatem uwzględnić to, że odpowiadają one ujemnym naprężeniom ściskającym, poprzedzone są w odpowiednich równaniach znakiem "-".

Konsekwencją tego faktu jest, że muszą zachodzić następujące związki, wynikające z (6.27)

$$F_6 S + F_{66} S^2 = 1 \quad (6.32)$$

$$F_6 (-S) + F_{66} (-S)^2 = 1 \quad (6.33)$$

Układ równań (6.32), (6.33) spełniony jest wówczas, gdy składowe F_6 i F_{66} tensorów wytrzymałości wynoszą

$$F_{66} = 1/S^2 \quad F_6 = 0 \quad (6.34)$$

Wykazaliśmy zatem, że składowe F_1 , F_2 , F_{11} , F_{22} i F_{66} wyrażają się poprzez standardowe charakterystyki wytrzymałościowe, a F_6 musi się zerować. Do pełnego opisu tensorów wytrzymałości brakuje jedynie składowej F_{12} . Związana jest ona z interakcją naprężeń normalnych σ_1 i σ_2 . Jej wyznaczenie możliwe jest w zasadzie jedynie w teście dwuosiowym, o programie obciążenia np. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Dla takiego obciążenia kryterium Tsai'a-Wu przyjmuje postać

$$(F_1 + F_2) \sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12}) \sigma^2 = 1 \quad (6.35)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} - \frac{(F_1 + F_2)}{\sigma} - (F_{11} + F_{22}) \right] \quad (6.36)$$

Widać zatem, że do wyznaczenia składowej F_{12} nie wystarcza znajomość standardowych charakterystyk wytrzymałościowych, ale należy dodatkowo określić doświadczalnie wartość obciążenia σ , przy którym kompozyt ulega zniszczeniu.

W przypadku braku danych doświadczalnych dotyczących składowej F_{12} , można skorzystać z następującego równania

$$F_{12} = -\sqrt{F_{11} F_{22}} / 2 \quad (6.37)$$

W przypadku kompozytu obciążonego jednokierunkowym obciążeniem nieosiowym (przykład ten analizowany był we wszystkich przedstawionych dotąd kryteriach wytrzymałościowych), kryterium Tsai'a-Wu przybiera postać

$$\sigma_x (F_1 \cos^2 \alpha + F_2 \sin^2 \alpha) + \sigma_x^2 [F_{11} \cos^4 \alpha + F_{22} \sin^4 \alpha + (F_{66} + 2F_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] = 1 \quad (6.38)$$

Równanie (6.38) będzie wykorzystane w przykładzie 1 w pkt. 6.3 - "Przykłady".

6.2. Wytrzymałość warstwowych laminatów kompozytowych

W pkt. 6.1 omówione zostały kryteria wytrzymałościowe dla warstwy kompozytowej jednokierunkowo zbrojonej włóknami. Podano także parametry wytrzymałościowe dla warstwy - naprężeniowe i odkształceniowe charakterystyki wytrzymałościowe oraz tensory wytrzymałości. Procedura określenia nośności tzn. obciążenia zewnętrznego jakie jest w stanie przenieść warstwa jest w tym przypadku jasna i może być przedstawiona w następujący sposób :

- ◆ wyznaczyć składowe stanu naprężenia i odkształcenia (w przypadku kryterium odkształcenia maksymalnego) w funkcji obciążenia zewnętrznego,
- ◆ wstawić wyznaczone składowe do jednego z kryteriów wytrzymałościowych i określić poszukiwaną nośność.

W przypadku laminatu, a więc zbioru warstw, które mogą różnić się między sobą zarówno parametrami geometrycznymi jak i materiałowymi sytuacja jest znacznie bardziej złożona. Różnorodność materiałów kompozytowych, mnogość różnych mechanizmów ich zniszczenia, wzajemne powiązania między nimi, trudności z doświadczalną weryfikacją kryteriów wytrzymałościowych (duże rozrzuty wyników, brak ujednoczonych procedur badawczych, nieodpowiednie niekiedy techniki eksperymentalne) sprawiają, że w chwili obecnej nie istnieje uniwersalna teoria wytrzymałościowa dla laminatów. Mówiąc inaczej - nie sposób jest określić ich wytrzymałość przyjmując jako poziom obserwacji laminat jako całość. Konieczne jest zejście na

poziom poszczególnych warstw i dopiero w oparciu o ich własności wytrzymałościowe zbudować algorytm analizy wytrzymałościowej odnoszący się do laminatu. To sprawia, że istnieje w tym zakresie pewna dowolność, której odzwierciedleniem jest istnienie różnych metod wyznaczania wytrzymałości laminatów. Analizę komplikuje także fakt, że wszystkie kryteria dotyczące warstwy bazują na wytrzymałościach określonych w jej głównych osiach materiałowych. W analizie laminatu stosuje się natomiast dowolnie przyjęty globalny układ odniesienia. Nieograniczone możliwości orientacji poszczególnych warstw względem tego układu, powodują że z reguły mamy do czynienia z wielością układów współrzędnych, co może prowadzić do pewnych komplikacji obliczeniowych.

O wytrzymałości laminatu decydują następujące czynniki

- 1) charakterystyki wytrzymałościowe warstwy,
- 2) charakterystyki sztywnościowe warstwy
- 3) charakterystyki temperaturowe (współczynniki rozszerzalności cieplnej) warstwy,
- 4) sekwencja ułożenia warstw,
- 5) grubości warstw.

Znaczenie pierwszego z nich jest oczywiste i nie wymaga komentarza. Czynniki 2), 4) i 5) decydują o postaciach macierzy sztywności i podatności laminatu, niezbędnych do określenia naprężeń i odkształceń warstwowych w laminacie. Te z kolei są konieczne przy określaniu wytrzymałości poszczególnych warstw, a w dalszej kolejności również i laminatu.

Osobnego komentarza wymaga czynnik 3). W rozdziale 1, omawiając skrótowo proces laminacji na przykładzie laminatu wykonanego z taśmy "pre-preg" podano m.in. temperaturę laminacji, która wynosiła $\sim 120^{\circ}\text{C}$. Temperatura pracy laminatu z reguły różni się od temperatury laminacji. Wynikająca stąd różnica temperatur jest źródłem powstawania naprężeń reszkowych (*ang. residual stresses*), które mają wpływ na wytrzymałość laminatu i powinny być uwzględniane w jego całościowej analizie wytrzymałościowej, choć niewątpliwie ją komplikują.

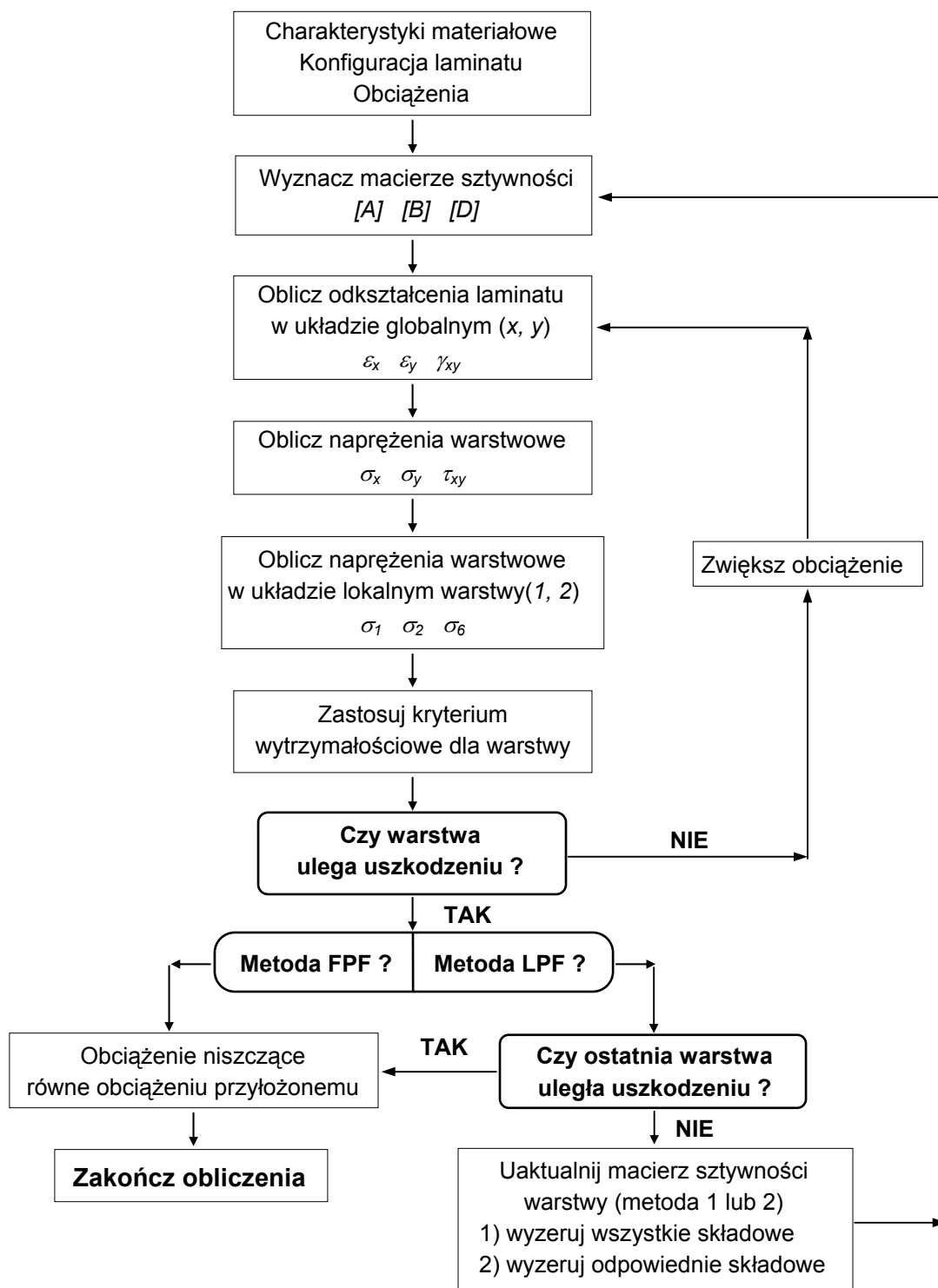
Wspomniano już wcześniej, że u podstaw wyznaczania wytrzymałości laminatu leży analiza wytrzymałości tworzących go warstw, a uściślając to stwierdzenie - analiza naprężeń i odkształceń warstwowych, które wyznacza się z zależności wynikających z klasycznej teorii laminacji, przedstawionej w rozdziale 4. Stosując w odniesieniu do każdej z warstw wybrane kryterium wytrzymałościowe można określić wytrzymałość każdej z nich, a tym samym znaleźć warstwę, która ulegnie zniszczeniu (wedle przyjętego kryterium) jako pierwsza. Można zatem wyznaczyć także obciążenie, przy którym nastąpi zniszczenie tej warstwy. Nosi ono nazwę obciążenia niszczącego pierwszą warstwę (w literaturze anglosaskiej ogólnie przyjętym określeniem jest **First Ply Failure load**, przy czym używa się skrótu tego określenia - **FPF**. Choć można by się pokusić o polski odpowiednik tego określenia, będziemy tu używać skrótu angielskiego).

Z reguły zniszczenie pierwszej warstwy nie oznacza wyczerpania nośności laminatu. W większości przypadków może on nadal bezpiecznie przenosić obciążenie, czasem znacznie większe niż obciążenie odpowiadające FPF. Zazwyczaj jest tak, że zniszczeniu ulegają kolejne warstwy, a laminat jako całość nadal może przejmować zwiększone obciążenie i dopiero zniszczenie ostatniej warstwy jest równoznaczne z wyczerpaniem jego nośności. Obciążenie, przy którym to następuje nosi nazwę obciążenia niszczącego ostatnią warstwę (w literaturze anglosaskiej ogólnie przyjętym określeniem jest **Last Ply Failure load**, przy czym używa się skrótu tego określenia - **LPF**. Również my będziemy używać skrótu angielskiego, rezygnując z poszukiwania polskiego odpowiednika).

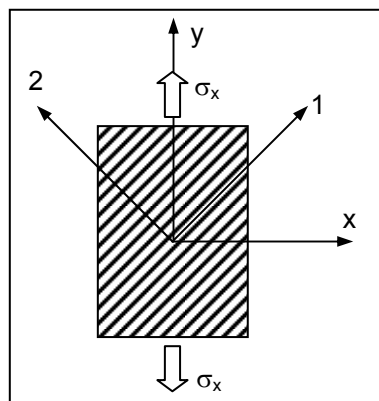
W analizie wytrzymałościowej laminatu bazującej na koncepcji LPF musi być rozpatrywane zachowanie wszystkich warstw, prowadzące do wykluczania z laminatu kolejno niszczących się warstw. Tak więc mamy tu do czynienia z zadaniem, w którym konieczne jest wielokrotne jego "redefiniowanie". Stosowane są dwa podejścia do uwzględniania wpływu zniszczonej warstwy na własności wytrzymałościowe laminatu. Pierwsze z nich polega na całkowitym wykluczeniu zniszczonej warstwy z laminatu, tzn. przyjęciu, że wszystkie jej sztywności są zerowe (w literaturze ang. podejście to nosi nazwę *total ply discount approach*). Drugie podejście, obliczeniowo bardziej pracochłonne, uwzględnia mechanizm, zgodnie z którym następuje zniszczenie danej warstwy i wyklucza się jedynie te spośród jej charakterystyk sztywnościowych, które związane są z danym mechanizmem. Takie podejście sprowadza się zatem do częściowego wykluczenia warstwy uszkodzonej z dalszej analizy (*ang. partial ply discount approach*). Jeżeli mechanizm zniszczenia związany jest z uszkodzeniem matrycy, to przyjmuje się jako zerowy tylko poprzeczny moduł sprężystości i moduł ścinania,

zachowując niezmienną wartość podłużnego modułu sprężystości warstwy. W przypadku, gdy mechanizm zniszczenia związany jest ze zniszczeniem włókien, wówczas wszystkie sztywności przyjmuje się jako zerowe (w tym wypadku znika różnica między metodą częściowej i całkowitej eliminacji warstwy).

Dalsza analiza wytrzymałości, bez względu na to, który sposób eliminacji warstwy został zastosowany, przebiega w ten sposób, że należy wyznaczyć dla "nowego" laminatu macierze sztywności, a następnie dokonać sprawdzenia czy pozostałe nieuszkodzone warstwy "nowego" laminatu mogą bezpiecznie przenieść obciążenie, przy którym nastąpiło zniszczenie warstwy analizowanej jako ostatnia. Jeżeli tak jest to oznacza to, że laminat jest w stanie przejść zwiększone obciążenie - całą procedurę wyznaczania jego wytrzymałości należy zacząć od początku. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z ostatecznym zniszczeniem laminatu, a obciążeniem niszczącym, odpowiadającym LPF, jest obciążenie niszczące warstwę analizowaną jako ostatnia. Opisaną powyżej procedurę przedstawiono w formie schematu blokowego na rys. 6.6.



Rys. 6.6. Algorytm analizy wytrzymałościowej warstwowego laminatu kompozytowego.

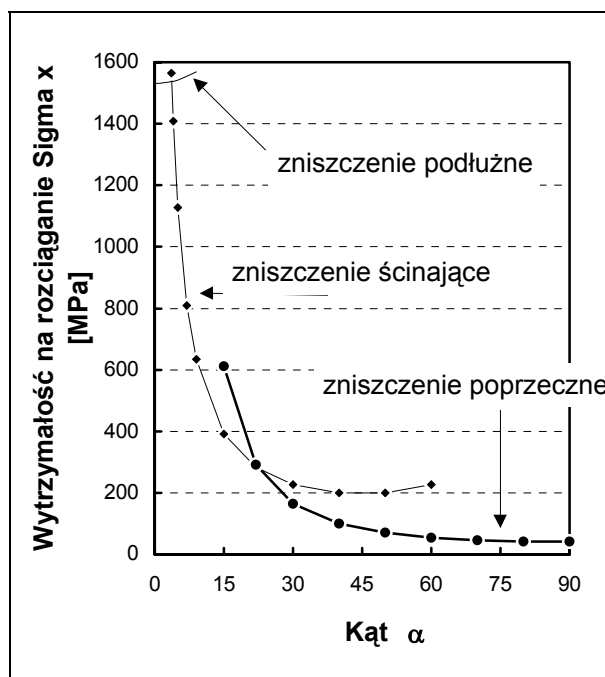
6.3. Przykłady**◆ Przykład 1**

W oparciu o kryteria: naprężenia maksymalnego, odkształcenia maksymalnego, Azzi-Tsai'a-Hill'a i Tsai'a-Wu, wyznaczyć wytrzymałość na rozciąganie σ_x , nieosiowo obciążonego kompozytu Torayca T 300/ Vicotex 174B (włókna węglowe/ epoksyd, dla którego charakterystyki wytrzymałościowe przyjmują wartości: $X_t = 1531$ MPa, $X_c = 1390$ MPa, $Y_t = 41$ MPa, $Y_c = 145$ MPa, $S = 98$ MPa.

Wyniki przedstawić na wykresach $\sigma_x = \sigma_x(\alpha)$.

• Kryterium naprężenia maksymalnego

Krzywą wytrzymałości kompozytu przy nieosiowym rozciąganiu otrzymujemy korzystając z równania (6.5) i podanych wartości charakterystyk wytrzymałościowych (w głównych osiach materiałowych). Przedstawiono ją na rys. 6.7.

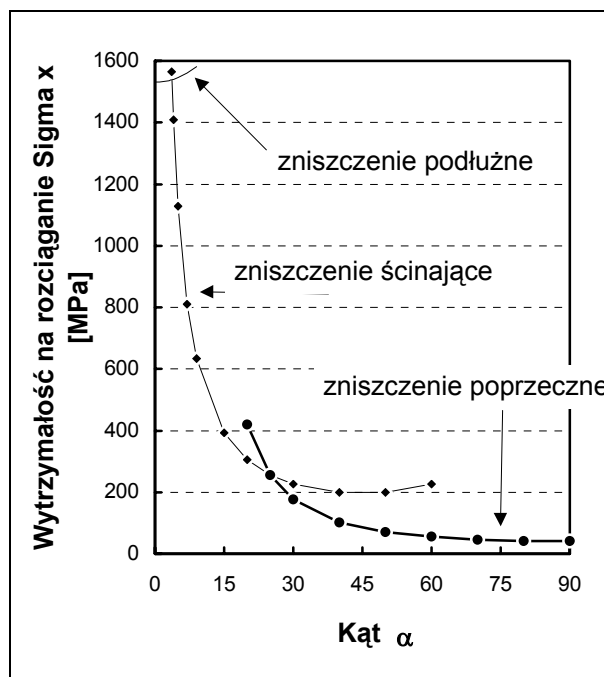


Rys. 6.7. Krzywa wytrzymałości kompozytu przy nieosiowym rozciąganiu wg kryterium naprężenia maksymalnego

W wykresu wynika, że dla bardzo małych kątów (0° - 3.5°) zniszczenie kompozytu związane jest z przekroczeniem jego wytrzymałości podłużnej, dla kątów w przedziale (3.5° - 22°) mechanizm zniszczenia związany jest z przekroczeniem wytrzymałości na ścinanie. Dla kątów większych niż 22° , a zatem w zdecydowanie największym zakresie kątów między kierunkiem obciążenia i kierunkiem włókien, o zniszczeniu kompozytu decyduje wytrzymałość na poprzeczne rozciąganie.

• Kryterium odkształcenia maksymalnego

W celu uzyskania krzywej wytrzymałości kompozytu w oparciu o kryterium odkształcenia maksymalnego wykorzystamy związek (6.15). Konieczna jest w tym wypadku znajomość nie tylko osiowych charakterystyk wytrzymałościowych, ale również charakterystyk sztywnościowych tzn. osiowych stałych inżynierskich. Dla materiału Torayca T300/Vicotex 174B przyjmują one następujące wartości: $E_1 = 137$ GPa, $E_2 = 10$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$. Mniejszy współczynnik Poissona ν_{21} wynika z zależności $\nu_{21} = (E_2/E_1) \nu_{12}$ i wynosi $\nu_{21} = 0.0219$. Otrzymałą krzywą przedstawiono na rys. 6.8.



Rys. 6.8. Krzywa wytrzymałości kompozytu przy nieosiowym rozciąganiu wg kryterium odkształcenia maksymalnego

Porównując krzywe uzyskane z kryterium maksymalnego naprężenia (rys. 6.7) i odkształcenia (rys. 6.8) trudno dostrzec większe różnice. Zmieniają się nieco jedynie graniczne wartości kątów, określających typy zniszczenia. Są one w przypadku kryterium odkształcenia maksymalnego nieznacznie większe (kąt rozgraniczający zniszczenie podłużne od ścinającego wynosi ok. 3.6° , zaś ścinające od poprzecznego 25°).

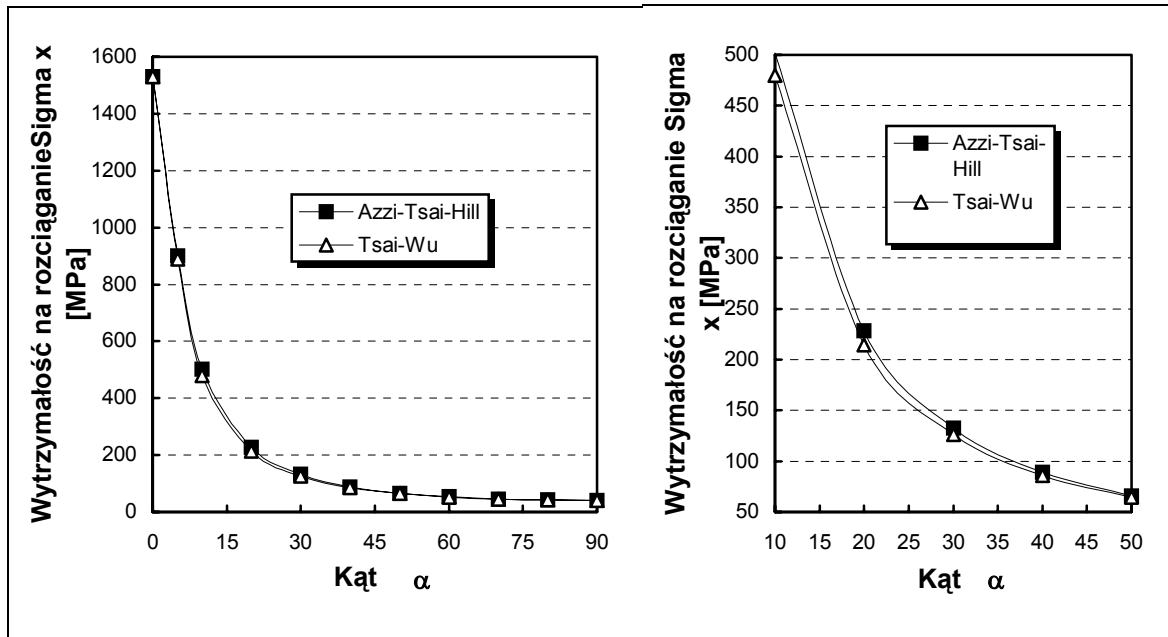
- **Kryterium Azzi'ego-Tsai'a-Hill'a, kryterium Tsai'a-Wu**

Krzywą wytrzymałości wg kryterium A-T-H otrzymujemy z równania (6.25), zaś wg kryterium tensorowego Tsai'a-Wu z równania kwadratowego (6.38). Wartość współczynnika F_{12} obliczono ze związku (6.37). Obie krzywe pokazano na rys. 6.9. Różnice między wynikami otrzymanymi z kryteriów A-T-H i T-W są tak małe, że w przyjętej na wykresie skali są wręcz niewidoczne. Dopiero powiększenie wykresów w przedziale kątów, w którym różnice są największe pozwala stwierdzić ich istnienie.

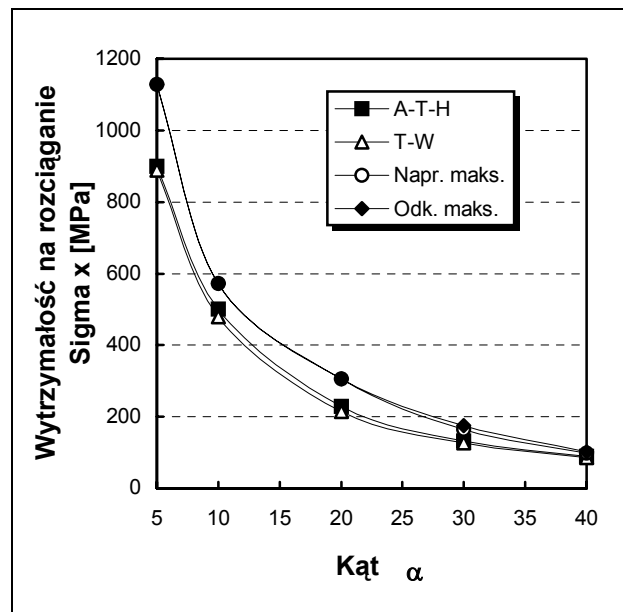
- **Podsumowanie**

Przedstawione rezultaty dotyczące wytrzymałości kompozytu, uzyskane z różnych kryteriów wytrzymałościowych świadczą, że nie ma między nimi zasadniczych różnic. Są one największe w przedziale kątów, dla którego kryteria odkształcenia i naprężenia maksymalnego prognozują zniszczenie kompozytu typu ścinającego. Dane doświadczalne świadczą, że właśnie w tym przedziale najlepszą zgodność z eksperymentem wykazują kryteria A-T-H i T-W. Konfrontacja tego spostrzeżenia z rys. 6.10, na którym przedstawiono krzywe wytrzymałości wg wszystkich kryteriów, pozwala stwierdzić, że korzystając z kryterium maksymalnego naprężenia i odkształcenia należy się liczyć z tym, iż otrzymana z nich teoretyczna wytrzymałość kompozytu może być zawyżona w stosunku do wytrzymałości rzeczywistej.

Pewną wadą kryteriów A-T-H i T-W jest to, że w przeciwieństwie do dwu pozostałych, nie pozwalają one na identyfikację mechanizmu zniszczenia, co utrudnia analizę wytrzymałościową laminatów, a w szczególności ten jej etap, który w algorytmie na rys. 6.6 nazwano "uaktualnieniem macierzy sztywności uszkodzonej warstwy".



Rys. 6.9. Porównanie krzywych wytrzymałości kompozytu przy nieosiowym rozciąganiu wg kryterium Tsai'a-Wu i Azzi-Tsai'a-Hill'a



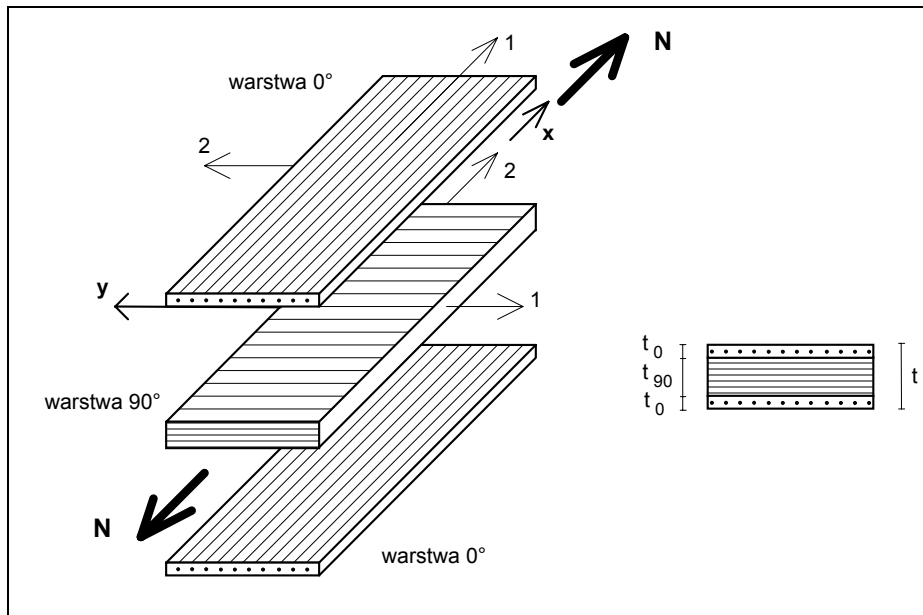
Rys. 6.10. Porównanie krzywych wytrzymałości kompozytu przy nieosiowym rozciąganiu wg kryteriów maksymalnego naprężenia i odkształcenia, Azzi-Tsai'a-Hill'a i Tsai'a-Wu.

◆ **Przykład 2**

Określić wartość obciążenia N , jakie jest w stanie przenieść symetryczny laminat poprzeczny o kodzie $[0, 90_2]_s$, poddany rozciąganiu. Laminat wykonano z warstw kompozytu włókno węglowe/epoksyd o nazwie Torayca T300/ Vicotex 174B. Charakterystyki sztywnościowe, wytrzymałościowe i termiczne kompozytu są następujące: $E_1=137 \times 10^3$ MPa, $E_2=10.04 \times 10^3$ MPa, $G_{12}=4.8 \times 10^3$ MPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=0.0219$, $X_t=1531$ MPa, $X_c=1390$ MPa, $Y_t=41$ MPa, $Y_c=145$ MPa, $S=98$ MPa, $\alpha_1=3.1 \times 10^{-7}$ 1/°C, $\alpha_2=3.1 \times 10^{-5}$ 1/°C. Grubość pojedynczej warstwy wynosi $t_0=1.23 \times 10^{-4}$ m. Temperatura laminacji wynosiła 120°C, zaś temperatura eksploatacji wynosi 20°C. Konfiguracja laminatu i sposób jego obciążenia pokazano na rys 6.11.

Przy rozwiązywaniu tego przykładu wykorzystamy rozwiązanie przykł. 1 z rozdz. 4 i 5, jednak w celu ilustracji całej procedury analizy wytrzymałościowej laminatu pokazane zostaną wszystkie etapy

prowadzące do końcowego rezultatu, jakim jest wielkość dopuszczalnego obciążenia laminatu.. Przy wyznaczaniu wytrzymałości warstw skorzystamy z kryterium Azzi-Tsai'a-Hill'a.



Rys. 6.11. Konfiguracja rozciąganego laminatu $[0, 90_2]_s$.

1) Określenie macierzy sztywności warstwy w głównych osiach materiałowych (1, 2)

Zredukowana macierz sztywności warstwy $[Q]$, obliczona na podstawie stałych inżynierskich ma postać

$$[Q] = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.39)$$

2) Określenie transformowanych macierzy sztywności warstw w układzie odniesienia (x,y)

Transformowane macierze sztywności warstw 0° i 90° w układzie odniesienia (x, y) wynikają wprost z macierzy zredukowanej i nie zachodzi potrzeba korzystania z pracochłonnych obliczeń wg tabeli 3.2 i zależności (3.20). Macierze te mają następujące składowe

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\bar{Q}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 10.11 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 137.91 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.40)$$

3) Wyznaczenie macierzy sztywności laminatu

Ze względu na symetrię laminatu macierz $[B]$ sztywności sprzężenia stanu tarczowego i giętnego jest macierzą zerową. Znajomość macierzy sztywności giętnej $[D]$ (określonej dla symetrycznego laminatu poprzecznego równaniami (5.61) - (5.63)) nie jest konieczna, gdyż analizowany jest tu wyłącznie stan tarczowy. Unormowana macierz sztywności tarczowej $[A]/t$ dla laminatu $[0, 90_2]_s$ ma postać

$$[A]/t = \begin{bmatrix} 52.71 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 95.31 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.41)$$

Macierz odwrotna ma składowe

$$[A]^{-1}t = \begin{bmatrix} 190.1 & -6.04 & 0 \\ -6.04 & 105.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2083.3 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ [MPa]}^{-1} \quad (6.42)$$

4) Wypadkowe siły termiczne

Wypadkowe siły termiczne powstające w laminacie wskutek różnicy temperatury laminacji T_l i eksploatacji T_e

$$\Delta T = T_e - T_l \quad (6.43)$$

określone są równaniem (4.54). Występujące w nim macierze pozornych (tzn. podanych w ukł. odniesienia (x,y)) współczynników rozszerzalności cieplnej, które w ogólnym przypadku wyznacza się poprzez dodatnią lub ujemną transformację tensora utworzonego ze współczynników α_1 i α_2 podanych w osiach materiałowych, w przypadku laminatu poprzecznego można utworzyć wprost z tych współczynników. Macierze te mają postaci

$$\{\alpha\}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3.1 \\ 310 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} \quad \{\alpha\}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 310 \\ 3.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} [1/^\circ\text{C}] \quad (6.44)$$

Wykorzystując macierze (6.40) i (6.44) z równania (4.54) otrzymujemy następujące wartości wypadkowych sił termicznych

$$\{N^T\}/t = \begin{Bmatrix} -25.5 \\ -19.6 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.45)$$

5) Naprężenia warstwowe

Naprężenia warstwowe dla dowolnego laminatu symetrycznego opisuje rów. (5.13), które ma postać

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k [A]^{-1} \{N\} + [\bar{Q}]_k \{[A]^{-1} \{N^T\} - \{\alpha\}_k \Delta T\} \quad (6.46)$$

Siły wypadkowe $\{N\}$ mają dla rozpatrywanego obciążenia postać

$$\begin{Bmatrix} N_x = N \\ N_y = 0 \\ N_{xy} = 0 \end{Bmatrix} \quad (6.47)$$

Korzystając z podanych uprzednio postaci macierzy występujących w (6.46), otrzymamy po przeprowadzeniu obliczeń, następujące wartości naprężeń w warstwach 0° i 90°

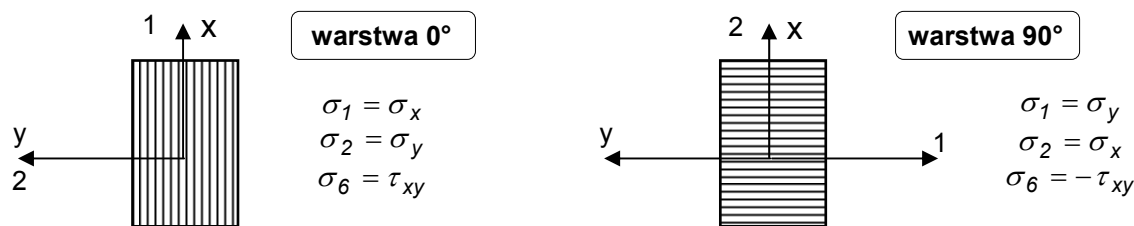
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 2.6198 \\ 0.0515 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -52.13 \\ 28.08 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0.1904 \\ -0.0257 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 26.08 \\ -14.05 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

6. Wyznaczenie obciążenia N powodującego uszkodzenie pierwszej warstwy (FPF)

Obliczone naprężenia warstwowe muszą być teraz wykorzystane w kryterium wytrzymałościowym A-T-H, zastosowanym do każdej warstwy laminatu oddzielnie. W wyniku obliczeń otrzymamy wartość siły N (na jednostkę szerokości laminatu), przy której uszkodzeniu ulegnie pierwsza warstwa.

Naprężenia warstwowe (6.48) i (6.49), aby mogły być użyte w kryterium wytrzymałościowym muszą być przetransformowane do głównych osi materiałowych warstw. W przypadku laminatu poprzecznego, ze względu na szczególne wzajemne położenie układu odniesienia (x, y) oraz układów głównych (1, 2) warstw 0° i 90° , naprężenia w osiach głównych znajdujemy wprost z (6.48) i (6.49) bez konieczności ich transformacji. Pokazano to na rys. 6.12.



Rys. 6.12. Naprężenia warstwowe w ukł. odniesienia (x, y) i układach głównych (1, 2).

Kryterium A-T-H - równanie (6.24) - przyjmuje dla warstw 0° i 90° postaci

$$\sigma_x^2 + (X_t/Y_t)^2 \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y - X_t^2 = 0 \quad \text{dla warstwy } 0^\circ \quad (6.50)$$

$$\sigma_x^2 + (Y_t/X_c)^2 \sigma_y^2 - (Y_t/X_c)^2 \sigma_x \sigma_y - Y_t^2 = 0 \quad \text{dla warstwy } 90^\circ \quad (6.51)$$

Rozwiązując rów. (6.50) i (6.51) otrzymujemy wartości obciążenia odpowiadającego uszkodzeniu pierwszej warstwy. Wynoszą one

$$N/t = 210.7 \text{ MPa} \quad \text{dla warstwy } 0^\circ \quad (6.52)$$

$$N/t = 78.3 \text{ MPa} \quad \text{dla warstwy } 90^\circ \quad (6.53)$$

Z rozwiązania widać, że jako pierwsza ulegnie uszkodzeniu warstwa wewnętrzna 90₄, dla której obciążenie niszczące jest mniejsze. Ostatecznie zatem mamy

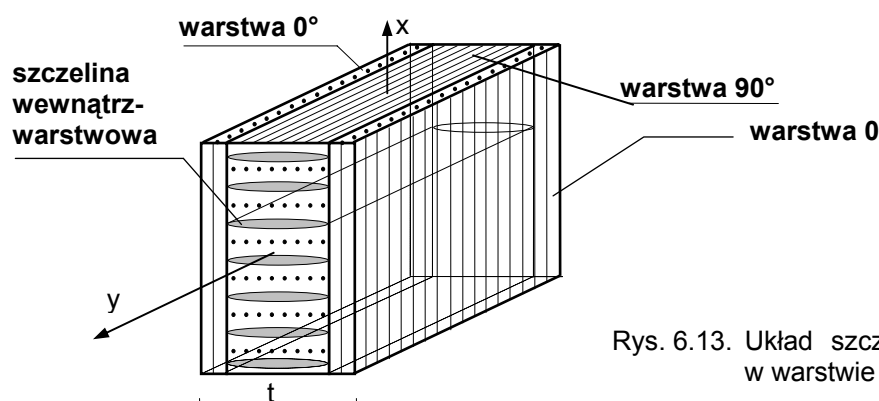
$$(N/t)_{FPF} \equiv \sigma_{FPF} = 78.3 \text{ MPa} \quad (6.54)$$

7) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu przy obciążeniu FPF

Naprężenia warstwowe odpowiadające obciążeniu FPF otrzymujemy z (6.48) i (6.49). wynoszą one

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{FPF0^\circ} = \begin{Bmatrix} 153.0 \\ 32.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{FPF90^\circ} = \begin{Bmatrix} 41.0 \\ -16.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (6.55)$$

Zauważmy, że w warstwie 90° naprężenie w kierunku osi x, a więc kierunku poprzecznym do kierunku włókien wynosi 41 MPa, czyli dokładnie tyle, ile wytrzymałość warstwy na poprzeczne rozciąganie. Wszystkie pozostałe naprężenia w obu warstwach są mniejsze od odpowiednich wytrzymałości. Można zatem określić mechanizm uszkodzenia warstwy 90°, który musi być związany z pękaniem matrycy wzdłuż kierunku włókien. Tak też jest w rzeczywistości. Obserwując pod mikroskopem odpowiednio wypolerowaną boczną powierzchnię laminatu (tak aby widoczny był układ warstw na jego grubości) można stwierdzić obecność licznych szczelin, których płaszczyzna środkowa przebiega mniej więcej równoległe do kierunku włókien. Występują one w prawie równych od siebie odległościach i "przecinają" całą szerokość laminatu. Szczeliny takie określane są mianem wewnątrzwarstwowych (ang. *intralaminar cracks*). Mechanizm uszkodzenia się laminatów poprzecznych w wyniku tworzenia się układu szczelin wewnątrzwarstwowych w warstwie 90° pokazano na rys. 6.13.



Rys. 6.13. Układ szczelin wewnątrzwarstwowych w warstwie 90° laminatu poprzecznego

Odształcenia laminatu określone równaniem (patrz rozdz. 5, pkt. 5.2)

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1} \left(\{N\} + \{N^T\} \right) \quad (6.56)$$

można przedstawić w postaci sumy odształceń "mechanicznych" $\{\varepsilon_M\}$ i termicznych $\{\varepsilon_T\}$.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^M\} + \{\varepsilon^T\} \quad (6.57)$$

Odształcenia laminatu dla obciążenia wywołującego uszkodzenie pierwszej warstwy wynoszą

$$\{\varepsilon^M\}_{FPF} = \begin{Bmatrix} 148.85 \\ -4.73 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\}_{FPF} = \begin{Bmatrix} -47.29 \\ -19.06 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.58)$$

ANALIZA LAMINATU PO USZKODZENIU PIERWSZEJ WARSTWY

8) Zredukowane i transformowane macierze sztywności warstw

Nieuszkodzone warstwy 0° charakteryzuje w dalszym ciągu zredukowana macierz sztywności

$$[Q]_0 = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.59)$$

Nie ulega zatem zmianie również transformowana macierz sztywności, która ma postać

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.60)$$

Zredukowana macierz sztywności dla uszkodzonej warstwy 90° zmienia się wskutek mechanizmu uszkodzenia opisanego wcześniej. Degradacji ulega sztywność warstwy w kierunku poprzecznym do przebiegu włókien w tej warstwie. Przyjmuje się w związku z tym, że poprzeczny moduł sprężystości i moduł ścinania mają wartości zerowe. Zgodnie z rów. (2.42) zredukowana macierz sztywności ma postać

$$[Q]_{90} = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.61)$$

Transformowana do ukł. (x, y) macierz sztywności uszkodzonej warstwy 90° ma więc postać

$$[\bar{Q}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 137 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.62)$$

9) Macierz sztywności tarczowej laminatu uszkodzonego

Macierz sztywności tarczowej laminatu można wyznaczyć jedynie z ogólnej definicji (4.25), nie można natomiast skorzystać z prostszych zależności podanych w tabeli 4.1, czy też 5.3. Przyczyna tkwi oczywiście w tym, że warstwy 0° i 90° są opisane różnymi zredukowanymi macierzami sztywności i współczynniki U_j , występujące w tabelach tracą swój sens, czy mówiąc precyzyjnie w ogóle nie dadzą się zdefiniować. Korzystając z (4.25) oraz (6.60) i (6.62) otrzymujemy

$$[A]/t = \begin{bmatrix} 45.97 & 1.01 & 0 \\ 1.01 & 94.70 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.63)$$

Macierz odwrotna do unormowanej macierzy sztywności tarczowej laminatu ma składowe

$$[A]^{-1}/t = \begin{bmatrix} 217.6 & -2.32 & 0 \\ -2.32 & 105.6 & 0 \\ 0 & 0 & 6250.0 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ [MPa]}^{-1} \quad (6.64)$$

10) Wypadkowe siły termiczne

Wypadkowe siły termiczne otrzymujemy z (4.54), po wykorzystaniu (6.60), (6.62) oraz (6.44). Wynoszą one

$$\{N^T\}/t = \begin{Bmatrix} -4.56 \\ -13.32 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.65)$$

11) Naprężenia warstwowe

Naprężenia warstwowe obliczone wg tej samej procedury co w punkcie 5) wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3.0002 \\ 0.0636 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -0.001 \\ 29.74 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.66)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0318 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 0 \\ -14.86 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.67)$$

12) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu uszkodzonego przy obciążeniu FPF

Naprężenia warstwowe w laminacie z uwzględnieniem degradacji sztywności warstwy 90° i całego laminatu, przy obciążeniu wywołującym tę degradację (FPF) tzn. $N/t = 78.3$ MPa, wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 234.92 \\ 34.72 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -17.35 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.68)$$

Odkształcenia laminatu wynoszą wówczas

$$\{\varepsilon^M\} = \begin{Bmatrix} 170.38 \\ -1.81 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\} = \begin{Bmatrix} -9.615 \\ -13.87 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.69)$$

13) Sprawdzenie kryterium A-T-H dla warstw laminatu uszkodzonego przy obciążeniu FPF

Uszkodzeniu warstwy 90° przy obciążeniu FPF towarzyszy zmiana sztywności laminatu i skokowa zmiana naprężeń warstwowych (widoczna z porównania (6.55) i (6.68)), a również i odkształceń laminatu (widoczna z porównania (6.58) i (6.69)). Może się więc zdarzyć tak, że obciążenie to wywoła także uszkodzenie warstwy 0° . Należy zatem sprawdzić, czy stan naprężenia w warstwie 0° jest stanem bezpiecznym wg przyjętego kryterium wytrzymałościowego A-T-H. Odpowiedni warunek, wynikający z tego kryterium przyjmuje tutaj postać

$$\left(\frac{\sigma_{x0^\circ}}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{y0^\circ}}{Y_t}\right)^2 - \frac{\sigma_{x0^\circ}\sigma_{y0^\circ}}{X_t^2} \leq 1 \quad (6.70)$$

Łatwo sprawdzić, że warunek (6.70) dla naprężeń (6.68) jest spełniony. Oznacza to, że warstwa 0° pozostaje nadal nieuszkodzona, a laminat może przejąć zwiększone obciążenie zewnętrzne.

14) Obliczenie obciążenia N_1 uszkadzającego warstwę 0° laminatu uszkodzonego

Oznaczmy przez N_1 obciążenie zewnętrzne, jakie jest w stanie przenieść uszkodzony laminat. Wartość tego dodatkowego obciążenia wyznaczamy z kryterium A-T-H zastosowanego dla warstwy 0° , w której naprężenia opisane są tensorem (6.66). Sposób postępowania pokazano w pkt. 6. W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$\frac{N_1}{t} = 150.8 \text{ [MPa]} \quad (6.71)$$

15) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu przy obciążeniu N_1

Naprężenia warstwowe wyznaczone z (6.66) i (6.71) wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ}^1 = \begin{Bmatrix} 452.5 \\ 39.3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -19.66 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (6.72)$$

Odształcenia laminatu mają następujące wartości

$$\{\varepsilon^M\}_1 = \begin{Bmatrix} 328.1 \\ -3.477 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\} = \begin{Bmatrix} -9.615 \\ -13.87 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.73)$$

Z wartości naprężeń w warstwie zewnętrznej 0° widać, że naprężenie $\sigma_y = \sigma_2$ jest bardzo bliskie wytrzymałości warstwy na poprzeczne (tzn. o kierunku osi "2") rozciąganie. Mechanizm uszkodzenia tej warstwy musi być zatem związany z pękaniem matrycy w kierunku równoległym do włókien. Z (6.73) widać także, że naprężenia o kierunku włókien, zarówno w warstwie 0° , jak i 90° , są wyraźnie mniejsze od odpowiednich wytrzymałości - włókna pozostają więc nadal nieuszkodzone i tylko one mogą przenosić dalsze obciążenie. Przedstawiony tu stan uszkodzenia warstw, który można nazwać stanem separacji własności warstw (można też spotkać określenie laminat "rozprężnięty"), powoduje, że jedyną niezerową składową zredukowanej macierzy sztywności dla obu warstw jest Q_{11} . Z punktu widzenia warstwy 0° jest to sztywność w kierunku zgodnym z kierunkiem obciążenia. Oznacza to, że warstwa ta, a w zasadzie jeden z jej składników - nieuszkodzone włókna - nadal mogą przejmować obciążenie, mimo że laminat jest w stanie rozprężniętym.

ANALIZA LAMINATU ROZPRĘŻNIĘTEGO

16) Zredukowana i transformowane macierze sztywności warstw

Zredukowana macierz sztywności obu warstw jest taka sama i ma postać

$$[Q] = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.74)$$

Macierze transformowane dla warstw 0° i 90° mają składowe

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.75)$$

$$[\bar{Q}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 137 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.76)$$

17) Macierz sztywności tarczowej laminatu rozprężniętego

Unormowana macierz sztywności tarczowej laminatu w stanie rozprężniętym ma postać (6.77)

$$[A]/t = \begin{bmatrix} 45.7 & 0 & 0 \\ 0 & 91.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]}$$

Ze względu na konieczność odwrócenia macierzy $[A]$ składowa A_{66} musi być przyjęta jako dowolnie mała, ale niezerowa. W wyniku odwrócenia macierzy $[A]$ otrzymujemy

$$[A]^{-1}/t = \begin{bmatrix} 219.0 & 0 & 0 \\ 0 & 109.5 & 0 \\ 0 & 0 & "\infty" \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ [MPa]}^{-1} \quad (6.78)$$

18) Wypadkowe siły termiczne

Wypadkowe siły termiczne dostajemy z (4.54), po wykorzystaniu (6.44), (6.75) i (6.76). Wnoszą one

$$\{N^T\}/t = \begin{Bmatrix} -1.416 \\ -2.831 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.79)$$

19) Naprężenia warstwowe w stanie separacji własności warstw

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3.0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.80)$$

20) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu rozprężonego przy obciążeniu N_1

Naprężenia warstwowe w laminacie rozprężonym laminatu, przy obciążeniu $N_1/t = 150.8$ MPa, wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 452.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.81)$$

Odształcenia laminatu wynoszą wówczas

$$\{\varepsilon^M\} = \begin{Bmatrix} 330.2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\} = \begin{Bmatrix} -3.1 \\ -3.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.82)$$

WYTRZYMAŁOŚĆ LAMINATU

Przedstawiona analiza wytrzymałościowa laminatu służy przede wszystkim określeniu jego wytrzymałości (nośności N). Wyznaczone uprzednio obciążenie N_1 jest obciążeniem, przy którym zgodnie z kryterium A-T-H ulega uszkodzeniu warstwa 0° , jednocześnie ostatnia warstwa laminatu, która dotąd pozostawała nieuszkodzona. Nie jest to jednak końcowa wartość obciążenia, jakie może przenieść laminat. Patrząc na wartości naprężeń w warstwie 0° laminatu uszkodzonego, ale jeszcze nie rozprężonego, przy obciążeniu równym N_1 (rów. (6.72)) stwierdzamy, że naprężenie normalne w kierunku włókien (zgodnym z kierunkiem obciążenia) wynosi $\sigma^1_{x0^\circ} = 452.5$ MPa, podczas gdy wytrzymałość podłużna warstwy, o której decydują przede wszystkim nieuszkodzone włókna, wynosi $X_t = 1531$ MPa. Tak więc warstwa 0° jest w stanie przenieść dodatkowo, już po "rozprężeniu" laminatu, naprężenie $\Delta\sigma$ wynoszące

$$\Delta\sigma = X_t - \sigma^1_{x0^\circ} \quad (6.83)$$

Odpowiadający temu przyrostowi naprężeń przyrost obciążenia, można określić na podstawie postaci tensora naprężenia (6.80). Przyrost obciążenia wynosi

$$\Delta N/t = \Delta\sigma/3 \quad (6.84)$$

Maksymalne obciążenie, jakie jest w stanie przenieść analizowany laminat, odpowiadające całkowitemu zniszczeniu warstwy 0° , określone jako N_{LPF} wynosi

$$\frac{N_{LPF}}{t} = \frac{N_1}{t} + \frac{\Delta N}{t} = 150.8 + \frac{1531 - 452.5}{3} = 510.3 [MPa] \quad (6.85)$$

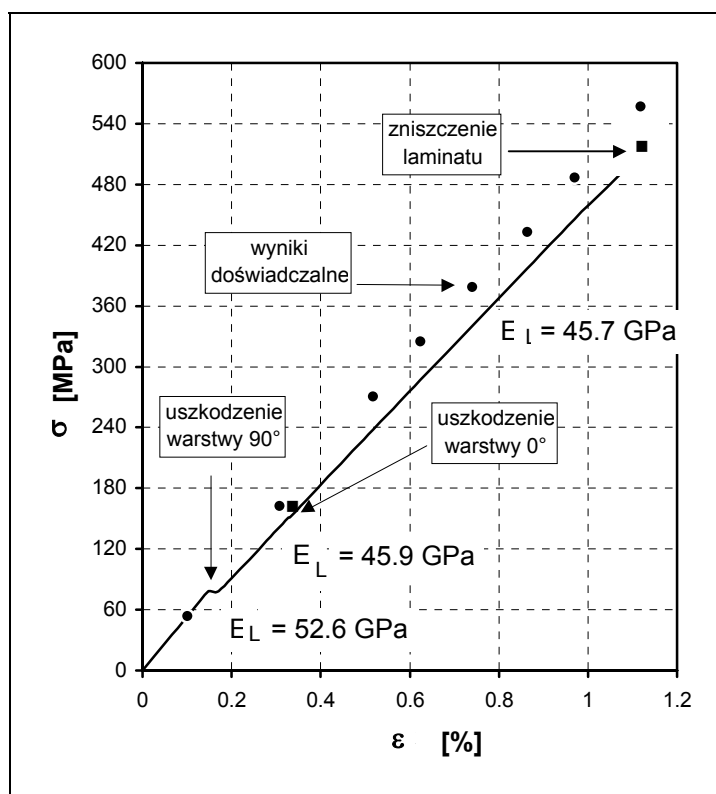
Łatwo sprawdzić, że ten sam wynik otrzymujemy poprzez zastosowanie kryterium A-T-H w odniesieniu do naprężeń warstwowych (6.81).

Odształcenia laminatu odpowiadające temu obciążeniu przyjmują wartości

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^M\} = \begin{Bmatrix} 1117.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.86)$$

ANALIZA ROZWIĄZANIA

W oparciu o uzyskane wyniki zbudowano wykres zależności naprężenia σ_x (tzn. N_x/t) w laminacie od jego odkształcenia podłużnego $\varepsilon_x = \varepsilon_x^M$. Przedstawiono go na rys. 6.14.

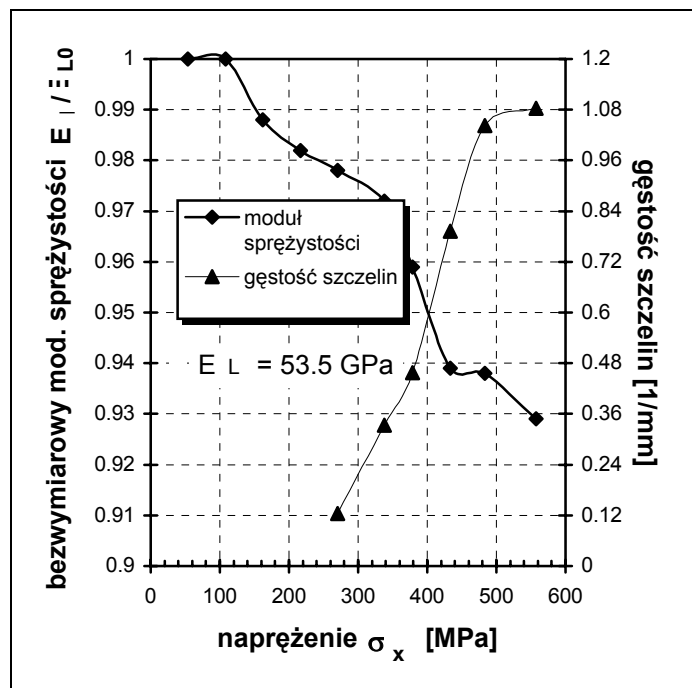


Rys. 6.14. Teoretyczna zależność naprężeń od odkształceń dla rozciąganej laminaty $[0, 90_2]_s$ w oparciu o metodę częściowej degradacji sztywności i kryterium Azzi-Tsai'a-Hilla.

Składa się on z trzech odcinków prostoliniowych różniących się kątami nachylenia. Pominięto tu odkształcenia residualne, wskutek czego pierwszy z odcinków wychodzi z początku układu współrzędnych. Koniec odcinka określony jest punktem o współrzędnych $\sigma_x=78.3$ MPa, $\varepsilon_x=148.85 \times 10^{-5}$, odpowiadającym uszkodzeniu pierwszej warstwy (rów. (6.54), (6.58)). Podłużny moduł sprężystości laminatu, określający nachylenie odcinka, wynika z macierzy (6.42) i jest równy $E_L=1/A'_{11}=52.6$ GPa. Na skutek zmiany sztywności laminatu po uszkodzeniu pierwszej warstwy następuje skokowy przyrost odkształcenia do wartości $\varepsilon_x=170.38 \times 10^{-5}$ (rów. (6.69)) przy niezmiennym naprężeniu, widoczny na wykresie w postaci tzw. "kolana" (ang. *knee*). Wychodzi z niego drugi odcinek wykresu, biegnący do punktu określającego uszkodzenie drugiej i zarazem ostatniej warstwy. Punkt ten wyznaczają współrzędne $\sigma_x=150.8$ MPa, $\varepsilon_x=328.1 \times 10^{-5}$ (rów. (6.71), (6.73)). Podłużny moduł sprężystości wynosi teraz 45.9 GPa (patrz - macierz (6.64)). Kolejny odcinek odpowiada stanowi rozprężnionemu laminatu. Wskutek tego, że pierwszy element macierzy podatności (6.78) zmienia się w stosunku do stanu poprzedniego znikomo mało, moduł sprężystości praktycznie pozostaje na niezmiennym poziomie ($E_L=45.7$ GPa), a tym samym nie zmienia się również nachylenie trzeciego odcinka. Z (6.82) wynika ponadto, że wskutek zmiany sztywności, naprężeniu $\sigma_x=150.8$ MPa odpowiada w stanie rozprężnionym odkształcenie $\varepsilon_x=330.2 \times 10^{-5}$, a więc nieznacznie większe niż odkształcenie przy tym samym obciążeniu, ale w stanie poprzedzającym "rozprężnienie". Pojawia się w związku z tym drugie kolano odpowiadające uszkodzeniu drugiej warstwy. Końcowy punkt na wykresie oznaczający maksymalne obciążenie, jakie może przenieść laminat wyznaczają współrzędne $\sigma_x=510.3$ MPa, $\varepsilon_x=1117.6 \times 10^{-5}$ (rów. (6.85), (6.86)).

Na wykresie pokazano także wyniki badań doświadczalnych uzyskane przez autora. Widać, że teoretyczna analiza wytrzymałościowa daje wyniki zaniżone w stosunku do wartości pomierzonych, szczególnie przy dużych odkształceniach liniowych laminatu. Nie są to jednak jakieś zasadnicze różnice. W badaniach nie stwierdzono występowania "kolana", które jest wyłącznie skutkiem słabości istniejącej procedury teoretycznej, a nie efektem realnie istniejącym. Widać, że gdyby drugi odcinek

wykresu połączyć z pierwszym z pominięciem "kolana", to zgodność wyników istotnie poprawiłaby się. Ważnym rezultatem jakościowym analizy teoretycznej, znajdującym potwierdzenie doświadczalne, jest efekt zmiany wartości podłużnego modułu sprężystości. Patrząc na wykres teoretyczny widać, że w przeważającym zakresie obciążeń moduł ten jest o ok. 12.5 procent mniejszy od modułu początkowego. Właśnie ten ostatni jest wyznaczany w standardowej procedurze określania stałych inżynierskich dla laminatu (porównaj rozdz. 4). Należy zatem liczyć się z tym, że zachowanie konstrukcji laminatowych może odbiegać od prognozowanego w oparciu o obliczone - zgodnie z istniejącą procedurą - stałe inżynierskie, szczególnie przy większych obciążeniach. Rzeczywisty obraz zmiany modułu sprężystości różni się nieco od teoretycznego. Po pierwsze nie obserwuje się skokowej jego zmiany, ale zmianę ciągłą. Po drugie zmierzone zmniejszenie modułu wynosiło ok. 7 procent, a więc było mniejsze niż to wynika z analizy teoretycznej. Zmianę modułu uzyskaną doświadczalnie przedstawia rys. 6.15.

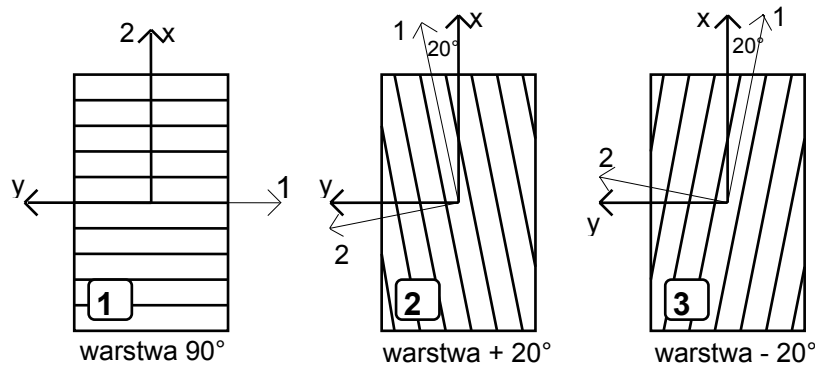


Rys. 6.15. Bezwymiarowy podłużny moduł sprężystości i gęstość szczelin wewnątrzwarstwowych w warstwie 90° w funkcji naprężenia dla laminatu $[0/90_2]_s$.

Występowanie różnic między wynikami analizy teoretycznej i wynikami doświadczalnymi nie może zaskakiwać, jeśli weźmie się pod uwagę wszystkie uproszczenia stosowane w opisie teoretycznym, a także pewną dowolność tego opisu. Należy pamiętać, że wszystkie stosowne kryteria wytrzymałościowe mają jedynie przybliżony charakter. Nie uwzględniają one występujących wzajemnych oddziaływań warstw na siebie - pomijany jest więc tzw. efekt więzów sąsiednich warstw (ang. *constraint effect*). Analiza wytrzymałościowa laminatu nie bierze pod uwagę innego ważnego efektu, a mianowicie tzw. delaminacji warstw, czyli ich rozłączania się. W pewnym sensie jest to efekt przeciwny do procesu laminacji warstw (patrz rozdz. 1), stąd jego nazwa. Kolejnym przybliżeniem jest sposób eliminacji warstwy uszkodzonej, polegający na zerowaniu jej sztywności. Jest to równoznaczne z odebraniem warstwie możliwości przenoszenia jakiegokolwiek obciążenia, podczas gdy w rzeczywistości, nawet w stanie uszkodzonym, może ona je przejmować. W chwili obecnej nie ma jednak innej procedury od tej pokazanej w przykładzie, mimo wszystkich jej oczywistych niedoskonałości.

◆ Przykład 3

Określić wytrzymałość na rozciąganie symetrycznego laminatu $[-20/20/90_2/-20/20/90_2/-20/20]_s$ wykonanego z kompozytu Torayca T300/ Vicotex 174B o charakterystykach sztywnościowych, wytrzymałościowych i termicznych oraz obciążeniu jak w przykładzie 2. Temperatura laminacji wynosiła 120°C , zaś temperatura eksploatacji 20°C . Orientację geometryczną warstw laminatu pokazano na rys 6.16.



Rys. 6.16. Orientacja warstw laminatu.

Szczegółowa procedura analizy wytrzymałościowej laminatu została przedstawiona w poprzednim przykładzie, stąd tutaj ograniczymy się jedynie do podania wyników niezbędnych obliczeń. Te elementy analizy, które nie występowały dla laminatu poprzecznego będą omówione bardziej szczegółowo.

1) Zredukowana i transformowane macierze sztywności warstw

$$[Q] = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.88)$$

$$[\bar{Q}]_1 = \begin{bmatrix} 10.11 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 137.91 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.89)$$

Macierze transformowane warstw 2 i 3 wyznaczamy korzystając z tab. 3.2. Wartości współczynników $U_1 - U_5$ wyznaczono w przykł. 1, rozdz. 4. Są one następujące

$$U_1 = 58.665 \times 10^3 \quad U_2 = 63.902 \times 10^3 \quad U_3 = 15.344 \times 10^3$$

$$U_4 = 18.378 \times 10^3 \quad U_5 = 20.144 \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.90)$$

$$[\bar{Q}]_2 = \begin{bmatrix} 110.3 & 15.7 & 35.6 \\ 15.7 & 12.4 & 5.4 \\ 35.6 & 5.4 & 17.5 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.91)$$

$$[\bar{Q}]_3 = \begin{bmatrix} 110.3 & 15.7 & -35.6 \\ 15.7 & 12.4 & -5.4 \\ -35.6 & -5.4 & 17.5 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.92)$$

2) Macierz sztywności tarczowej i macierz odwrotna

Macierz sztywności tarczowej wyznaczamy z tab. 4.1. Występujące w niej współczynniki związane z objętościowymi udziałami warstw ($v_1=0.4$, $v_2=v_3=0.3$) i ich orientacją przyjmują wartości

$$V_1^* = 0.0596 \quad V_2^* = 0.504 \quad V_3^* = V_4^* = 0 \quad (6.93)$$

Unormowana macierz sztywności tarczowej i macierz do niej odwrotna mają składowe

$$[A]/t = \begin{bmatrix} 70.2 & 10.6 & 0 \\ 10.6 & 62.6 & 0 \\ 0 & 0 & 12.4 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.94)$$

$$[A]^{-1}t = \begin{bmatrix} 146.2 & -24.8 & 0 \\ -24.8 & 163.9 & 0 \\ 0 & 0 & 806.4 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ [MPa]}^{-1} \quad (6.95)$$

3) Macierze pozornych współczynników rozszerzalności termicznej

Macierze pozornych współczynników rozszerzalności termicznej dla warstwy 1 podano w poprzednim przykładzie. Dla warstw 2 i 3 należy je wyznaczyć poprzez transformację, odpowiednio ujemną i dodatnią (rów. (3.3), (3.4)), macierzy współczynników w osiach materiałowych warstwy. Korzystając z tego, że transformacje określone są macierzami

$$[T_-] = \begin{bmatrix} 0.833 & 0.117 & -0.643 \\ 0.117 & 0.833 & 0.643 \\ 0.321 & -0.321 & 0.766 \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

$$[T_+] = \begin{bmatrix} 0.833 & 0.117 & 0.643 \\ 0.117 & 0.833 & -0.643 \\ -0.321 & 0.321 & 0.766 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

przykładowo - dla warstwy 2 otrzymujemy

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_2 = [T_-] \begin{Bmatrix} 3.1 \\ 310 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} [1/^\circ\text{C}] \quad (6.98)$$

Ostatecznie pozorne współczynniki rozszerzalności mają wartości

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 310 \\ 3.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} [1/^\circ\text{C}]$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 39.0 \\ 274.1 \\ -98.6 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} \quad \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 39.0 \\ 274.1 \\ 98.6 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} [1/^\circ\text{C}] \quad (6.99)$$

4) Siły termiczne

Siły termiczne wyznaczamy z zależności (4.54) w postaci

$$\{N^T\} = \Delta T \sum_{k=1}^3 [\bar{Q}]_k \{\alpha\}_k t_k \quad (6.100)$$

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymamy

$$\{N^T\}/t = \left(\begin{Bmatrix} 0.126 \\ 0.055 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} 0.153 \\ 0.104 \\ 0.034 \end{Bmatrix}_2 + \begin{Bmatrix} 0.153 \\ 0.104 \\ -0.034 \end{Bmatrix}_3 \right) \Delta T = \begin{Bmatrix} -43.2 \\ -26.3 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.101)$$

5) Naprężenia warstwowe

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0.140 \\ -0.297 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 24.7 \\ -32.9 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.102)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.574 \\ 0.199 \\ 0.507 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -16.6 \\ 21.9 \\ -10.5 \end{Bmatrix} \quad (6.103)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1.574 \\ 0.199 \\ -0.507 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -16.6 \\ 21.9 \\ 10.5 \end{Bmatrix} \quad (6.104)$$

Naprężenia warstwowe mogą być wykorzystane w którymkolwiek z kryteriów wytrzymałościowych tylko wówczas, gdy są wyrażone w układzie głównych osi materiałowych danej warstwy. Konieczne jest więc przetransformowanie (6.102) - (6.104) z ukl. odniesienia (x, y) do ukl. (1,2) każdej warstwy. W przypadku warstwy 1 wynik można uzyskać natychmiast ze względu na pokrywanie się osi x z osią 2 i osi y z osią 1. W przypadku warstw 2 i 3 należy skorzystać z transformacji, odpowiednio, dodatniej i ujemnej. Jako wynik obliczeń otrzymujemy następujące wartości naprężeń warstwowych

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -0.297 \\ 0.140 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -32.9 \\ 24.7 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.105)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.739 \\ 0.034 \\ -0.054 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -18.85 \\ 24.15 \\ 4.33 \end{Bmatrix} \quad (6.106)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1.739 \\ 0.034 \\ 0.054 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -18.85 \\ 24.15 \\ -4.33 \end{Bmatrix} \quad (6.107)$$

6) Obciążenie uszkadzające pierwszą warstwę (FPF)

W celu wyznaczenia obciążenia, przy którym następuje uszkodzenie pierwszej warstwy wykorzystane będzie kryterium Azzi-Tsai'a-Hill'a. Wynikają z niego następujące wartości obciążenia

$$(N/t)_1 = 115.9 \text{ MPa} = (N/t)_{FPF} \quad (6.108)$$

$$(N/t)_{2,3} = 376.1 \text{ MPa} \quad (6.109)$$

7) Naprężenia warstwowe i odkształcenie laminatu przy obciążeniu FPF

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{FPF1} = \begin{Bmatrix} -67.3 \\ 40.9 \\ 0 \end{Bmatrix} [\text{MPa}] \quad (6.110)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{FPF2} = \begin{Bmatrix} 182.7 \\ 28.1 \\ -1.93 \end{Bmatrix} [\text{MPa}] \quad (6.111)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{FPF3} = \begin{Bmatrix} 182.7 \\ 28.1 \\ 1.93 \end{Bmatrix} [\text{MPa}] \quad (6.112)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^M \\ \varepsilon^T \end{Bmatrix}_{FPF} = \begin{Bmatrix} 169.4 \\ -28.7 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon^T \\ \varepsilon^M \end{Bmatrix}_{FPF} = \begin{Bmatrix} -56.6 \\ -32.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.113)$$

ANALIZA LAMINATU PO USZKODZENIU PIERWSZEJ WARSTWY

8) Zredukowane i transformowane macierze sztywności warstw. Unormowana macierz sztywności laminatu uszkodzonego, macierz odwrotna

Uszkodzenie warstwy 1 (90°) polega na uszkodzeniu matrycy na skutek osiągnięcia wytrzymałości na poprzeczne rozciąganie o czym świadczy wartość naprężenia σ_2 w tej warstwie. Przyjmuje się, że moduł poprzeczny i moduł ścinania dla warstwy 1 są zerowe. Zgodnie z (2.42) i (2.43) zredukowana i transformowana macierze sztywności dla tej warstwy mają postaci

$$[Q]_1 = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\bar{Q}]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 137 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.114)$$

Macierze sztywności dla warstw 2 i 3 nie ulegają zmianie i nadal aktualne są związki (6.92) i (6.93).

Zgodnie z definicją unormowanej macierzy sztywności tarczowej (4.25) otrzymujemy

$$[A]/t = \begin{bmatrix} 70.2 & 10.6 & 0 \\ 10.6 & 62.2 & 0 \\ 0 & 0 & 12.4 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.115)$$

$$[A]^{-1}t = \begin{bmatrix} 154.4 & -23.3 & 0 \\ -23.3 & 164.3 & 0 \\ 0 & 0 & 952.4 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ [MPa]}^{-1} \quad (6.116)$$

9) Siły termiczne

$$\{N^T\}/t = \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.017 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} 0.153 \\ 0.104 \\ 0.034 \end{Bmatrix}_2 + \begin{Bmatrix} 0.153 \\ 0.104 \\ -0.034 \end{Bmatrix}_3 \right) \Delta T = \begin{Bmatrix} -30.6 \\ -22.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (6.117)$$

5) Naprężenia warstwowe

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.320 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 0 \\ -36.6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.118)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.67 \\ 0.21 \\ 0.54 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -0.06 \\ 24.5 \\ -5.1 \end{Bmatrix} \quad (6.119)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1.67 \\ 0.21 \\ -0.54 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -0.06 \\ 24.5 \\ 5.1 \end{Bmatrix} \quad (6.120)$$

Naprężenia po transformacji do osi materiałowych warstw

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -0.320 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -36.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.121)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.85 \\ 0.034 \\ -0.056 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -0.465 \\ 24.9 \\ 3.99 \end{Bmatrix} \quad (6.122)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1.85 \\ 0.034 \\ 0.056 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -0.465 \\ 24.9 \\ -3.99 \end{Bmatrix} \quad (6.123)$$

10) Naprężenia warstwowe i odkształcenie laminatu uszkodzonego przy obciążeniu FPF. Sprawdzenie kryterium A-T-H dla warstw laminatu

Celem sprawdzenia, czy warstwy laminatu uszkodzonego nie ulegają dalszej degradacji przy obciążeniu wywołującym uszkodzenie pierwszej warstwy, należy z (6.121) - (6.123) wyznaczyć wartości naprężeń, a następnie wstawić je do kryterium A-T-H. Naprężenia warstwowe dla (N_{FPF}/t) wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -73.7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 214.0 \\ 28.8 \\ -2.5 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 214.0 \\ 28.8 \\ 2.5 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.124)$$

Po sprawdzeniu kryterium A-T-H dla każdej z warstw okazuje się, że warstwy przy obciążeniu FPF nie ulegają uszkodzeniu, laminat może więc przejąć zwiększone obciążenie.

Odształcenia laminatu wynoszą

$$\{\varepsilon^M\}_{FPF}^* = \begin{Bmatrix} 178.9 \\ -27.0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\}_{FPF}^* = \begin{Bmatrix} -42.0 \\ -29.8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.125)$$

11) Obciążenie uszkadzające drugą warstwę

Wartość obciążenia obliczamy z kryterium A-T-H zastosowanego do naprężeń (6.121) - (6.123). Otrzymujemy

$$(N/t)_1 = 4229.4 MPa \quad (6.126)$$

$$(N/t)_{2,3} = 350.2 MPa = (N/t)^* \quad (6.127)$$

Powyższe rezultaty świadczą, że kolejny etap uszkadzania się laminatu związany jest z jednoczesnym uszkodzeniem warstwy 2 i 3.

12) Naprężenia warstwowe i odształcenie laminatu przy obciążeniu $(N/t)^*$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_1^* = \begin{Bmatrix} -148.7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2^* = \begin{Bmatrix} 647.4 \\ 36.8 \\ -15.6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_3^* = \begin{Bmatrix} 647.4 \\ 36.8 \\ 15.6 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (6.128)$$

$$\{\varepsilon^M\}^* = \begin{Bmatrix} 541.0 \\ -81.7 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\}^* = \begin{Bmatrix} -42.0 \\ -29.8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.129)$$

13) Zredukowane i transformowane macierze sztywności warstw laminatu o uszkodzonych wszystkich warstwach. Macierz sztywności tarczowej

Po uszkodzeniu warstw 2 i 3 nie ma już w laminacie żadnej warstwy w stanie nieuszkodzonym. W celu sprawdzenia czy "nowy" laminat jest w stanie przenieść jeszcze dodatkowe obciążenie należy wyznaczyć jego aktualną sztywność i naprężenia warstwowe, a następnie sprawdzić czy ich wartości dla obciążenia $(N/t)^*$ spełniają warunek stanu bezpiecznego. W wypadku, gdy nie jest on spełniony - za graniczną wartość obciążenia niszczącego należy przyjąć $(N/t)^*$, a jeżeli jest spełniony - należy określić nową wartość obciążenia niszczącego.

Z wartości naprężeń w uszkodzonych warstwach laminatu widać, że żadne z nich nie osiągnęło wartości odpowiadającej mu wytrzymałości, jednak ich kombinacja doprowadziła do uszkodzenia warstw 2 i 3. Wniosek ten jest oczywiście skutkiem stosowania kryterium A-T-H. Utrudnia to identyfikację mechanizmu uszkodzenia, a co za tym idzie wybór odpowiedniego sposobu uaktualnienia macierzy sztywności warstw, a w dalszej kolejności laminatu. Charakterystyki wytrzymałościowe warstwy oraz wartości naprężeń warstwowych (6.128) pozwalają jednak przyjąć, że warstwy 2 i 3 uszkodzą się w wyniku poprzecznego pęknięcia matrycy, co jednocześnie oznacza, że poprzeczny moduł sprężystości i moduł ścinania mają wartości zerowe. Macierz zredukowana wszystkich warstw jest zatem taka sama tzn.

$$[Q]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 [MPa] \quad (6.130)$$

Aktualne wartości współczynników U_i wynoszą

$$U_1 = 51.4 \times 10^3 \quad U_2 = 68.5 \times 10^3 \quad U_3 = 17.1 \times 10^3$$

$$U_4 = 17.1 \times 10^3 \quad U_5 = 17.1 \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.131)$$

W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$[\bar{Q}]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 137 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]}$$

$$[\bar{Q}]_2 = \begin{bmatrix} 106.8 & 14.2 & 38.9 \\ 14.2 & 1.87 & 5.15 \\ 38.9 & 5.15 & 14.2 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\bar{Q}]_3 = \begin{bmatrix} 106.8 & 14.2 & -38.9 \\ 14.2 & 1.87 & -5.15 \\ -38.9 & -5.15 & 14.2 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.132)$$

$$[A]/t = \begin{bmatrix} 64.1 & 8.5 & 0 \\ 8.5 & 55.9 & 0 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (6.133)$$

$$[A]^{-1}t = \begin{bmatrix} 159.2 & -24.2 & 0 \\ -24.2 & 182.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1176.5 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ [MPa]}^{-1} \quad (6.134)$$

14) Siły termiczne

$$\{N^T\}/t = \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.017 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} 0.127 \\ 0.0168 \\ 0.046 \end{Bmatrix}_2 + \begin{Bmatrix} 0.127 \\ 0.0168 \\ -0.046 \end{Bmatrix}_3 \right) \Delta T = \begin{Bmatrix} -25.3 \\ -5.06 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (6.135)$$

15) Naprężenia warstwowe

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.332 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0176 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.136)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.666 \\ 0.222 \\ 0.607 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 0.177 \\ -0.0035 \\ -0.0264 \end{Bmatrix} \quad (6.137)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1.666 \\ 0.222 \\ -0.607 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 0.177 \\ -0.0035 \\ 0.0264 \end{Bmatrix} \quad (6.138)$$

Naprężenia po transformacji do osi materiałowych warstw mają postać

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -0.332 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} -0.018 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.139)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.887 \\ 0.0007 \\ 0.0009 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 0.139 \\ 0.0346 \\ -0.0782 \end{Bmatrix} \quad (6.140)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1.887 \\ 0.0007 \\ -0.0009 \end{Bmatrix} \times N/t + \begin{Bmatrix} 0.139 \\ 0.0346 \\ 0.0782 \end{Bmatrix} \quad (6.140)$$

16) Naprężenia warstwowe i odkształcenie laminatu uszkodzonego przy obciążeniu $(N/t)^*$. Sprawdzenie kryterium A-T-H dla warstw laminatu

Celem sprawdzenia, czy warstwy laminatu uszkodzonego nie ulegają dalszej degradacji przy obciążeniu wywołującym uszkodzenie warstwy 2 i 3, należy z (6.139) - (6.141) wyznaczyć wartości naprężeń, a następnie wstawić je do kryterium A-T-H. Naprężenia warstwowe dla $(N/t)^*$ wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -116.1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 661.0 \\ 0.28 \\ 0.24 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 661.0 \\ 0.28 \\ -0.24 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (6.142)$$

Po sprawdzeniu kryterium A-T-H dla każdej z warstw okazuje się, że warstwy przy obciążeniu $(N/t)^*$ nie ulegają uszkodzeniu, laminat może więc przejąć zwiększone obciążenie $(N/t)^{**}$.

Odształcenia laminatu przy obciążeniu $(N/t)^*$ wynoszą

$$\{\varepsilon^M\}_N^{**} = \begin{Bmatrix} 554.0 \\ -83.8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\}_N^{**} = \begin{Bmatrix} -38.9 \\ -3.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.143)$$

17) Obciążenie uszkadzające $(N/t)^{}$**

Wartość obciążenia obliczamy z kryterium A-T-H zastosowanego do naprężeń (6.139) - (6.141). Otrzymujemy

$$(N/t)_1 = 4193 \text{ [MPa]} \quad (6.144)$$

$$(N/t)_{2,3} = 811 \text{ [MPa]} = (N/t)^{**} \quad (6.145)$$

Zniszczenie związane jest z uszkodzeniem warstw 2 i 3. Naprężenia warstwowe i odkształcenie laminatu przy obciążeniu $(N/t)^{**}$ wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_1^{**} = \begin{Bmatrix} -269.0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2^{**} = \begin{Bmatrix} 1531 \\ 0.603 \\ 0.652 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_2^* = \begin{Bmatrix} 1531 \\ 0.603 \\ -0.652 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (6.146)$$

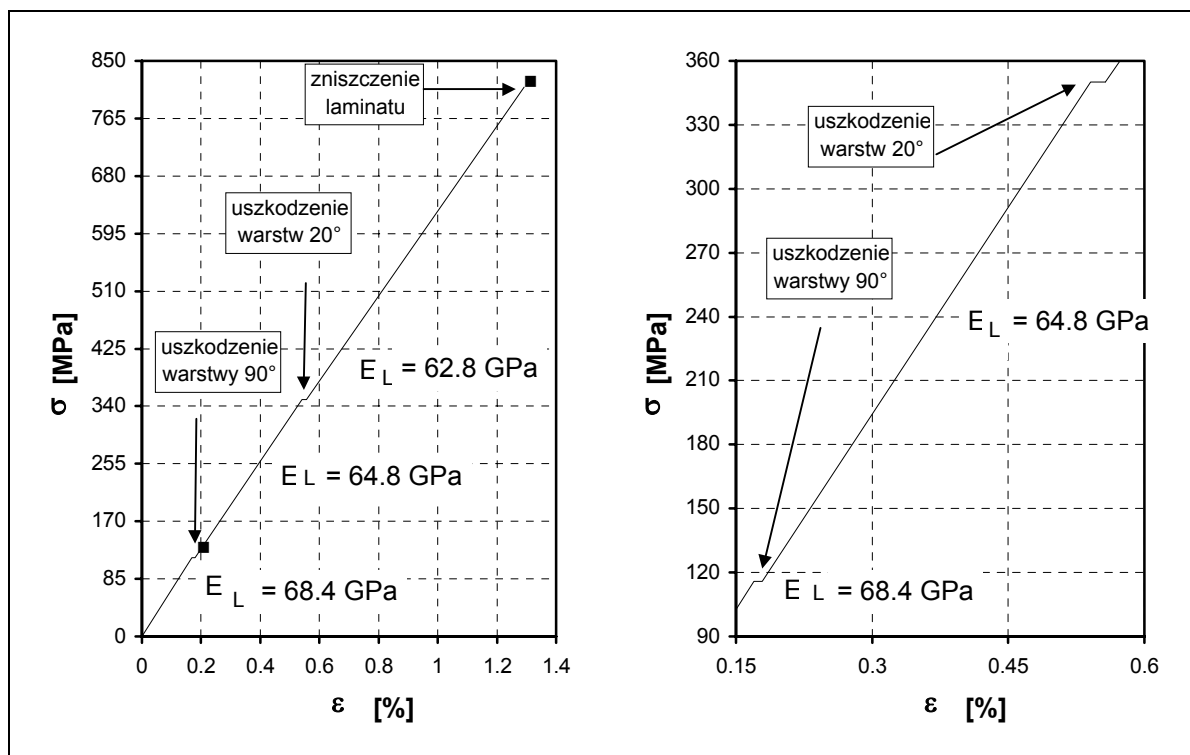
Widać zatem, że naprężenie podłużne w warstwie 2 i 3 osiągnęło wartość wytrzymałości na podłużne rozciąganie, a to oznacza, że warstwy te ulegają całkowitemu zniszczeniu wskutek pęknięcia włókien. Dalsza praca laminatu, a w zasadzie jedynie warstwy 1 czyli warstwy 90°, na podłużne rozciąganie nie jest możliwa, gdyż warstwa 90° już poprzednio utraciła swoją sztywność podłużną.

Odształcenia wynoszą

$$\{\varepsilon^M\}^{**} = \begin{Bmatrix} 1292 \\ -196.3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\varepsilon^T\}^{**} = \begin{Bmatrix} -38.9 \\ -3.11 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.147)$$

ANALIZA ROZWIĄZANIA

W oparciu o uzyskane rezultaty analizy wytrzymałościowej laminatu sporządzono wykres zależności naprężeń "globalnych", tożsamy z wielkością N/t , od odkształcenia podłużnego ε_x w laminacie. Jakościowo, wnioski przedstawione szczegółowo dla laminatu poprzecznego, stanowiącego przedmiot przykładu 2, są słuszne również obecnie. Widoczne są na wykresie "kolana", odpowiadające naprężeniom powodującym uszkodzenia kolejnych warstw. Wychodzące z nich odcinki różnią się nachyleniem do osi układu, różne są więc także podłużne moduły sprężystości w kolejnych stadiach pracy laminatu. Warto także zauważyć, że obciążenie niszczące pierwszą warstwę jest kilkakrotnie mniejsze niż obciążenie niszczące laminat. Jest regułą, że metoda FPF oceny nośności laminatu prowadzi do wyraźnego zaniżenia nośności rzeczywistej, tzn. określonej doświadczalnie. Zdecydowanie lepszy rezultat daje stosowanie metody LPF.



Rys. 6.17. Teoretyczna zależność naprężeń od odkształceń dla rozciąganego laminatu $[-20/20/90_2/-20/20/90_2/-20/20]_s$ (met. częściowej degradacji sztywności, kryterium A-T-H).

