

ROZDZIAŁ 5

ROZDZIAŁ 5

PODSTAWOWE TYPY LAMINATÓW WARSTWOWYCH LAMINATY SYMETRYCZNE I ANTYSYMETRYCZNE

Podane w poprzednim rozdziale postaci unormowanej macierzy sztywności tarczowej $[A]$, macierzy sztywności sprężenia $[B]$ i macierzy sztywności giętej $[D]$ dotyczą laminatów o całkowicie dowolnej sekwencji warstw. W większości jednak przypadków mamy do czynienia z laminatami warstwowymi o specyficznej budowie, charakteryzującej się określoną regularnością w układzie warstw. Celowe jest zatem wprowadzenie pewnej klasyfikacji laminatów, obejmującej podstawowe ich typy, a także określenie wspomnianych wcześniej macierzy dla tych specyficznych konfiguracji, gdyż z reguły dają się one wyrazić prościej niż wynika to z zależności ogólnych.

5.1. Klasyfikacja kompozytów

5.1.1. Definicje, określenia

W celu ułatwienia dalszej lektury zostaną poniżej podane wszystkie użyte w kolejnych rozdziałach określenia, definicje i wynikające z nich wnioski. Ze względu na brak w niektórych przypadkach dobrych polskich odpowiedników terminów anglojęzycznych, podano obok użytych terminów polskich ich oryginały angielskie.

- ♦ **Warstwa laminatu** - pod pojęciem tym rozumie się grupę połączonych ze sobą pojedynczych warstw kompozytowych o tej samej orientacji. Przykładowo w laminacie o kodzie $[0^\circ/90^\circ_2/-45^\circ_3]$ są trzy warstwy, tzn. 0° , 90°_2 i -45°_3 .

- ♦ **Laminat symetryczny**. Laminat jest symetryczny, jeżeli zachodzą następujące 2 warunki

$$\theta(z) = \theta(-z) \quad (5.1)$$

$$Q_{ij}(z) = Q_{ij}(-z) \quad (5.2)$$

Pierwszy z tych warunków oznacza symetrię ułożenia warstw wzg. płaszczyzny środkowej (symetria geometryczna), a drugi symetrię modułów sztywności (symetria materiałowa). W dalszej części skryptu przyjmuje się, że drugi warunek jest zawsze spełniony (chyba, że wyraźnie będzie powiedziane inaczej), co oznacza, że rozpatrywane będą laminaty złożone z warstw tego samego materiału kompozytowego.

- ♦ **Laminat antysymetryczny**. Przy założeniu symetrii materiałowej, warunek antysymetrii laminatu dotyczy wyłącznie jego cech geometrycznych i ma postać

$$\theta(z) = -\theta(-z) \quad (5.3)$$

- ♦ **Laminat regularny**. Jest to taki laminat, w którym wszystkie warstwy mają tę samą grubość, tzn.

$$t_i = t/N \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.4)$$

gdzie N oznacza liczbę warstw laminatu, t - jego grubość.

- ♦ **Laminat zrównoważony**^{*)}. W celu zdefiniowania tego pojęcia oznaczymy symbolem K liczbę warstw o różnej orientacji kątovej (np. w laminacie $[40^\circ_5 / -30^\circ_2 / -40^\circ_5 / -30^\circ_3]$, $K = 3$). Laminatem zrównoważonym będziemy nazywać laminat, w którym objętościowy udział tych warstw jest taki sam, tzn.

$$v_i = 1 / K \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (5.5)$$

- ♦ **Laminat o poprzecznym układzie warstw** lub krótko **laminat poprzeczny** (ang. *cross-ply laminate*) - laminat składający się wyłącznie z warstw 0° i 90° .
- ♦ **Laminat o kątowym układzie warstw** lub krótko **laminat kątowy** (ang. *angle-ply laminate*) - laminat składający się wyłącznie z warstw $+\alpha$, $-\alpha$.
- ♦ **Laminat dowolny** - laminat o całkowicie dowolnym układzie geometrycznym warstw (tzn. ani nie symetryczny, ani nie antysymetryczny).

Z podanych powyżej definicji, a także prostych rozważań geometrycznych wynikają następujące wnioski

- ♦ Każdy laminat **symetryczny** musi się składać z **nieparzystej** liczby warstw.

Wynika to z faktu, że wszystkie warstwy znajdujące się po jednej stronie powierzchni środkowej mają swoich "bliźniaków" po jej przeciwnej stronie. Wyjątek stanowi warstwa środkowa, przez którą przechodzi płaszczyzna środkowa, w związku z czym jest ona "jedynakiem", a zatem liczba warstw musi być liczbą nieparzystą (" $2n+1$ ").

- ♦ Każdy laminat **antysymetryczny** musi się składać z **parzystej** liczby warstw.

Dowód pozostawmy jako ćwiczenie dla czytelnika.

- ♦ Laminat **symetryczny i regularny nie może być zrównoważony**.

Regularność oznacza, że grubości wszystkich warstw są identyczne. Z symetrii wynika, że laminat składa się z par warstw, co w połączeniu z pierwszym stwierdzeniem prowadzi do konkluzji, że objętościowy udział każdej pary musi być taki sam. Nie dotyczy to jednak warstwy środkowej laminatu, która nie tworzy pary, jej udział objętościowy musi zatem być dwukrotnie mniejszy od udziału pozostałych warstw. W efekcie laminat nie może być zrównoważony.

- ♦ Laminat **symetryczny i zrównoważony nie może być regularny**.

Ta własność jest konsekwencją rozumowania odwrotnego do przedstawionego powyżej.

- ♦ Laminat **antysymetryczny, tak poprzeczny, jak i kątowy jest zawsze zrównoważony**.

Laminat antysymetryczny obu typów można zapisać ogólnie w postaci

$$\dots\dots\dots\alpha_a / -\alpha_b / \alpha_c / -\alpha_d / \alpha_d / -\alpha_c / \alpha_b / -\alpha_a \dots\dots\dots \quad (5.6)$$

Dla laminatu poprzecznego przez " α " należy rozumieć konfigurację 0° , a przez " $-\alpha$ " - 90° .

Z (5.6) wynika, że liczba pojedynczych warstw " α " wynosi $\dots+a+c+d+b+\dots$, a warstw " $-\alpha$ " - $\dots+b+d+c+a+\dots$, czyli tyle samo, co oznacza, że także objętościowy udział obu typów warstw musi być taki sam, a to z kolei oznacza, że laminat musi być zrównoważony.

Jeżeli dodatkowo zachodzi warunek $\dots = a = b = c = d = \dots$, to laminat jest także **regularny**.

- ♦ Laminat **antysymetryczny, o dowolnym ułożeniu warstw może nie być zrównoważony**.

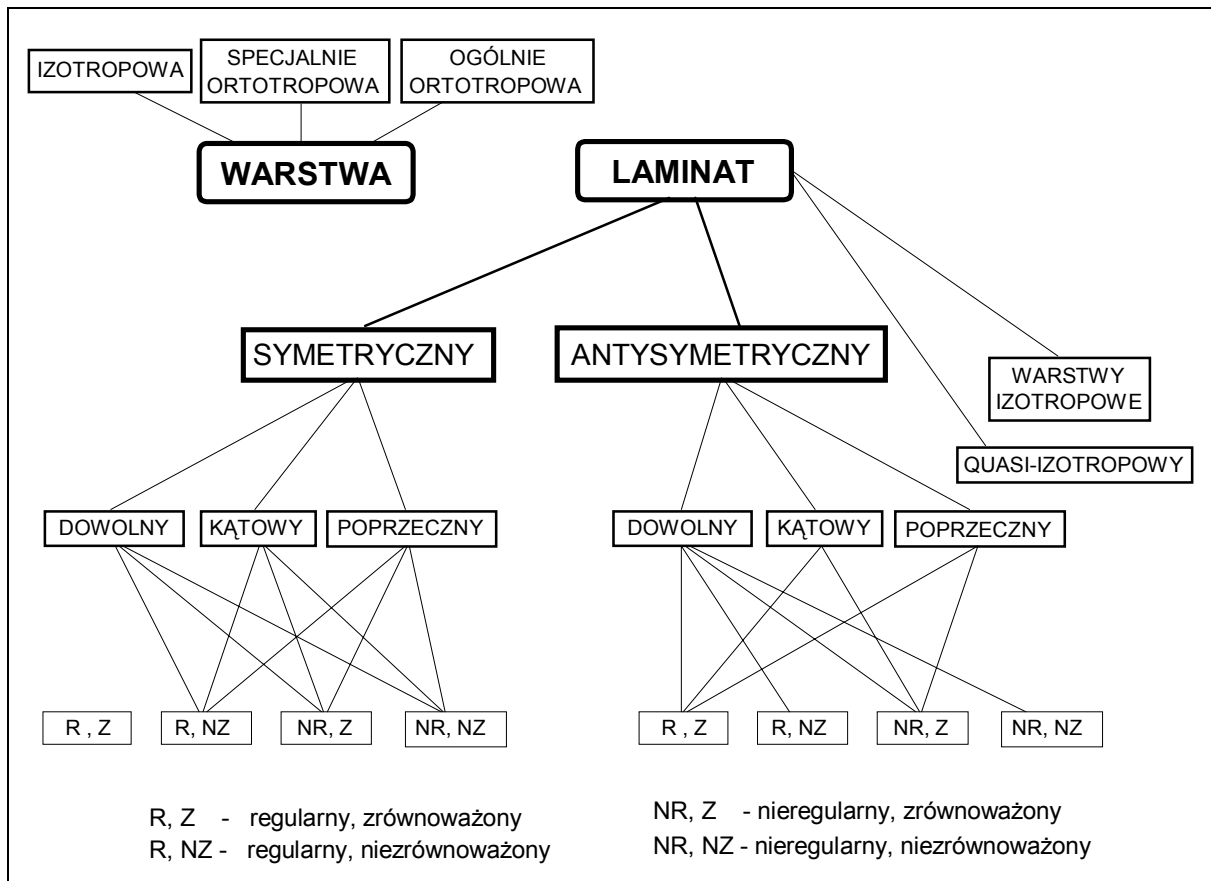
Jako dowód wystarcza przykład potwierdzający tezę - $[30^\circ / 15^\circ_2 / -40^\circ_3 / 40^\circ_3 / -15^\circ_2 / -30^\circ]$. Widać, że $v_{30} = v_{-30} = 1/12$; $v_{15} = v_{-15} = 1/6$; $v_{40} = v_{-40} = 1/4$.

^{*)} Określenie "laminat zrównoważony" używane jest w literaturze w odniesieniu do laminatów kątowych i oznacza laminaty o jednakowej ilości warstw $+\alpha$ i $-\alpha$. Definicja wprowadzona powyżej obejmuje tę sytuację jako przypadek szczególny.

5.1.2. Klasyfikacja kompozytów

Dokonanie klasyfikacji wszystkich możliwych kompozytów jest niemal niewykonalne ze wzg. na wielość kryteriów, wedle których można przeprowadzić taką klasyfikację, jak i wręcz nieograniczoną swobodę w kształtowaniu ich układu geometrycznego. Gdyby uwzględnić kompozyty hybrydowe tzn. takie, w których warstwy różnią się materiałem, to stopień komplikacji radykalnie rośnie. Klasyfikacja przedstawiona w tym rozdziale przyjmuje jako kryterium klasyfikacji cechy geometryczne kompozytów, a ponadto ogranicza się do kompozytów (pojedyncze warstwy i laminaty) najczęściej stosowanych. Klasyfikacja ta przedstawiona jest na rys. 5.1, na którym uwidoczniono także możliwe kombinacje różnych cech laminatów. Na jej podstawie, w następnych podrozdziałach będą podane macierze sztywności dla poszczególnych typów kompozytów. Dla lepszego zrozumienia tej klasyfikacji, w tabeli 5.1 zamieszczono zestawienie typów, z podaniem przykładowych kodów laminatów.

Dokonana klasyfikacja służy przede wszystkim wprowadzeniu porządku i przejrzystości w nazewnictwie laminatów (można powiedzieć, że w pewnym stopniu ma ona taki sam cel jak podział materiałów "standardowych - np. na stałe węglowe, niskowęglowe, stopowe, żeliwo, staliwo, stopy, metale kolorowe itd.). Nie można natomiast powiedzieć, że z przynależnością do każdej z wyróżnionych klas wiąże się zawsze uproszczenia w budowie np. macierzy sztywności.



Rys. 5.1. Klasyfikacja podstawowych laminatów i pojedynczych warstw.

Często bywa tak, że uproszczenia występują, ale nieograniczona dowolność w ułożeniu warstw laminatów, nawet należących do tej samej grupy, uniemożliwia ich wspólny zapis formalny i zarazem formalny zapis tych uproszczeń (przykładowo - z tych samych warstw można zbudować laminaty o kodach: $[0/90_3/0_2/90/0_2/90/0_2/90_3/0]$, $[0_2/90_3/0/90/0_2/90/0/90_3/0_2]$, $[0_3/90_3/0_2/90_2/0_2/90_3/0_3]$, itd., wszystkie należące do grupy laminatów symetrycznych, poprzecznych, zrównoważonych, a przecież różniące się liczbą warstw, ich grubością i kolejnością).

W kolejnych rozdziałach będą omówione podstawowe grupy kompozytów, wraz z możliwie najprostszymi, ogólnymi postaciami macierzy sztywności. Obliczenia do nich prowadzące będą pominięte, gdyż w wielu przypadkach są długie, a dla czytelnika zapewne nużące.

CECHY LAMINATU		KONFIGURACJA LAMINATU		
		Poprzeczna	Kątowa	Dowolna
SYMETRYCZNY	Regularny, zrównoważony	nie istnieje	nie istnieje	nie istnieje
	Regularny, niezrównoważony	0/90/0	$\alpha/-\alpha / \alpha$	0/20/0
	Nieregularny, zrównoważony	0/90 ₂ /0	$\alpha/-\alpha_2 / \alpha$	0/20 ₂ /0
	Nieregularny, niezrównoważ.	0/90 ₃ /0	$\alpha/-\alpha_3 / \alpha$	0/20 ₃ /0
ANTY-SYMETRYCZNY	Regularny, zrównoważony	0/90	$\alpha/-\alpha$	0/20/-20/90
	Regularny, niezrównoważony	nie istnieje	nie istnieje	90/0/20/-20/90/0
	Nieregularny, zrównoważony	0/90 ₂ /0 ₂ /90	$\alpha/-\alpha_2 / \alpha_2 / -\alpha$	90/0/20 ₂ /-20 ₂ /90/0
	Nieregularny, niezrównoważ.	nie istnieje	nie istnieje	90/0/20 ₃ /-20 ₃ /90/0

TABELA 5.1. Przykłady kodów typowych laminatów

5.2. Kompozyty symetryczne

Podstawową i ważną właściwością wszystkich kompozytów symetrycznych, bez względu na ich dalsze cechy, jest to, że macierz sztywności sprzężeń jest macierzą zerową

$$B_{ij} = 0 \quad (5.7)$$

Wynika to wprost z postaci równania (4.26), określającego elementy tej macierzy. Ze względu na symetrię, każdej warstwie odpowiada jej zwierciadlane odbicie względem płaszczyzny środkowej, różniące się jedynie znakiem współrzędnej środka ciężkości. Tak więc sumy odpowiednich iloczynów dla każdej pary warstw muszą się zerować.

Z tego samego powodu co powyżej, w kompozytach symetrycznych nie mogą wystąpić wypadkowe momenty termiczne, tzn.

$$\{M^T\} = \{0\} \quad (5.8)$$

To sprawia m.in., że laminaty symetryczne nie wykazują tendencji do ulegania zwichrzeniu w czasie utwardzania po procesie laminacji.

W konsekwencji równań (5.7) i (5.8) równania fizyczne dla kompozytu symetrycznego są zawsze rozprężnięte i przyjmują postać

$$\{\bar{N}\} = [A] \{\varepsilon^o\} \quad (5.9)$$

$$\{M\} = [D] \{\kappa^o\} \quad (5.10)$$

Po odwróceniu powyższych równań, odkształcenia w dowolnej warstwie laminatu wyrażają się związkiem

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1} \{\bar{N}\} + z [D]^{-1} \{M\} \quad (5.11)$$

Korzystając z równania (4.50), równania fizyczne, określające naprężenia w "k-tej" warstwie laminatu symetrycznego można zapisać w postaci

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k [A]^{-1} \{\bar{N}\} + [\bar{Q}]_k \left\{ [A]^{-1} \{N^T\} - \{\alpha\}_k \Delta T \right\} + z [\bar{Q}]_k [D]^{-1} \{M\} \quad (5.12)$$

Dla stanu tarczowego równanie to upraszcza się do postaci

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k [A]^{-1} \{\bar{N}\} + [\bar{Q}]_k \left\{ [A]^{-1} \{N^T\} - \{\alpha\}_k \Delta T \right\} \quad (5.13)$$

Dalsze uproszczenia, dotyczące w szczególności macierzy sztywności tarczowej i zginania, możliwe są dla laminatów charakteryzujących się nie tylko symetrią, ale dodatkowo innymi, specyficznymi cechami budowy geometrycznej.

5.2.1. Pojedyncze warstwy

Indywidualna warstwa, z oczywistych powodów zawsze jest symetryczna względem płaszczyzny środkowej. Nie tworzy ona oczywiście laminatu, ale dla łatwiejszego zrozumienia dalszych rozważań zostaną tu przypomniane podstawowe wiadomości jej dotyczące. W równym stopniu odnoszą się one również do specyficznego rodzaju laminatu, jakim jest układ wielu pojedynczych warstw połączonych ze sobą, identycznych pod względem materiałowym i ułożonych w identyczny sposób geometryczny. Taki laminat makroskopowo tworzy jedną warstwę. Omówiona będzie także warstwa izotropowa, która może być kompozytem (np. kompozyt z drobno pociętymi włóknami, losowo rozłożonymi w matrycy), ale z reguły nim nie jest. Układ różnych warstw izotropowych stanowi już jednak klasyczny laminat (np. bimetale), toteż celowe jest włączenie do analizy także pojedynczej warstwy izotropowej.

♦ Warstwa izotropowa

Jedynie dwie niezależne stałe sprężyste dla warstwy izotropowej to moduł Younga E i współczynnik Poissona ν . Moduł ścinania G jest zależny od dwu poprzednich. Macierz sztywności, dobrze znana z teorii sprężystości, ma postać

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} K \quad K = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (5.14)$$

Można ją także uzyskać jako szczególny przypadek anizotropii, korzystając np. ze związków (2.42), kładąc w nich $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$.

Ze względu na fakt, że materiał izotropowy jest niewrażliwy na zmianę kierunku, zredukowana i transformowana macierz sztywności muszą być oczywiście identyczne. Wykazanie tego trywialnego spostrzeżenia w oparciu o zależności obowiązujące dla materiału anizotropowego może stanowić dobry sprawdzian poprawności tych zależności. Korzystając z macierzy (5.14), natychmiast widać z równań (3.20), że współczynniki transformacyjne U_2 i U_3 wynoszą 0, zaś pozostałe przyjmują postać

$$U_1 = K \quad U_4 = K \nu \quad U_5 = K (1 - \nu) / 2 \quad (5.15)$$

Biorąc pod uwagę (5.15) i zależności transformacyjne ujęte w tabeli 3.2 łatwo stwierdzić, że prowadzą one dla przypadku izotropii do oczekiwanego rezultatu, gdyż istotnie otrzymujemy z nich, że

$$[\bar{Q}] = [Q] \quad (5.16)$$

Korzystając z równań (4.25) i (4.27) otrzymujemy macierze sztywności tarczowej i giętej

$$[A] = [Q] t \quad (5.17)$$

$$[D] = [Q] t^3 / 12 \quad (5.18)$$

♦ Warstwa kompozytowa w konfiguracji osiowej (warstwa specjalnie ortotropowa)

Zredukowana macierz sztywności $[Q]$ określona jest przez związek (2.42) i ma postać (5.19). Macierz transformowana jest w tym przypadku tożsąma z macierzą zredukowaną. Korzystając z ogólnych postaci macierzy sztywności tarczowej - równanie (4.25) i sztywności zginania - równanie (4.27), otrzymujemy szczególne postaci tych macierzy dla warstwy specjalnie ortotropowej w formie równań odpowiednio (5.20) i (5.21)

$$[Q] = [\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$[A] = [Q] t \quad (5.20)$$

$$[D] = [Q] t^3 / 12 \quad (5.21)$$

♦ **Warstwa kompozytowa w konfiguracji nieosiowej (warstwa ogólnie ortotropowa)**

Zredukowana macierz sztywności ma postać (5.19). Macierze: transformowaną, sztywności tarczowej i zginania otrzymuje się w wyniku zastosowania procedury przedstawionej na rysunku 4.5. Postaci tych macierzy dla warstwy ogólnie ortotropowej są ostatecznie następujące

$$[A] = [Q] t \quad (5.22)$$

$$[D] = [Q] t^3 / 12 \quad (5.23)$$

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że w warstwie ogólnie ortotropowej, w odróżnieniu od specjalnie ortotropowej, występuje sprzężenie styczne (tzn. sprzężenie sił osiowych N_x i N_y z odkształceniami kątowymi γ_{xy}), jak i sprzężenie normalne (sprzężenie sił stycznych N_{xy} z odkształceniami liniowymi ε_x i ε_y), gdyż A_{16} i A_{26} mają wartości różne od zera (w warstwie specjalnie ortotropowej są równe zero).

Podsumowanie

Na zakończenie rozważań dotyczących pojedynczych warstw tak izotropowych, jak i ortotropowych, należy zauważyć, że niezależnie od typu warstwy macierze sztywności tarczowej i zginania można zapisać w postaci

$$[A] = [Q] t \quad (5.24)$$

$$[D] = [Q] t^3 / 12 \quad (5.25)$$

Po odwróceniu tych zależności otrzymujemy

$$[A]^{-1} = [\bar{Q}]^{-1} / t \quad (5.26)$$

$$[D]^{-1} = [\bar{Q}]^{-1} 12 / t^3 \quad (5.27)$$

Z równania (4.54) wynika, że wektor sił termicznych w przypadku pojedynczej warstwy jest określony związkiem

$$\{N^T\} = \Delta T t [\bar{Q}] \{\alpha\} \quad (5.28)$$

Po wstawieniu powyższych zależności do równania fizycznego w postaci (5.12) i wykorzystaniu zależności macierzowej

$$[\bar{Q}] [\bar{Q}]^{-1} = [1] \quad (5.29)$$

otrzymujemy równania określające naprężenia w pojedynczej warstwie w postaci

$$\{\sigma\} = \frac{1}{t} \{N\} + z \{M\} \frac{12}{t^3} \quad (5.30)$$

Z równań (5.30) widać, że w kompozycie jednowarstwowym naprężenia całkowite, na które składają się naprężenia mechaniczne i cieplne nie zależą od różnicy temperatury utwardzania (laminacji) i eksploatacji, choć same naprężenia termiczne przy $\Delta T \neq 0$ są niezerowe.

5.2.2. Laminaty o kątowym ułożeniu warstw

Symetryczne laminaty kątowe to takie laminaty, w których warstwy są ułożone symetrycznie względem płaszczyzny środkowej i których położenie określone jest wyłącznie kątem $\pm \alpha$.

Korzystając ze wzorów transformacyjnych zamieszczonych w tabeli 3.2, strukturę transformowanych macierzy sztywności dla warstw $+\alpha$ i warstw $-\alpha$ można przedstawić następująco

$$\bar{Q}_{ij}^{+\alpha} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{ij}^{-\alpha} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & -\bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & -\bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Przypomnijmy także, że warunek symetrii powoduje, że laminat musi się składać z nieparzystej liczby warstw, którą oznaczymy symbolem N. Liczbę warstw $+\alpha$ oznaczymy P, a liczbę warstw $-\alpha$ - literą R. Muszą zachodzić warunki

$$N = P + R \quad P - R = \pm 1 \quad (5.32)$$

Objętościowy udział dowolnej "k-tej" warstwy wynosi

$$v_k = t_k / t \quad (5.33)$$

gdzie t_k - grubość warstwy "k", t - całkowita grubość laminatu.

W celu wyznaczenia **unormowanej macierzy sztywności tarczowej [A]** należy obliczyć współczynniki określone równaniem (4.41) i wykorzystać zależności podane w tabeli 4.1.

Każdy ze współczynników V_i^* można rozłożyć na część odpowiadającą warstwom $+\alpha$ i część odpowiadającą warstwom $-\alpha$. Dla przykładu określmy pierwszy z nich

$$V_1^* = \sum_{k=1}^P v_k \cos 2\alpha + \sum_{k=1}^R v_k \cos(-2\alpha) \quad (5.34)$$

Wykorzystując parzystość funkcji $\cos \alpha$ oraz związek

$$\sum_{k=1}^P v_k + \sum_{k=1}^R v_k = 1 \quad (5.35)$$

otrzymujemy

$$V_1^* = \cos 2\alpha \quad V_2^* = \cos 4\alpha \quad V_3^* = V_k \sin 2\alpha \quad V_4^* = V_k \sin 4\alpha \quad (5.36)$$

gdzie

$$V_k = \sum_{k=1}^P v_k - \sum_{k=1}^R v_k \quad (5.37)$$

Elementy unormowanej macierzy sztywności tarczowej mają wówczas postaci przedstawione poniżej w formie tabelarycznej

	1	U_2	U_3
A_{11} / t	U_1	$\cos 2\alpha$	$\cos 4\alpha$
A_{22} / t	U_1	$-\cos 2\alpha$	$\cos 4\alpha$
A_{12} / t	U_4	0	$-\cos 4\alpha$
A_{66} / t	U_5	0	$-\cos 4\alpha$
A_{16} / t	0	$1/2 V_k \sin 2\alpha$	$V_k \sin 4\alpha$
A_{26} / t	0	$1/2 V_k \sin 2\alpha$	$-V_k \sin 4\alpha$

TABELA 5.2. Unormowana macierz sztywności tarczowej dla kąтового laminatu symetrycznego.

Z postaci tabeli 5.2. wynikają dwa podstawowe wnioski :

- ♦ w kątowych laminatach symetrycznych, w ogólnym przypadku występuje sprzężenie styczne i normalne, gdyż A_{16} i A_{26} są różne od zera,
- ♦ A_{11} , A_{22} , A_{12} , A_{66} dla **każdego kąowego laminatu symetrycznego** nie zależą od objętościowego udziału warstw $\pm \alpha$, są więc takie same jak dla pojedynczej warstwy α (patrz - tabela 3.2). Ostatecznie zatem mają następującą postać

$$A_{11}/t = \bar{Q}_{11} \quad , \quad A_{22}/t = \bar{Q}_{22} \quad , \quad A_{12}/t = \bar{Q}_{12} \quad , \quad A_{66}/t = \bar{Q}_{66} \quad (5.38)$$

Elementy **macierzy sztywności zginania**, po wykorzystaniu (5.8), (5.31), (5.33) i prostych przekształceniach otrzymują postaci

$$D_{11} = \frac{\bar{Q}_{11} t^3}{12} C_N \quad \quad D_{22} = \frac{\bar{Q}_{22} t^3}{12} C_N \quad (5.39)$$

$$D_{12} = \frac{\bar{Q}_{12} t^3}{12} C_N \quad \quad D_{66} = \frac{\bar{Q}_{66} t^3}{12} C_N$$

$$D_{16} = \frac{\bar{Q}_{16} t^3}{12} (C_P - C_R) \quad \quad D_{26} = \frac{\bar{Q}_{26} t^3}{12} (C_P - C_R) \quad (5.40)$$

gdzie

$$C_N = \sum_{k=1}^N \left(v_k^3 + \frac{12}{t^2} v_k z_k^2 \right)$$

$$C_P = \sum_{k=1}^P \left(v_k^3 + \frac{12}{t^2} v_k z_k^2 \right) \quad (5.41)$$

$$C_R = \sum_{k=1}^R \left(v_k^3 + \frac{12}{t^2} v_k z_k^2 \right)$$

$$C_P + C_R = C_N \quad (5.42)$$

Dalsze uproszczenia możliwe są w przypadku szczególnych typów laminatów symetrycznych, jak laminaty regularne i zrównoważone.

♦ Laminaty symetryczne, kąowe, regularne

Regularność oznacza, że wszystkie warstwy ($k=1, 2, \dots, N$) w laminacie mają taką samą grubość, tzn.

$$t_k = t / N \quad (5.43)$$

co oznacza, że również objętościowy udział każdej warstwy jest taki sam (zauważmy, że mimo tego laminat nie jest zrównoważony) i wynosi

$$v_k = 1 / N \quad (5.44)$$

Współczynniki określone równaniami (5.37) i (5.41), po prostych przekształceniach, dają się teraz wyrazić zależnościami

$$V_k = \frac{2P}{N} - 1 \quad (5.45)$$

$$C_N = \frac{1}{N^2} + \frac{12}{N t^2} \sum_{k=1}^N z_k^2$$

$$C_P = \frac{P}{N^3} + \frac{12}{N t^2} \sum_{k=1}^P z_k^2 \quad (5.46)$$

$$C_R = \frac{R}{N^3} + \frac{12}{N t^2} \sum_{k=1}^R z_k^{c^2}$$

Analiza układu warstw w przekroju laminatu pozwala znaleźć ogólne zależności określające współrzędne środków ciężkości poszczególnych warstw. Odpowiednie obliczenia zostaną tu pominięte, a czytelnik może potraktować je jako zadanie do samodzielnego rozwiązania. Występujące w (5.46) sumy dają się w wyniku tych obliczeń wyrazić prostymi związkami

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N z_k^{c^2} &= \frac{t^2}{12} \frac{N^2 - 1}{N} \\ \sum_{k=1}^P z_k^{c^2} &= \frac{t^2}{3N^2} P (P^2 - 1) \\ \sum_{k=1}^R z_k^{c^2} &= \frac{t^2}{3N^2} R (R^2 - 1) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Współczynniki określone równaniem (5.46) po wykorzystaniu (5.47) przyjmują postać

$$C_N = 1, \quad C_P = \frac{P}{N^3} (4P^2 - 3), \quad C_R = \frac{R}{N^3} (4R^2 - 3) \quad (5.48)$$

a składowe **macierzy sztywności zginania** są określone formułami

$$D_{11} = \frac{\bar{Q}_{11} t^3}{12}, \quad D_{22} = \frac{\bar{Q}_{22} t^3}{12}, \quad D_{12} = \frac{\bar{Q}_{12} t^3}{12}, \quad D_{66} = \frac{\bar{Q}_{66} t^3}{12} \quad (5.49)$$

$$D_{16} = \frac{\bar{Q}_{16} t^3}{12} (C_P - C_R), \quad D_{26} = \frac{\bar{Q}_{26} t^3}{12} (C_P - C_R) \quad (5.50)$$

gdzie

$$C_P - C_R = \begin{cases} \frac{3N^2 - 2}{N^3} & \text{jeżeli } P = R + 1 \\ -\frac{3N^2 - 2}{N^3} & \text{jeżeli } P = R - 1 \end{cases} \quad (5.51)$$

Składowe **unormowanej macierzy sztywności tarczowej** wynoszą (rów. 5.38, 5.45, tab. 5.2. i 3.2)

$$A_{11}/t = \bar{Q}_{11}, \quad A_{22}/t = \bar{Q}_{22}, \quad A_{12}/t = \bar{Q}_{12}, \quad A_{66}/t = \bar{Q}_{66} \quad (5.52)$$

$$\frac{A_{16}}{t} = \left(\frac{2P}{N} - 1 \right) \bar{Q}_{16}, \quad \frac{A_{26}}{t} = \left(\frac{2P}{N} - 1 \right) \bar{Q}_{26} \quad (5.53)$$

♦ **Laminaty symetryczne, kątowe, zrównoważone**

Zrównoważenie laminatu oznacza, że objętościowy udział warstw $+\alpha$ i $-\alpha$ jest taki sam i wynosi

$$v_\alpha = v_{-\alpha} = 0.5 \quad (5.54)$$

Z równania (5.37) i (5.36) wynikają wówczas zależności

$$V_k = 0 \quad (5.55)$$

$$V_1^* = \cos 2\alpha, \quad V_2^* = \cos 4\alpha, \quad V_3^* = 0, \quad V_4^* = 0 \quad (5.56)$$

Biorąc powyższe pod uwagę, a także (5.38) i tabelę 5.2, otrzymujemy elementy **unormowanej macierzy sztywności tarczowej** w postaci

$$A_{11}/t = \bar{Q}_{11}, \quad A_{22}/t = \bar{Q}_{22}, \quad A_{12}/t = \bar{Q}_{12}, \quad A_{66}/t = \bar{Q}_{66} \quad (5.57)$$

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

Widać, że w porównaniu z laminatem kątowym regularnym, w laminacie zrównoważonym nie występują sprzężenia zarówno styczne, jak i normalne.

W odniesieniu do **macierzy sztywności zginania** zrównoważenie laminatu kątowego nie powoduje żadnych uproszczeń, a jej elementy są określone ogólnymi zależnościami dla laminatu symetrycznego, tzn. równaniami (5.39), (5.40) i (5.41).

5.2.3. Laminaty o poprzecznym ułożeniu warstw

Symetryczne laminaty poprzeczne charakteryzują się tym, że składają się wyłącznie z ułożonych symetrycznie względem płaszczyzny środkowej warstw określonych kątami 0° i 90° , skąd bierze się ich nazwa.

Postaci transformowanych macierzy sztywności dla warstw 0° i 90° wynikają wprost z definicji zredukowanej macierzy sztywności dla warstwy w konfiguracji osiowej i mają następującą strukturę

$$\bar{Q}_{ij}^0 = Q_{ij}^0 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{ij}^{90} = Q_{ij}^{90} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{11} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Niech N oznacza całkowitą ilość warstw, P - liczbę warstw 0° , a R - liczbę warstw 90° .

Celem wyznaczenia unormowanej macierzy sztywności tarczowej $[A]$ i macierzy sztywności zginania $[D]$, należy zastosować procedurę analogiczną do tej z pkt. 5.2.2. W jej wyniku otrzymujemy

$$V_1^* = v_0 - v_{90} \quad V_2^* = 1 \quad V_3^* = 0 \quad V_4^* = 0 \quad (5.59)$$

OW konsekwencji powyższych zależności **unormowana macierz sztywności tarczowej** w formie stabelaryzowanej przyjmuje postać

	1	U_2	U_3
A_{11}/t	U_1	$v_0 - v_{90}$	1
A_{22}/t	U_1	$v_{90} - v_0$	1
A_{12}/t	U_4	0	-1
A_{66}/t	U_5	0	-1
A_{16}/t	0	0	0
A_{26}/t	0	0	0

TABELA 5.3. Unormowana macierz sztywności tarczowej dla poprzecznego laminatu symetrycznego.

Z tabeli 5.3 wypływają dwa istotne spostrzeżenia :

- ♦ w **żadnym symetrycznym laminacie poprzecznym** nie występuje ani sprzężenie styczne, ani normalne ($A_{16} = A_{26} = 0$),
- ♦ A_{12} i A_{66} dla **każdego symetrycznego laminatu poprzecznego** nie zależą od objętościowego udziału warstw 0° i 90° , są zatem identyczne dla wszystkich laminatów należących do tej klasy i wynoszą (por. równanie (3.20) i tabela 5.3.)

$$A_{12}/t = Q_{12} \quad A_{66}/t = Q_{66} \quad (5.60)$$

Elementy **macierzy sztywności zginania** w ogólnym przypadku symetrycznego laminatu poprzecznego można zapisać w postaci (czytelnikowi pozostawmy przeprowadzenie odpowiednich obliczeń)

$$D_{11} = \frac{Q_{11}t^3}{12} \left(C_P + \frac{E_2}{E_1} C_R \right) \quad D_{22} = \frac{Q_{22}t^3}{12} \left(C_P + \frac{E_1}{E_2} C_R \right) \quad (5.61)$$

$$D_{12} = \frac{Q_{12}t^3}{12} C_N \quad D_{66} = \frac{Q_{66}t^3}{12} C_N \quad (5.62)$$

$$D_{16} = D_{26} = 0 \quad (5.63)$$

gdzie C_N , C_P , C_R są określone równaniem (5.41).

Uproszczenia w postaciach podanych macierzy występują dla specyficznych typów symetrycznych laminatów poprzecznych tzn. laminatów regularnych oraz zrównoważonych.

♦ **Laminaty symetryczne, poprzeczne, regularne**

Ze względu na formalną zgodność wszystkich rozważań dotyczących środków ciężkości poszczególnych warstw kompozytu regularnego, poprzecznego i przedstawionego wcześniej kompozytu regularnego, kąтового (warstwy 0° są formalnie równoważne warstwom $+\alpha$, a warstwy 90° - warstwom $-\alpha$), obowiązują tu zależności (5.43) - (5.48), a ponadto zachodzi związek

$$v_0 = \frac{P}{N}, \quad v_{90} = 1 - \frac{P}{N} \Rightarrow v_0 - v_{90} = \frac{2P}{N} - 1 \quad (5.64)$$

Wykorzystując wspomniane powyżej związki, a także (5.60), tabelę 5.3 i macierz (5.19) otrzymujemy składowe **unormowanej macierzy sztywności tarczowej** w postaci

$$A_{11}/t = Q_{11} \left[\frac{P}{N} + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \frac{P}{N} \right) \right] \quad A_{22}/t = Q_{22} \left[\frac{P}{N} + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - \frac{P}{N} \right) \right] \quad (5.65)$$

$$A_{12}/t = Q_{12} \quad A_{66}/t = Q_{66} \quad A_{16} = A_{26} = 0 \quad (5.66)$$

gdzie E_1 i E_2 oznaczają odpowiednio podłużny i poprzeczny moduł Younga dla warstwy ortotropowej.

Składowe **macierzy sztywności zginania** wynikają z równań (5.61), (5.62), (5.63) (z wykorzystaniem (5.48) i (5.19)) i wynoszą

$$D_{11} = \frac{Q_{11}t^3}{12} \frac{1}{N^3} \left[P(4P^2 - 3) + \frac{E_2}{E_1} R(4R^2 - 3) \right] \quad (5.67)$$

$$D_{22} = \frac{Q_{22}t^3}{12} \frac{1}{N^3} \left[P(4P^2 - 3) + \frac{E_1}{E_2} R(4R^2 - 3) \right] \quad (5.68)$$

$$D_{12} = \frac{Q_{12}t^3}{12} \quad D_{66} = \frac{Q_{66}t^3}{12} \quad D_{16} = D_{26} = 0 \quad (5.69)$$

♦ **Laminaty symetryczne, poprzeczne, zrównoważone**

Z warunku zrównoważenia wynika, że

$$v_0 = v_{90} = 0.5 \Rightarrow v_0 - v_{90} = 0 \quad (5.70)$$

i w konsekwencji - widać to z tabeli 5.3 - żaden z elementów **macierzy sztywności tarczowej** nie zależy od objętościowego udziału warstw 0° i 90° . Ostatecznie zatem mają one postać (wykorzystano tu pomocniczo równania (3.20))

$$A_{11}/t = A_{22}/t = \frac{1}{2} Q_{11} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \quad (5.71)$$

$$A_{12}/t = Q_{12} \quad A_{66}/t = Q_{66} \quad A_{16} = A_{26} = 0 \quad (5.72)$$

Zrównoważenie laminatu nie powoduje żadnych uproszczeń w ogólnej postaci **macierzy sztywności zginania**, tak więc ma ona postać określoną równaniami (5.61), (5.62) i (5.63) z wykorzystaniem współczynników określonych związkami (5.41).

5.3. Kompozyty antysymetryczne

Laminaty antysymetryczne to takie laminaty, w których dowolna warstwa o konfiguracji określonej kątem $+\alpha$ ma po przeciwnej stronie płaszczyzny środkowej swego "odpowiednika" w postaci warstwy określonej kątem $-\alpha$. Warstwy tworzące "antysymetryczną parę" mają identyczną grubość, różnią się natomiast znakiem współrzędnej "z" środków ciężkości. Laminat może być antysymetryczny tylko wówczas, gdy składa się z parzystej liczby warstw.

Przyjmuje się tradycyjnie, że antysymetrycznym odpowiednikiem warstwy 0° jest warstwa 90° i na odwrót. Należy zauważyć iż w tym przypadku pojęcie antysymetrii musi być rozumiane w sposób czysto umowny. Z geometrycznej definicji antysymetrii wynika bowiem, że warstwą antysymetryczną do warstwy 0° jest również warstwa 0° . Spełnia ona oczywiście zarazem warunek symetrii, tak więc przykładowo laminat o kodzie $[0, 0]$ byłby z punktu widzenia geometrii jednocześnie symetryczny, jak i antysymetryczny. W celu uniknięcia tej dwuznaczności, a jednocześnie wyróżnienia klasy laminatów o parzystej liczbie na przemian leżących warstw wyłącznie 0° i 90° , przyjęto w mechanice kompozytów wspomnianą na wstępie umowę.

Dla każdej pary antysymetrycznych warstw zachodzą zależności (patrz tabela 3.2)

$$\bar{Q}_{16}^\alpha = -\bar{Q}_{16}^{-\alpha} \quad , \quad \bar{Q}_{26}^\alpha = -\bar{Q}_{26}^{-\alpha} \quad (5.73)$$

Z ogólnych postaci macierzy sztywności tarczowej - rów. (5.15) oraz sztywności giętej - rów. (5.8), oraz po wykorzystaniu podanej definicji laminatu antysymetrycznego wraz ze związkami (5.73), wynika wprost wniosek o zerowaniu się **w każdym laminacie antysymetrycznym** tych elementów macierzy, które związane są ze sprzężeniem stycznym i normalnym, tzn.

$$A_{16} = 0 \quad , \quad A_{26} = 0 \quad (5.74)$$

$$D_{16} = 0 \quad , \quad D_{26} = 0 \quad (5.75)$$

Inne uproszczenia w macierzach $[A]$, $[B]$, $[D]$ w ogólnym przypadku antysymetrii laminatu nie występują i w celu określenia tych macierzy należy wykorzystać procedurę przedstawioną na rysunku 4.5. Są one natomiast możliwe w laminatach o specjalnej konfiguracji warstw, a mianowicie antysymetrycznych laminatach kątowych i poprzecznych.

5.3.1. Laminaty o kątowym ułożeniu warstw, zrównoważone

Z podanych na początku tego rozdziału definicji, określeń i własności laminatów wynika, że każdy laminat antysymetryczny, kątowy musi także być zrównoważony.

Transformowane macierze sztywności dla warstw $+\alpha$ i $-\alpha$, tworzących laminat kątowy mają postać (5.31). Wynikające z niej równości

$$\bar{Q}_{ij}^{+\alpha} = \bar{Q}_{ij}^{-\alpha} \quad i, j = 1, 2 \quad \wedge \quad i = j = 6 \quad (5.76)$$

powodują, że dla wskaźników jak w (5.76) elementy macierzy transformowanej \bar{Q}_{ij} występujące pod znakami sum w wyrażeniach (4.25), (4.26) i (4.27) mogą być wyłączone przed te znaki. Ostatecznie zatem **unormowana macierz sztywności tarczowej** ma następujące składowe

$$A_{16} = 0 \quad , \quad A_{26} = 0 \quad (5.77)$$

$$A_{11}/t = \bar{Q}_{11} \quad , \quad A_{22}/t = \bar{Q}_{22} \quad , \quad A_{12}/t = \bar{Q}_{12} \quad , \quad A_{66}/t = \bar{Q}_{66} \quad (5.78)$$

Z tych samych powodów co powyżej, a także dlatego, że suma współrzędnych środków ciężkości wszystkich warstw w laminacie antysymetrycznym musi się zerować, elementy **macierzy sztywności sprzężeń** przyjmują postać

$$B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = 0 \quad (5.79)$$

$$B_{i6} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{i6})_k t_k z_k^c \quad i = 1, 2 \quad (5.80)$$

Postać **macierzy sztywności giętej** w laminacie antysymetrycznym, kątowym upraszcza się jedynie na skutek warunku (5.76), a jej elementy są określone następująco

$$D_{ij} = 2\bar{Q}_{ij} \sum_{k=1}^{N/2} \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad \wedge \quad i = j = 6 \quad (5.81)$$

$$D_{16} = 0, D_{26} = 0 \quad (5.82)$$

♦ **Laminaty antysymetryczne, kątowe, regularne**

Równania (5.77) i (5.78) nie ulegają żadnym uproszczeniom w przypadku laminatów regularnych, zatem **macierz sztywności tarczowej** jest określona związkami

$$\begin{aligned} A_{11}/t &= \bar{Q}_{11} & A_{22}/t &= \bar{Q}_{22} \\ A_{12}/t &= \bar{Q}_{12} & A_{66}/t &= \bar{Q}_{66} \end{aligned} \quad (5.83)$$

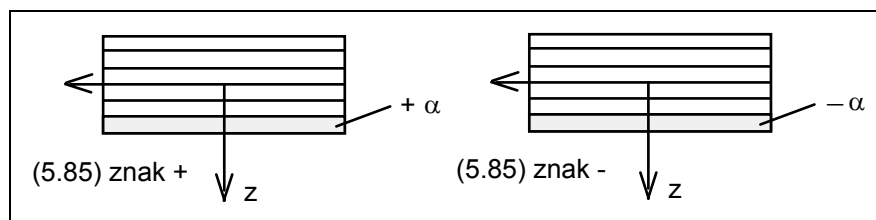
$$A_{16} = 0, A_{26} = 0$$

Analiza położenia środków ciężkości poszczególnych warstw i wykorzystanie definicji regularności laminatu (5.43) pozwalają zapisać elementy **macierzy sztywności sprzężeń** następująco

$$B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = 0 \quad (5.84)$$

$$B_{16} = \pm \frac{\bar{Q}_{16} t^2}{2N}, \quad B_{26} = \pm \frac{\bar{Q}_{26} t^2}{2N} \quad (5.85)$$

Wyrażenia (5.85) należy brać ze znakiem "+" wówczas, gdy skrajną warstwą laminatu po dodatniej stronie osi "z" jest warstwa $+\alpha$. W przeciwnym przypadku obowiązuje znak "-". Ilustruje to poniższy rysunek.



Analizując współrzędne środków ciężkości warstw, można także pokazać, że **macierz sztywności giętej** dla laminatu antysymetrycznego, kąтового i regularnego można wyrazić związkami

$$D_{11} = \frac{\bar{Q}_{11} t^3}{12} \quad D_{22} = \frac{\bar{Q}_{22} t^3}{12} \quad (5.86)$$

$$D_{12} = \frac{\bar{Q}_{12} t^3}{12} \quad D_{66} = \frac{\bar{Q}_{66} t^3}{12}$$

$$D_{16} = 0 \quad D_{26} = 0 \quad (5.87)$$

Czytelnik może potraktować wyprowadzenie związków (5.85) i (5.86) jako zadanie do samodzielnego rozwiązania.

Warto zwrócić większą uwagę na postać elementów B_{16} i B_{26} macierzy sprzężeń. Z (5.85) widać, że ich wartości zależą odwrotnie proporcjonalnie od ilości warstw N , tworzących laminat. Tak więc dla laminatu o ustalonej grubości t wraz ze wzrostem liczby warstw maleje efekt sprzężenia stanu tarczowego i giętnego. Z tego punktu widzenia nie jest obojętne, czy z czterech lamin $+\alpha$ i czterech lamin $-\alpha$ wykonany zostanie antysymetryczny laminat o kodzie $[-\alpha_2/\alpha_2/-\alpha_2/\alpha_2]$ czy też laminat o kodzie $[-\alpha/\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha/\alpha]$. Grubość obu jest taka sama, ale ilość warstw w pierwszym wynosi $N=4$, a w drugim $N=8$. Sprzężenie stanu tarczowego i giętnego w drugim przypadku będzie zatem mniej widoczne.

5.3.2. Laminaty o poprzecznym ułożeniu warstw, zrównoważone

Transformowane macierze sztywności dla warstw 0° i 90° mają postaci

$$\bar{Q}_{ij}^0 = Q_{ij}^0 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

$$\bar{Q}_{ij}^{90} = Q_{ij}^{90} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{11} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Przypomnijmy, że każdy laminat antysymetryczny, poprzeczny musi być także zrównoważony, tak więc z równań (4.39) i (4.41) wynikają zależności

$$v_0 = v_{90} = 0.5 \quad (5.89)$$

$$V_1^* = V_3^* = V_4^* = 0 \quad , \quad V_2^* = 1 \quad (5.90)$$

Korzystając z tabeli 4.1 oraz równań (3.20), **macierz sztywności tarczowej** dla **dowolnego** laminatu antysymetrycznego, poprzecznego można zapisać w następującej postaci

$$A_{11}/t = A_{22}/t = \frac{1}{2} Q_{11} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \quad (5.91)$$

$$A_{12}/t = Q_{12} \quad A_{66}/t = Q_{66} \quad A_{16} = A_{26} = 0 \quad (5.92)$$

Macierz sprzężeń otrzymujemy z równania (4.26) z wykorzystaniem macierzy sztywności warstw 0° i 90° - rów. (5.88). Zauważmy, że (4.26) dla laminatu poprzecznego można przedstawić w postaci sumy

$$B_{ij} = Q_{ij}^0 \sum_{k=1}^{N/2} (t_k z_k^c)_0 + Q_{ij}^{90} \sum_{k=1}^{N/2} (t_k z_k^c)_{90} \quad (5.93)$$

Ze względu na to, że każdej warstwie 0° odpowiada warstwa 90° o tej samej grubości, ale przeciwnym znaku współrzędnej środka ciężkości - musi zachodzić relacja

$$\sum_{k=1}^{N/2} (t_k z_k^c)_0 = - \sum_{k=1}^{N/2} (t_k z_k^c)_{90} \quad (5.94)$$

Łącząc (5.93) i (5.94) otrzymujemy

$$B_{ij} = (Q_{ij}^0 - Q_{ij}^{90}) \sum_{k=1}^{N/2} (t_k z_k^c)_0 \quad (5.95)$$

Ostatecznie zatem elementy **macierzy sztywności sprzężeń** dla dowolnego antysymetrycznego laminatu poprzecznego wyrażają się zależnościami

$$B_{12} = B_{66} = B_{16} = B_{26} = 0 \quad (5.96)$$

$$B_{11} = (Q_{11} - Q_{22}) \sum_{k=1}^{N/2} (t_k z_k^c)_0 \quad (5.97)$$

$$B_{22} = -B_{11} \quad (5.98)$$

Macierz sztywności zginania jest określona równaniem (4.27), które w analizowanym przypadku można zapisać jako sumę dwóch członów, z których pierwszy związany jest z warstwami 0° , a drugi warstwami 90°

$$D_{ij} = Q_{ij}^0 \sum_{k=1}^{N/2} \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right)_0 + Q_{ij}^{90} \sum_{k=1}^{N/2} \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right)_{90} \quad (5.99)$$

Wykorzystując ponownie to, że każdej warstwie 0° odpowiada warstwa 90° o tej samej grubości, ale przeciwnym znaku współrzędnej środka ciężkości, jak również fakt występowania tych współrzędnych w obu sumach w równaniu (5.99) w drugiej potęgde, łatwo wykazać iż musi zachodzić warunek

$$\sum_{k=1}^{N/2} \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right)_0 = \sum_{k=1}^{N/2} \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right)_{90} = \sum_{k=1}^{N/2} \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \quad (5.100)$$

Ostatnie z powyższych wyrażeń oznacza, że sumowanie należy wykonać po wszystkich warstwach łączących po jednej stronie osi "z". Łącząc (5.99) i (5.100) otrzymujemy

$$D_{ij} = (Q_{ij}^0 + Q_{ij}^{90}) S_k \quad \text{gdzie} \quad S_k = \sum_{k=1}^{N/2} \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \quad (5.101)$$

Ostatecznie **macierz sztywności giętej** ma składowe

$$D_{11} = (Q_{11} + Q_{22}) S_k \quad D_{22} = D_{11} \quad (5.102)$$

$$D_{12} = 2 Q_{12} S_k \quad D_{66} = 2 Q_{66} S_k$$

$$D_{16} = D_{26} = 0 \quad (5.103)$$

♦ **Laminaty antysymetryczne, poprzeczne, regularne**

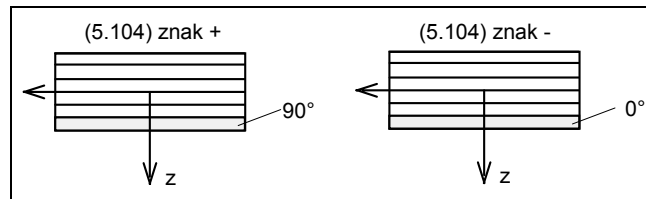
Macierz sztywności tarczowej określona jest równaniami (5.91) i (5.92).

Macierz sztywności sprzężeń wynika z wcześniejszych rozważań tego rozdziału oraz analizy współrzędnych środków ciężkości warstw 0° , którą pozostawimy jako zadanie dla czytelników. Jako rezultat odpowiednich obliczeń otrzymujemy następującą postać macierzy $[B]$

$$B_{11} = \pm \frac{Q_{11} t^2}{4N} \left(\frac{E_2}{E_1} - 1 \right) \quad B_{22} = -B_{11} \quad (5.104)$$

$$B_{12} = B_{66} = B_{16} = B_{26} = 0$$

Przy obliczaniu składowej B_{11} znak "+" obowiązuje wówczas, gdy skrajną warstwą laminatu po dodatniej stronie osi "z" jest warstwa 90° . W przypadku, gdy warstwą skrajną jest warstwa 0° , należy wziąć B_{11} ze znakiem "-". Pokazano to na poniższym rysunku.



Macierz sztywności zginania otrzymuje się wprost z (5.101) i (5.102), po uwzględnieniu, że grubości wszystkich warstw są jednakowe ($t_k = t/N$). Analizując położenie środków ciężkości warstw można ponadto wykazać, że zachodzi związek

$$\sum_{k=1}^{N/2} z_k^c{}^2 = \frac{t^2}{24} \frac{(N^2 - 1)}{N} \quad (5.105)$$

Współczynnik S_k wynosi teraz $S_k = t^3/12$, a elementy macierzy $[D]$ wyrażają się związkami

$$D_{11} = \frac{Q_{11} t^3}{24} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \quad D_{22} = D_{11}$$

$$D_{12} = \frac{Q_{12} t^3}{12} \quad D_{66} = \frac{Q_{66} t^3}{12} \quad (5.106)$$

$$D_{16} = D_{26} = 0$$

Elementy macierzy sztywności tarczowej, sprzężeń i zginania dla laminatów symetrycznych i antysymetrycznych, kątowych i poprzecznych przedstawiono w formie tabel w Dodatku 1.

5.4. Kompozyty quasi-izotropowe

Kompozytami **quasi-izotropowymi** określa się kompozyty o takiej budowie, że elementy macierzy sztywności tarczowej $[A]$ w dowolnym układzie odniesienia (x, y) spełniają warunki

$$A_{11} = A_{22} \quad (5.107)$$

$$A_{16} = A_{26} \quad (5.108)$$

$$A_{66} = \frac{1}{2} [A_{11} - A_{12}] \quad (5.109)$$

Zauważmy, że w materiale izotropowym (por. pkt. 5.2.1) macierz sztywności $[Q]$, jak i w konsekwencji macierz sztywności tarczowej $[A]$ spełniają takie właśnie warunki. Formalne podobieństwo macierzy $[A]$ dla materiałów izotropowych i pewnej szczególnej klasy kompozytów sprawia, że zostały one nazwane quasi-izotropowymi. Nazwa ta, jak to będzie pokazane, jest w pełni adekwatna także i z tego powodu, że makroskopowo kompozyty quasi-izotropowe zachowują się jak materiały izotropowe, tzn. ich charakterystyki materiałowe nie zmieniają się przy obrocie układu odniesienia. Są to jednak w dalszym ciągu kompozyty z ich wszystkimi charakterystycznymi cechami, jak choćby tą, że naprężenia po grubości zmieniają się skokowo od warstwy do warstwy (na skutek różnych sztywności warstw), co różni je od "zwykłego" materiału izotropowego - stąd w nazwie przedrostek "quasi".

Klasycznym przykładem kompozytu quasi-izotropowego jest kompozyt o matrycy zbrojonej losowo rozłożonymi włóknami, co oznacza jednakowe prawdopodobieństwo ich rozmieszczenia w dowolnym kierunku. Można także wyobrazić sobie zamiast jednej warstwy losowo zbrojonej, laminat o wielu warstwach jednokierunkowo zbrojonych, ale losowo rozłożonych po grubości. W pierwszym przypadku przyjmuje się, a w drugim można to udowodnić, że współczynniki określone równaniem (4.41) zerują się

$$V_i^* = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.110)$$

Biorąc to pod uwagę oraz korzystając z tabeli 4.1. możemy wyznaczyć macierz sztywności tarczowej. Jej składowe mają postać

$$A_{11}/t = A_{22}/t = U_1 \qquad A_{66}/t = U_5 \qquad (5.111)$$

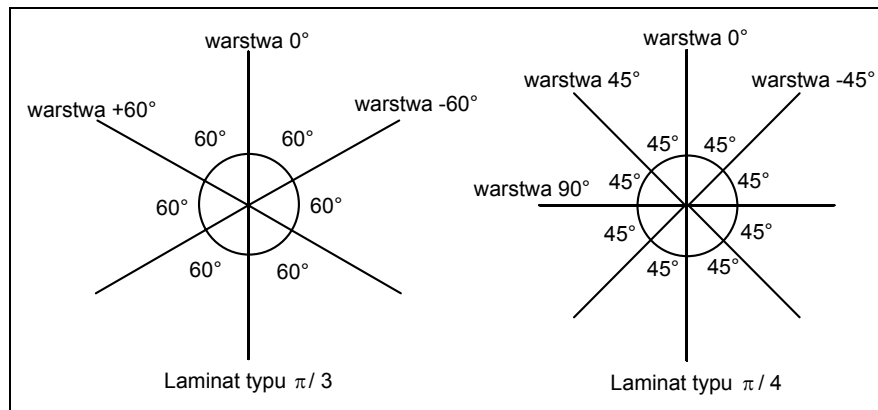
$$A_{16} = A_{26} = 0 \qquad A_{12}/t = U_4 \qquad (5.112)$$

Spełnienie warunków (5.107) i (5.108) jest natychmiast widoczne, zaś warunek (5.109) jest łatwy do wykazania po wstawieniu za U_i wielkości wynikających ze związków (3.20).

Zauważmy, że elementy macierzy $[A]$ wyrażają się jedynie przez U_1 , U_4 i U_5 , a zatem wielkości niezmiennicze dla warstwy kompozytu przy jej obrocie względem dowolnego układu odniesienia. Stanowi to dowód niezmienniczości także macierzy sztywności tarczowej, a jednocześnie dowód quasi-izotropowości kompozytu.

Cechę quasi-izotropii posiadają nie tylko wspomniane powyżej kompozyty o losowym rozkładzie włókien w warstwie, czy też warstw w laminacie, ale także "standardowe" laminaty warstwowe o bardzo specyficznym ułożeniu warstw w przekroju. Podstawowe sekwencje warstw dla tej klasy laminatów mają kody $[0 / \pm\pi/3]$ i $[0 / \pm\pi/4 / 90]$. Na ich bazie można tworzyć inne laminaty (np. $[60 / 0 / -60]$, $[90 / 45 / 0 / -45]$ itp.) quasi-izotropowe.

Zauważmy, że w dla pierwszej sekwencji - kąty między kierunkami włókien wynoszą $\pi/3$ [rd], a dla drugiej $\pi/4$ [rd] - pokazano to na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Podstawowe typy laminatów quasi-izotropowych.

Liczba warstw w pierwszym przypadku wynosiła trzy, a w drugim cztery. Uogólniając te spostrzeżenia można powiedzieć, że dowolny laminat o "m" grupach warstw (przez grupę warstw należy rozumieć zbiór wszystkich warstw o tej samej konfiguracji, nie koniecznie połączonych ze sobą w warstwę lub warstwy), pomiędzy kierunkami których zawarty jest kąt π/m [rd] jest quasi-izotropowy, pod warunkiem, że objęściowy udział tych warstw czyni zadość równaniom (5.110). Laminat o pierwszej sekwencji warstw nosi w związku z tym nazwę laminatu " $\pi/3$ ", a drugi " $\pi/4$ ".

W celu wyznaczenia quasi-izotropowych stałych inżynierskich zastosujemy procedurę opisaną w pkt. 4.1.5 rozdziału 4. Zapišmy (5.111) - (5.112) w postaci macierzy

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ & U_1 & 0 \\ & & U_5 \end{bmatrix} t \qquad (5.113)$$

Macierz odwrotna do macierzy $[A]$ ma ogólną postać

$$A'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{11}^2 - A_{12}^2} & \frac{A_{12}}{A_{11}^2 - A_{12}^2} & 0 \\ & \frac{A_{11}}{A_{11}^2 - A_{12}^2} & 0 \\ & & \frac{1}{A_{66}} \end{bmatrix} \qquad (5.114)$$

Korzystając z (5.113) i (5.114) wyznaczamy na podstawie równań (4.44) poszukiwane quasi-izotropowe stałe inżynierskie

$$E_x = E_y = E = 2U_5 \left(1 + \frac{U_4}{U_1} \right) \quad (5.115)$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu = \frac{U_4}{U_1} \quad G_{xy} = G = U_5$$

Wyrażają się one poprzez niezmienniki, są więc niezależne od konfiguracji laminatu, a zależą jedynie od rodzaju materiału kompozytowego. Mamy więc identyczną sytuację jak dla konwencjonalnych materiałów izotropowych. Laminaty quasi-izotropowe mają nad nimi jednak tę zaletę, że konstruując odpowiednio laminat (tzn. dobierając właściwy materiał i ułożenie warstw) można uzyskać te same wartości stałych inżynierskich co dla materiału klasycznego, przy kilkudziesięcioprocentowej oszczędności na ciężarze - (patrz - przykład 2).

5.5. Kompozyty o warstwach izotropowych

Rozważmy bardzo szczególny przypadek materiału kompozytowego, a mianowicie laminat zbudowany z N warstw izotropowych. Ze względu na izotropię rozróżnianie zredukowanej i transformowanej macierzy sztywności traci sens. Macierz sztywności dla "k-tej" warstwy ma zgodnie z (5.14) postać

$$[Q]_k = \begin{bmatrix} 1 & \nu_k & 0 \\ \nu_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_k)/2 \end{bmatrix} K_k \quad K_k = \frac{E_k}{(1-\nu_k^2)} \quad (5.116)$$

Dla laminatów o dowolnym ułożeniu warstw macierze sztywności tarczowej $[A]$, sprzężeń $[B]$ i giętej $[D]$ należy wyznaczyć z ogólnych wzorów określających te macierze tzn. (4.25), (4.26) i (4.27).

Laminatem symetrycznym nazywamy w omawianym przypadku laminat, którego warstwy symetrycznie położone względem płaszczyzny środkowej mają takie same grubości oraz moduł Younga i współczynnik Poissona. Z ogólnych rozważań dotyczących symetrii laminatów wynika, że macierz sprzężeń $[B]$ jest wówczas macierzą zerową. Inne istotne uproszczenia nie występują.

5.6. Przykłady

◆ Przykład 1

Wyznaczyć odkształcenia i naprężenia w warstwach laminatu $[0, 90_2]_s$ wykonanego z kompozytu grafit/epoksyd (T300/epoksyd Vicotex174), dla którego stałe materiałowe wynoszą $E_1=137$ GPa, $E_2=10.04$, GPa, $G_{12}=4.8$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, poddanego działaniu jednoosiowego obciążenia o wartości $N = 1$ MN/m. Grubość pojedynczej warstwy kompozytowej wynosi $t_1=2.5 \times 10^{-4}$ m.

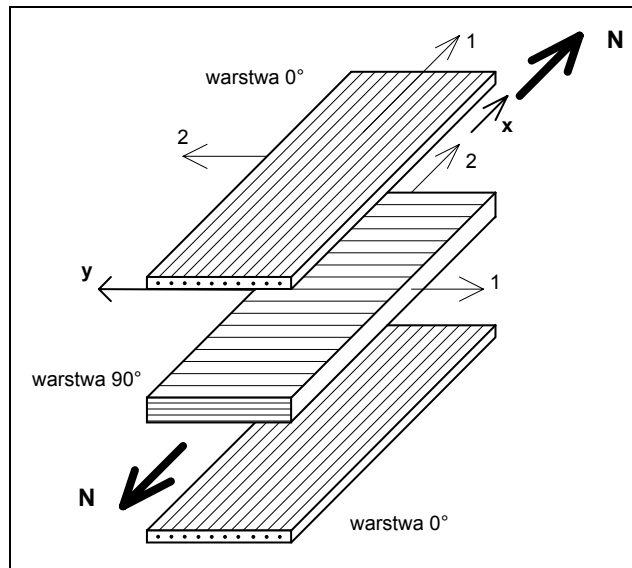
Analizowany laminat jest symetryczny, w związku z czym macierz sztywności sprzężeń $[B]$ zeruje się (równanie (5.5)) - nie występuje w nim zatem sprzężenie stanów tarczowych i giętych. Biorąc pod uwagę sposób jego obciążenia stwierdzamy, że mamy do czynienia wyłącznie ze stanem tarczowym tzn. wektor momentów wypadkowych $\{M\} = \{0\}$. Nie uwzględniamy ponadto obciążeń termicznych, co oznacza, że wektor sił termicznych $\{N^T\} = \{0\}$.

Odształcenia wyrażają się zatem równaniem (5.11) zredukowanym do postaci

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1} \{N\} \quad (5.117)$$

gdzie wektor sił wypadkowych ma postać

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.118)$$



Rys. 5.3. Laminat $[0, 90_2]_s$ poddany jednoosiowemu rozciąganiu.

Odształcenia wyrażają się zatem równaniem (5.11) zredukowanym do postaci

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1} \{N\} \quad (5.117)$$

gdzie wektor sił wypadkowych ma postać

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.118)$$

Na mocy założenia przyjętego w klasycznej teorii laminacji (rozdz. 4), odształcenia we wszystkich warstwach są takie same.

Naprężenia warstwowe są różne dla różnych warstw, ale stałe po ich grubości. Wyznaczamy je z równania (5.13), które w tym przypadku redukuje się do postaci

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k [A]^{-1} \{N\} \quad (5.119)$$

Tak więc chcąc określić odształcenia i naprężenia należy wyznaczyć macierz sztywności tarczowej $[A]$ dla całego laminatu, a ponadto transformowane macierze sztywności $[\bar{Q}]$ dla poszczególnych warstw.

Wykorzystamy wyniki uzyskane w przykładzie 1 rozdziału 4. Macierz sztywności warstwy w jej głównych osiach materiałowych ma postać (4.60)

$$[Q] = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 [MPa] \quad (5.120)$$

Macierze transformowane dla warstw 0° i 90° otrzymujemy wprost z (5.120) bez konieczności stosowania zależności transformacyjnych (tabela 3.2), co wynika z faktu, że układ osi materiałowych (1, 2) warstwy 0° i układ odniesienia (x, y) pokrywają się, a w przypadku warstwy 90° osie (1, 2) "zamieniają się miejscami". Tak więc transformowane macierze sztywności mają składowe

$$[\bar{Q}]_0 = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 [MPa] \quad (5.121)$$

$$[\bar{Q}]_{90} = \begin{bmatrix} 10.11 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 137.91 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 [MPa]$$

Macierz sztywności tarczowej $[A]$ dla laminatu $[0, 90_2]_S$ otrzymana przez pomnożenie macierzy unormowanej (tab. 4.2 (dla $n=2$) - rozdz. 4, przykł. 1) przez grubość laminatu $t=6t_1=1.5 \times 10^{-3}$ [m], ma postać

$$[A] = \begin{bmatrix} 79.06 & 4.55 & 0 \\ 4.55 & 142.96 & 0 \\ 0 & 0 & 7.2 \end{bmatrix} \left[\frac{MN}{m} \right] \quad (5.122)$$

zaś macierz do niej odwrotna ma postać

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 126.72 & -4.0 & 0 \\ -4.0 & 70.08 & 0 \\ 0 & 0 & 1388.89 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \left[\frac{MN}{m} \right]^{-1} \quad (5.123)$$


Korzystając z równania (5.117) otrzymujemy następujące wartości odkształceń

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 126.72 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_y &= -4.0 \times 10^{-4} \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (5.124)$$

Naprężenia warstwowe obliczamy z równania (5.119) z uwzględnieniem transformowanych macierzy sztywności (5.121). Ostatecznie naprężenia warstwowe wynoszą

$$\{\sigma\}_0 = \begin{Bmatrix} 1746 \\ 34.4 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad \{\sigma\}_{90} = \begin{Bmatrix} 126.9 \\ -16.7 \\ 0 \end{Bmatrix} [MPa] \quad (5.125)$$

W celu sprawdzenia poprawności uzyskanych wyników sprawdzimy warunek równowagi sił (na jednostkę długości), który ma postać



The diagram shows a cross-section of a laminate with total thickness t . It consists of two layers: a top layer of thickness t_0 and a bottom layer of thickness t_90 . A normal force N is applied to the left. The force is decomposed into N_0 acting on the top layer and N_{90} acting on the bottom layer. The equation $N = 2N_0 + N_{90}$ is shown to the right of the diagram.

$$N = 2N_0 + N_{90} \quad (5.126)$$

Elementarne rachunki pozwalają zapisać równanie równowagi w postaci

$$\frac{N}{t} = \frac{2N_0}{2t_0} \frac{2t_0}{t} + \frac{N_{90}}{t_{90}} \frac{t_{90}}{t} \quad (5.127)$$

Lub w równoważnej postaci naprężeniowej

$$\sigma_x = \sigma_{x0} v_0 + \sigma_{x90} v_{90} \quad (5.128)$$

gdzie σ_x oznacza naprężenie wypadkowe, a v_0 i v_{90} objętościowe udziały warstw, odpowiednio 0° i 90° , które wynoszą $v_0 = 1/3$, $v_{90} = 2/3$.

Wstawiając do (5.128) naprężenia warstwowe σ_{x0} i σ_{x90} ze związków (5.125) otrzymamy naprężenie wypadkowe

$$\sigma_x = 666.6 \text{ MPa}$$

Odpowiadająca mu siła wypadkowa, która musi być równa wartości obciążenia zewnętrznego, wynosi

$$N = \sigma_x t = 1 \text{ MN/m}$$

i jest w istocie równa sile obciążającej.

Określmy jeszcze redystrybucję siły zewnętrznej między warstwy 0° i 90° . Siły te wynoszą:

$$N_0 = \sigma_{x0} 2t_0 = \sigma_{x0} 2t_1 = 0.873 \text{ MN/m}$$

$$N_{90} = \sigma_{x90} t_{90} = \sigma_{x90} 4t_1 = 0.127 \text{ MN/m}$$

Widać zatem, że udział warstwy 90° (dwukrotnie grubszej od łącznej grubości warstw 0°) w przenoszeniu obciążenia jest bardzo mały - ok. 13%. Główną rolę odgrywają tu warstwy 0°, a więc te, w których włókna są równoległe do kierunku obciążenia. Potwierdza to wspomnianą w rozdz. 1 dominującą rolę włókien w przenoszeniu sił, a zarazem znikome pod tym względem znaczenie matrycy (w warstwie 90° właśnie matryca poddana jest działaniu siły zewnętrznej). Problematyka ta będzie szerzej przedstawiona w rozdz. 7.

Zauważmy jeszcze, że mimo iż obciążenie N działa w kierunku osi x , to w obu warstwach pojawiły się niezerowe naprężenia normalne σ_y . Wobec braku sił zewnętrznych o kierunku osi y , wypadkowe naprężenie σ_y musi być oczywiście równe zero. Korzystając w odniesieniu do naprężeń σ_y z równania analogicznego do (5.128), łatwo sprawdzić, że istotnie tak jest.

Z (5.124) widać też, że skutkiem symetrycznej budowy jest brak odkształceń kątowych laminatu.

◆ Przykład 2.

Wyznaczyć charakterystyki materiałowe quasi-izotropowego kompozytu grafit/epoksyd o losowo rozłożonych warstwach (bądź losowo rozłożonych włóknach w warstwie) o stałych technicznych w głównych osiach materiałowych wynoszących: $E_1 = 170 \text{ GPa}$, $E_2 = 10 \text{ GPa}$, $G_{12} = 5 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.25$ ($\nu_{21} = (E_2 / E_1) \nu_{12} = 0.0147$).

Poszukiwane wielkości wyznaczymy korzystając z zależności (5.115). Należy więc najpierw obliczyć wartości elementów zredukowanej macierzy sztywności $[Q]$ - równanie (5.19), a następnie niezmienników U_1 , U_4 i U_5 - równanie (3.20). W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 170.63 \text{ GPa}, & Q_{22} &= 10.037 \text{ GPa}, & Q_{12} &= 2.51 \text{ GPa}, & Q_{66} &= 5 \text{ GPa}, \\ U_1 &= 70.88 \text{ GPa}, & U_4 &= 21.97 \text{ GPa}, & U_5 &= 24.46 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Quasi-izotropowe stałe sprężyste wynoszą

$$E = 64.1 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.31, \quad G = U_5 = E / [2 (1 + \nu)] = 24.5 \text{ GPa}.$$

Przeglądając tablice stałych materiałowych konwencjonalnych materiałów izotropowych łatwo zauważyć, że powyższe wartości są bardzo zbliżone do charakterystyk aluminium, dla którego wynoszą one

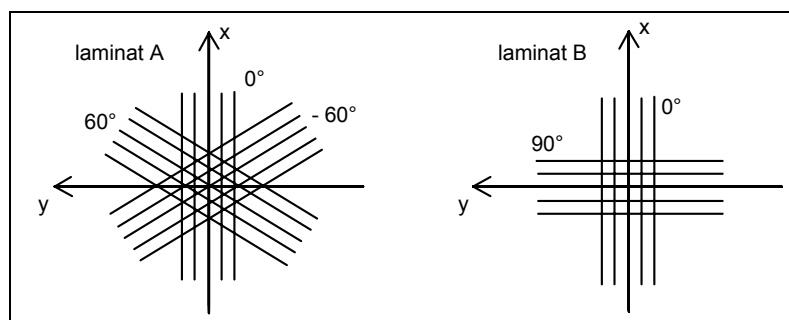
$$E \approx 70 \text{ GPa}, \quad \nu \approx 0.32, \quad G \approx 26 \text{ GPa}.$$

Tak więc zamiast elementu aluminiowego można zastosować element kompozytowy quasi-izotropowy o niemal identycznych cechach sprężystych, ale znacznie od niego lżejszy. W przypadku aluminium i kompozytu grafit/epoksyd różnica w ciężarze właściwym wynosi ok. 40 procent !

◆ Przykład 3.

Obliczyć unormowane macierze sztywności tarczowej $[A]$ dla laminatów $[-60, 0, 60]$ - typ A i $[0, 90]$ - typ B - w układach : wyjściowym i obróconym względem niego o 30°.

Wyjściowy ukł. współrzędnych (x, y) wynika wprost z kodów laminatów - pokazano to na poniższym rysunku.



Laminat A

Biorąc pod uwagę, że objętościowy udział wszystkich warstw jest taki sam i wynosi $1/3$, wszystkie współczynniki określone równaniem (4.41) zerują się. Dzięki temu elementy unormowanej macierzy sztywności tarczowej mają postać

$$A_{11}/t = A_{22}/t = U_1 \quad A_{12}/t = U_4 \quad A_{66}/t = U_5 \quad A_{16} = A_{26} = 0$$

Wyrażają się one poprzez niezmienniki, a ponadto spełnione są warunki quasi-izotropii (5.107)-(5.109). Tak więc laminat $[-60/0/60]$ jest quasi-izotropowy.

Laminat B

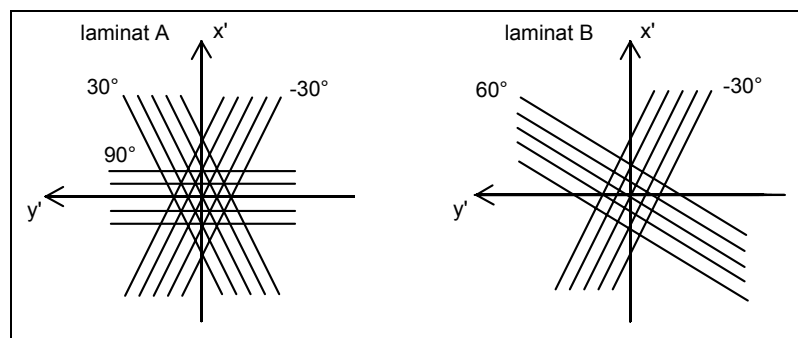
Zastosowanie identycznej procedury, jak dla laminatu A prowadzi do następujących rezultatów

$$V_1^* = V_3^* = V_4^* = 0 \quad V_2^* = 1$$

$$A_{11}/t = A_{22}/t = U_1 + U_3 \quad A_{12}/t = U_4 - U_3 \quad A_{66}/t = U_5 - U_3 \quad A_{16} = A_{26} = 0$$

Dwa pierwsze warunki quasi-izotropii są spełnione, natomiast warunek (5.109) nie jest spełniony, co widać po wykonaniu elementarnych obliczeń.

Przechodząc do nowego układu (x', y') obróconego wzg. (x, y) , powinniśmy uzyskać potwierdzenie tego, że laminat A jest quasi-izotropowy, a laminat B nie jest, tzn. macierz sztywności tarczowej dla pierwszego powinna pozostać nie zmieniona, a dla drugiego przeciwnie. W układzie (x', y') laminaty A i B mają kody odpowiednio $[90/-30/30]$ i $[-30/60]$.



Postępując wg identycznych zasad jak poprzednio, otrzymujemy dla laminatu A

$$V_1^* = V_2^* = V_3^* = V_4^* = 0$$

Macierz sztywności tarczowej nie ulega zatem zmianie przy obrocie układu, co oznacza, że laminat jest quasi-izotropowy.

W przypadku laminatu B

$$V_1^* = V_3^* = 0 \quad V_2^* = -0.5 \quad V_4^* = -0.866$$

$$A_{11}/t = A_{22}/t = U_1 - 0.5 U_3 \quad A_{12}/t = U_4 + 0.5 U_3 \quad A_{66}/t = U_5 + 0.5 U_3$$

$$A_{16}/t = -0.866 U_3 \quad A_{26}/t = 0.866 U_3$$

Macierz sztywności tarczowej w układzie nowym różni się od tej w układzie wyjściowym, laminat B nie jest więc laminatem quasi-izotropowym.

