

ROZDZIAŁ 4

ROZDZIAŁ 4

NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W LAMINACIE KLASYCZNA TEORIA LAMINACJI

Przedmiotem rozważań tego rozdziału będzie laminat, rozumiany jako zbiór warstw trwale ze sobą połączonych. Warstwy w laminacie są tak ustawione względem siebie i zarazem przyjętego arbitralnie układu odniesienia, aby uzyskać takie charakterystyki sztywnościowe laminatu, które umożliwiają formowanie elementów konstrukcyjnych zdolnych do przenoszenia obciążenia o dowolnym kierunku. O cechach sprężystych laminatu decydują dwa czynniki - dobór materiału, z którego ma on być wykonany i sekwencja ułożenia warstw w laminacie. Z punktu widzenia mechaniki interesujący jest tylko drugi czynnik, gdyż podstawowym zagadnieniem w analizie kompozytów laminatowych jest to, w jaki sposób cechy indywidualnych warstw determinują własności kompozytu. W odniesieniu do pojedynczych warstw wprowadzono pojęcie głównych osi materiałowych i związanej z nimi konfiguracji osiowej warstwy. O położeniu tych osi decydował kierunek włókien w warstwie. W przypadku kompozytów wielowarstwowych pojęcie takie nie da się z oczywistych powodów zdefiniować, zatem ich opis zawsze odbywa się w dowolnie przyjętym układzie współrzędnych, który z punktu widzenia poszczególnych warstw jest z reguły układem nieosiowym. Metoda uwzględniania własności indywidualnych warstw tworzących kompozyt i pozwalająca na tej podstawie opisać własności kompozytu nosi nazwę **klasycznej teorii laminacji**. Niekiedy można spotkać określenie **klasyczna teoria płyt laminatowych**, co jest uzasadnione faktem wykorzystywania w teorii laminacji założeń typowych dla teorii płyt cienkich.

4.1. Klasyczna teoria laminacji

4.1.1. Założenia i podstawy teorii płyt cienkich

W klasycznej teorii laminacji przyjmuje się następujące założenia

- ◆ laminat składa się z warstw połączonych ze sobą w sposób nierozzerwalny, a połączenia są nieskończenie cienkie (mają zerową grubość) i nie zezwalają na ścinanie międzywarstwowe. Oznacza to, że odkształcenia przebiegające po grubości kompozytu są ciągłe i żadna warstwa nie może przemieszczać się względem innej (nie występują poślizgi). Kompozyt jako całość tworzy makroskopowo jedną warstwę, ale o własnościach będących wypadkową własności tworzących go warstw,
- ◆ obowiązuje teoria płyt cienkich, tzn. przyjmuje się hipotezę Kirchhoffa-Love'a, mówiącą, że
 - linia prosta i prostopadła do powierzchni środkowej pozostaje prosta i prostopadła po przyłożeniu obciążenia działającego w płaszczyźnie środkowej (tzw. **stan tarczowy**), jak i obciążenia wywołującego zginanie (tzw. **stan giętny**), co oznacza, że w ukł. (x, y, z) - rys. 4.1

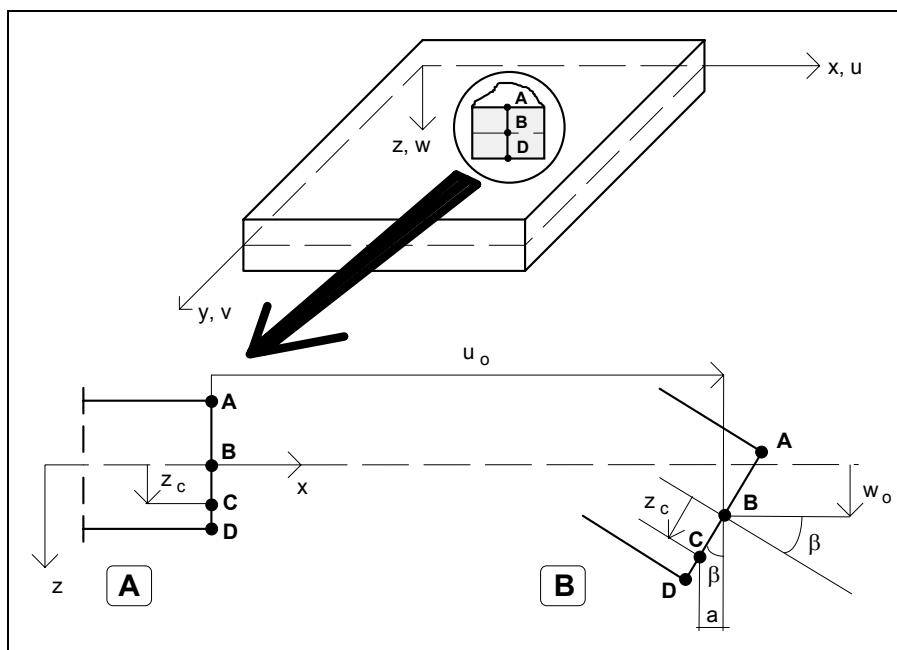
$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.1)$$

- odcinek normalny do powierzchni środkowej nie zmienia swojej długości, tzn.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (4.2)$$

- ◆ obowiązuje założenie o małych przemieszczeniach.

Na rys. 4.1 u, v, w oznaczają przemieszczenia w kierunku osi odpowiednio x, y, z . Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej w kierunku osi x oznaczono jako u_0 , a w kierunku osi z - w_0 .



Rys. 4.1. Przesunięcie punktów w płaszczyźnie (x, y) : A. stan początkowy, B. stan odkształcony

Przesunięcie dowolnego punktu C w kierunku osi x wynosi

$$u_c = u_o - a \quad (4.3)$$

Na mocy założenia o małych przemieszczeniach

$$a = z_c \sin \beta \cong z_c \beta \quad (4.4)$$

Równanie (4.3) ma wówczas postać

$$u_c = u_o - z_c \beta \quad (4.5)$$

gdzie β oznacza kąt nachylenia stycznej do powierzchni środkowej do osi x i wynosi

$$\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (4.6)$$

Dla dowolnego punktu "z" leżącego wzdłuż grubości laminatu, przemieszczenie w kierunku x wynosi

$$u = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (4.7)$$

Identyczne rozumowanie dla płaszczyzny (y, z) pozwala zapisać przemieszczenie punktu w kierunku osi y w postaci

$$v = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad (4.8)$$

Powyższe zależności wynikające z hipotezy Kirchhoffa powodują, że zlinearyzowane równania geometryczne Cauchy'ego przyjmują (w odniesieniu do płyty) następującą postać

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \quad (4.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \quad (4.11)$$

Odształcenia określone równaniami (4.9)-(4.11) można zdekomponować na odkształcenia powierzchni środkowej i krzywizny powierzchni środkowej, a odpowiadające im tensory odkształcenia zapisać w następującej postaci

- ◆ tensor odkształceń powierzchni środkowej

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

- ◆ tensor krzywizn powierzchni środkowej

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Ostatecznie zatem tensor odkształcenia zapiszemy w postaci sumy dwóch powyższych

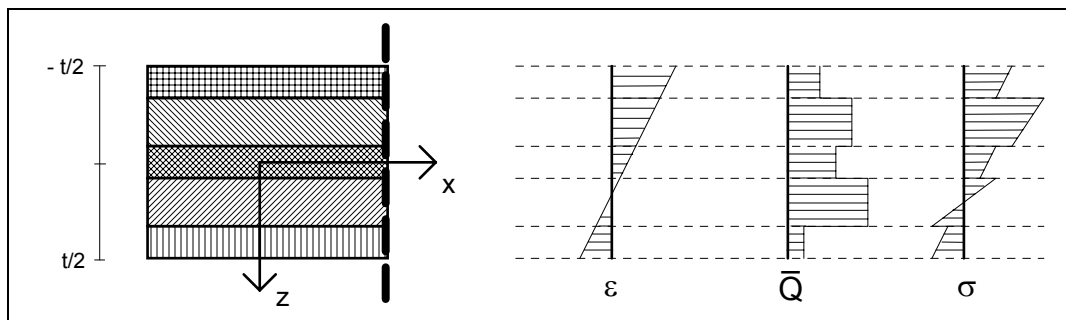
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Istotnym wnioskiem płynącym z równania (4.14) jest ten, że odkształcenia zmieniają się po grubości laminatu liniowo. W dalszej części rozdziału będzie pokazane, że w przypadku stanów tarczowych (brak zginania) i dla określonych klas laminatów są wręcz stałe po grubości.

Korzystając z (4.14), równania fizyczne (3.14) można zapisać dla "k-tej" warstwy laminatu w postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [\bar{Q}]_k z \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Jeśli uwzględnić liniową zmianę odkształceń po grubości laminatu, fakt że sztywności warstw go tworzących mogą być (i prawie zawsze są) różne, a także związek (4.15), to dla hipotetycznego laminatu o zmiennych sztywnościach warstw, rozkłady odkształceń i naprężeń po grubości laminatu mogą wyglądać tak, jak pokazano na rys. 4.2.



Rys. 4.2. Przykładowy rozkład naprężeń po grubości laminatu.

4.1.2. Wypadkowe siły i momenty w laminacie

Naprężenia w laminacie określa się jako wielkość uśrednioną naprężeń warstwowych po grubości laminatu, tzn.

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k dz \quad (4.16)$$

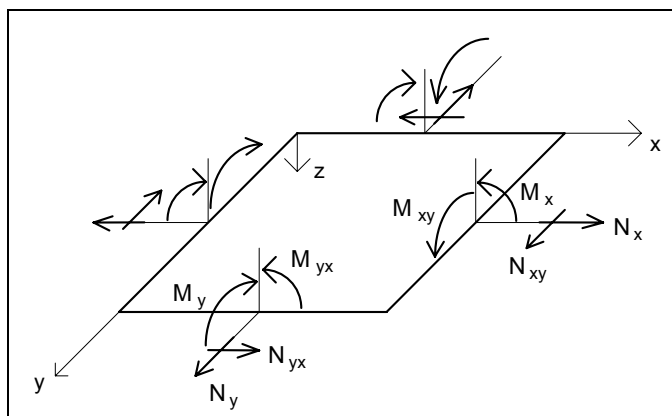
gdzie $\bar{\sigma}_i$ oznacza "i-tą" składową naprężenia średniego w laminacie, σ_i^k - "i-tą" składową naprężenia w "k-tej" warstwie laminatu, zaś t jest grubością laminatu.

Zazwyczaj w miejsce naprężeń średnich wprowadza się pojęcie **sił i momentów wypadkowych** (sił i momentów na jednostkę szerokości przekroju). Siły i momenty wypadkowe w płaszczyźnie laminatu pokazano na rys. 4.3.

Siły i momenty wypadkowe określone są następującymi równaniami

$$N_i = \bar{\sigma}_i t = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k dz \quad \text{siły wypadkowe w laminacie} \quad (4.17)$$

$$M_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k z dz \quad \text{momenty wypadkowe w laminacie} \quad (4.18)$$



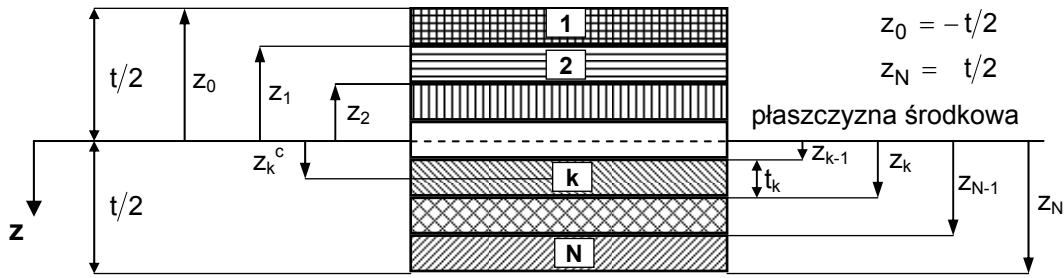
Rys. 4.3. Siły i momenty wypadkowe w płaszczyźnie laminatu.

Korzystając z addytywności całkowania i oznaczeń jak na rys. 4.4 - przedstawiającym układ warstw w przekroju laminatu - równania (4.17) i (4.18) można zapisać następująco

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (4.19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (4.20)$$

Na rys. 4.4 wprowadzono następujące oznaczenia: z_k^c - środek ciężkości "k-tej" warstwy, t_k - grubość "k-tej" warstwy, t - całkowita grubość laminatu, N - ilość warstw w laminacie.



Rys. 4.4. Przekrój laminatu.

Po uwzględnieniu związków fizycznych dla "k-tej" warstwy (równanie (4.15))- równania wypadkowych sił i momentów - (4.19) i (4.20) - przyjmują poniższe postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} dz \right) + \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} z dz \right) \quad (4.21)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} z dz \right) + \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} z^2 dz \right) \quad (4.22)$$

Biorąc pod uwagę, że transformowana macierz sztywności dla dowolnej "k-tej" warstwy nie zmienia się po jej grubości (choć oczywiście może się zmieniać od warstwy do warstwy), można wyłączyć ją przed znaki całek. Dalsze uproszczenia wynikają z faktu, że odkształcenia i krzywizny powierzchni środkowej są takie same dla wszystkich warstw i nie zależą od zmiennej z. Mogą więc być wyłączone zarówno przed znaki sumowania jak i całek. Równania (4.21) i (4.22) przyjmą wówczas postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1}) \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

W klasycznej teorii laminacji wprowadza się następujące określenia na wyrażenia ujęte w nawiasy w równaniach (4.23) i (4.24)

◆ **macierz sztywności tarczowej**

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (4.25)$$

◆ **macierz sztywności sprężenia**

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k z_k^c \quad (4.26)$$

◆ **macierz sztywności zginania**

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \quad (4.27)$$

Ze względu na symetrię transformowanej macierzy sztywności i postaci równań określających macierze $[A]$, $[B]$, $[D]$, wszystkie te macierze są oczywiście, również symetryczne.

Ogólną procedurę wyznaczania macierzy sztywności dla laminatu, składającego się z warstw tego samego materiału o stałych inżynierskich E_1 , E_2 , G_{12} i ν_{12} pokazano na rysunku 4.5.

Ostatecznie wypadkowe siły i momenty dla laminatu można przedstawić w postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

lub też w skróconej postaci symbolicznej

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Macierz B_{ij} wywołuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego w laminacie. Tak więc w ogólnym przypadku laminatu o całkowicie dowolnej budowie - stanom tarczowym (dla przykładu siła skupiona działająca w płaszczyźnie laminatu) towarzyszą stany giętne (zginanie, zwichrzenie) i odwrotnie.

W większości przypadków, typowych i najczęściej stosowanych klas laminatów (przez klasę rozumie się tu grupę laminatów o specyficznym układzie kątowym warstw i sekwencji ich ułożenia), przedstawionych w dalszej części rozdziału, sprzężenie stanów tarczowych i giętnych nie występuje, w wyniku czego stany tarczowe można opisać macierzą sztywności tarczowej $[A]$, a stany giętne macierzą $[D]$.

4.1.3. Podatność w laminatach

W poprzednim rozdziale określono macierze sztywności dla laminatu. Pojawia się naturalne pytanie o postać macierzy podatności.

W przypadku pojedynczej warstwy kompozytowej, czy to w konfiguracji osiowej, czy też zupełnie dowolnej, odpowiedź była oczywista i prosta - macierz podatności jest macierzą odwrotną do macierzy sztywności, odpowiednio - zredukowanej i transformowanej. W rozdziale 2 i 3 podano odpowiednie "przepisy" określające różne postaci macierzy podatności.

W przypadku laminatu sytuacja jest bardziej skomplikowana. Aby to wykazać, wystarczy odwrócić związku fizyczne w postaci (4.30). Odwrócenie pierwszego z równań daje

$$\{\varepsilon^o\} = [A]^{-1}\{N\} - [A]^{-1}[B]\{\kappa^o\} \quad (4.31)$$

Podstawiając ten związek do drugiego z równań (4.30) i dokonując elementarnych przekształceń otrzymujemy związek między krzywiznami powierzchni środkowej i wypadkowymi siłami i momentami

$$\{\kappa^o\} = [H]^{-1}\{M\} - [H]^{-1}[B][A]^{-1}\{N\} \quad ; \quad [H] = [D] - [B][A]^{-1}[B] \quad (4.32)$$

Równanie (4.31) po wykorzystaniu (4.32) przyjmuje postać

$$\{\varepsilon^o\} = ([A]^{-1} + [A]^{-1}[B][H]^{-1}[B][A]^{-1})\{N\} + (-[A]^{-1}[B][H]^{-1})\{M\} \quad (4.33)$$

Wprowadzając następujące oznaczenia macierzy występujących w równaniach (4.32) i (4.33)

$$[A'] = [A]^{-1} + [A]^{-1}[B][H]^{-1}[B][A]^{-1} \quad [B'] = -[A]^{-1}[B][H]^{-1} \quad (4.34)$$

$$[B''] = -[H]^{-1}[B][A]^{-1} = [B'] \quad [D'] = [H]^{-1}$$

otrzymujemy poszukiwane równania odwrotne do (4.30) w postaci

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Otrzymane rezultaty pokazują, że żadna z macierzy $[A']$, $[B']$, $[D']$ nie jest macierzą odwrotną do "odpowiadającej" jej macierzy sztywności. Z tego względu w odniesieniu do laminatu nie operuje się w ogólnym przypadku pojęciem macierzy podatności.

Powyższe komplikacje znikają w przypadku laminatów, w których nie występuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego, tzn. gdy macierz sztywności $[B] = [0]$. Z równań (4.34) wynika, że wówczas

$$[A'] = [A]^{-1} \quad [B'] = [0] \quad [D'] = [D]^{-1} \quad (4.36)$$

4.1.4. Macierze sztywności jako funkcje niezmienników

Bardzo "zgrabny", a przy tym ułatwiający zrozumienie charakterystyk sprężystych laminatu, sposób wyznaczania składowych macierzy $[A]$, $[B]$ i $[D]$ wynika z zastosowania funkcji kątów wielokrotnych i wielkości niezmienniczych dla warstwy kompozytowej (rozdział 3.2.1.).

Zilustrowany on będzie na przykładzie macierzy sztywności tarczowej $[A]$. Odgrywa ona w mechanice kompozytów specjalną rolę, gdyż w przypadku laminatów o budowie, która eliminuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego (tzn. $[B] = [0]$), obciążonych wyłącznie siłami działającymi w płaszczyźnie laminatu, daje pełny opis jego cech sprężystych - z równań (4.28), (4.29) pozostaje bowiem wówczas jedynie równanie

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Z sytuacją opisaną powyżej mamy często do czynienia w badaniach doświadczalnych kompozytów, w których z reguły znane są siły, a mierzone odkształcenia.

Ogólne określenie elementów macierzy $[A]$ podaje równanie (4.25). Widać, że w celu wyznaczenia sztywności tarczowej należy skorzystać z transformowanych macierzy sztywności dla wszystkich warstw tworzących laminat. W charakterze przykładu, obliczymy składową A_{11} . Korzystając ze wzorów transformacyjnych podanych w tab. 3.2 i równania (4.25) otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{Q}_{11}^1 t_1 + \dots + \bar{Q}_{11}^N t_N = U_1 t_1 + \dots + U_1 t_N + \\ &+ (U_2 \cos 2\theta_1 t_1 + \dots + U_2 \cos 2\theta_N t_N) + (U_3 \cos 4\theta_1 t_1 + \dots + U_3 \cos 4\theta_N t_N) = \\ &= U_1 t + U_2 (\cos 2\theta_1 t_1 + \dots + \cos 2\theta_N t_N) + U_3 (\cos 4\theta_1 t_1 + \dots + \cos 4\theta_N t_N) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Wprowadźmy pojęcie **objętościowego udziału warstwy** w całym laminacie, zdefiniowanego jako

$$v_w = \frac{V_w}{V_L} = \frac{At_w}{At} = \frac{t_w}{t} \quad \sum_{k=1}^N v_k = 1 \quad (4.39)$$

Równanie (4.38) można wówczas zapisać w postaci

$$A_{11} = t \left[U_1 + U_2 (v_1 \cos 2\theta_1 + \dots + v_N \cos 2\theta_N) + U_3 (v_1 \cos 4\theta_1 + \dots + v_N \cos 4\theta_N) \right] \quad (4.40)$$

Wprowadźmy następujące współczynniki, zależne tylko od konfiguracji i udziału objętościowego warstw

$$V_1^* = \sum_{k=1}^N v_k \cos 2\theta_k \quad V_2^* = \sum_{k=1}^N v_k \cos 4\theta_k \quad (4.41)$$

$$V_3^* = \sum_{k=1}^N v_k \sin 2\theta_k$$

$$V_4^* = \sum_{k=1}^N v_k \sin 2\theta_k$$

Każdy z powyższych współczynników, ze względu na warunek (4.39), musi spełniać nierówności

$$-1 \leq V_i^* \leq 1 \quad (4.42)$$

Pierwsza składowa macierzy sztywności tarczowej (4.40) ma wówczas postać

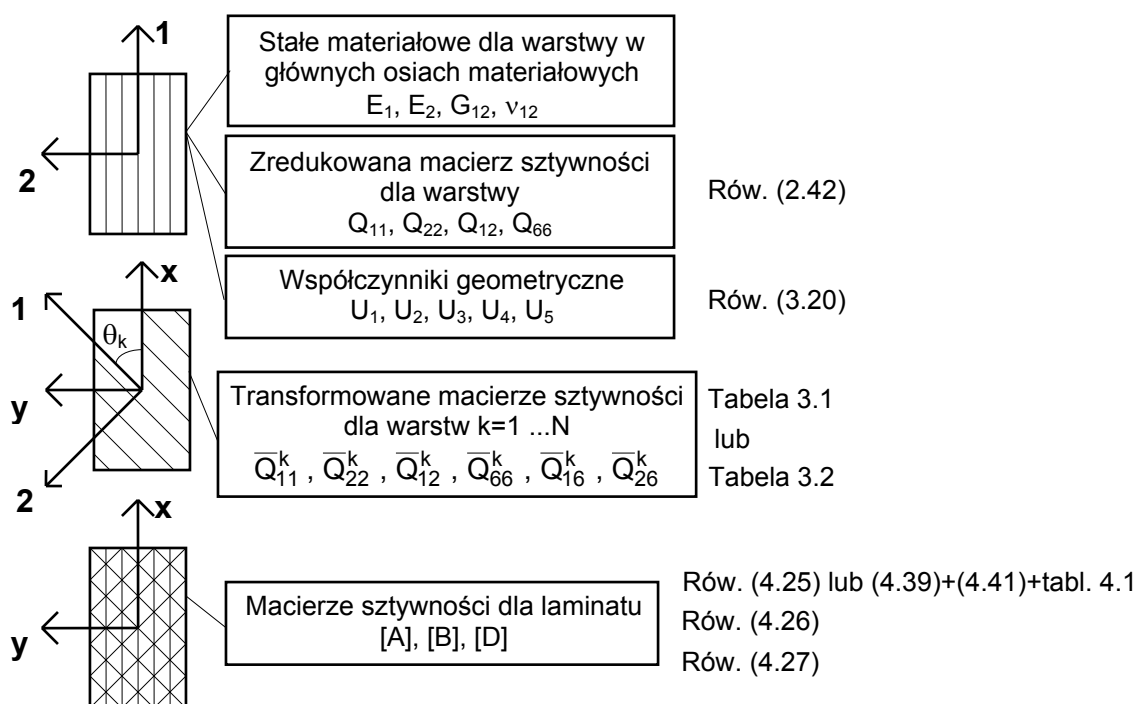
$$A_{11}/t = U_1 + U_2 V_1^* + U_3 V_2^* \quad (4.43)$$

W analogiczny sposób można wyznaczyć pozostałe składowe macierzy $[A]$. Przedstawiono je w tabeli 4.1, która ma identyczną strukturę, jak tabela 3.2 dla transformowanej macierzy sztywności warstwy. Tak więc sztywności tarczowe laminatu można bezpośrednio porównywać z odpowiednimi sztywnościami tworzących go warstw, co daje dobry obraz wpływu poszczególnych warstw na sztywność globalną laminatu.

Należy tu jeszcze poczynić krótką uwagę dotyczącą terminologii. Macierz $[A]$, jak to już powiedziano, określa się mianem **macierzy sztywności tarczowej**, natomiast macierz powstałą przez podzielenie wszystkich wartości $[A]$ przez grubość laminatu t - **unormowaną macierzą sztywności tarczowej**, unormowaną w tym sensie, że jej elementy mają taki sam wymiar, jak elementy macierzy zredukowanej i transformowanej (tzn. wymiar naprężenia).

	1	U_2	U_3
A_{11}/t	U_1	V_1^*	V_2^*
A_{22}/t	U_1	$-V_1^*$	V_2^*
A_{12}/t	U_4	0	$-V_2^*$
A_{66}/t	U_5	0	$-V_2^*$
A_{16}/t	0	$1/2 V_3^*$	V_4^*
A_{26}/t	0	$1/2 V_3^*$	$-V_4^*$

TABELA 4.1. Unormowana macierz sztywności tarczowej laminatu.



Rys. 4.5. Ogólna procedura wyznaczania macierzy sztywności dla laminatu.

4.1.5. Stałe inżynierskie

Ze względu na możliwości doświadczalnej weryfikacji stałych inżynierskich, zostanie tu podany sposób określania tych stałych tylko dla laminatów, w których nie występuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego. Zakłada się jednocześnie, że obciążenie laminatu stanowią siły (naprężenia), działające w jego płaszczyźnie. Mówiąc bardzo precyzyjnie, należałoby zatem mówić o tarczowych stałych inżynierskich.

Korzystając z odwróconego równania (4.27), związku między siłą wypadkową i naprężeniem średnim w laminacie (4.17), a także wykonując dla laminatu serię testów, analogicznych do tych, pokazanych na rys. 3.5 dla pojedynczej warstwy, otrzymamy następujące związki określające stałe inżynierskie w płaszczyźnie laminatu

$$E_x^L = \frac{1}{A'_{11} t} \quad E_y^L = \frac{1}{A'_{22} t} \quad G_{xy}^L = \frac{1}{A'_{66} t} \quad (4.44)$$

$$\nu_{xy}^L = -A'_{21} t E_x^L \quad \eta_{x,xy}^L = A'_{61} t E_x^L \quad \eta_{y,xy}^L = A'_{62} t E_y^L$$

Pozostałe inżynierskie wynikają z symetrii macierzy $[A']$ i wynoszą

$$\nu_{yx}^L = \nu_{xy}^L \frac{E_y^L}{E_x^L} \quad \eta_{xy,x}^L = \eta_{x,xy}^L \frac{G_{xy}^L}{E_x^L} \quad \eta_{xy,y}^L = \eta_{y,xy}^L \frac{G_{xy}^L}{E_y^L} \quad (4.45)$$

Procedura wyznaczenia stałych inżynierskich w płaszczyźnie laminatu jest następująca

- ◆ wyznaczyć macierz sztywności tarczowej $[A]$ wg procedury pokazanej na rys. 4.5,
- ◆ wyznaczyć macierz $[A']$ przez odwrócenie macierzy $[A]$, zgodnie z zasadami odwracania macierzy,
- ◆ wyznaczyć stałe inżynierskie wg (4.44) i (4.45).

4.2. Teoria laminacji z uwzględnieniem wpływu temperatury

W rozdziale 1.4.3 wspomniano o procesie utwardzania laminatu, który zachodzi w temperaturze powyżej stu stopni Celsjusza. Jeżeli temperatura w jakiej laminat jest wykorzystywany różni się od temperatury utwardzania to w analizie naprężeń powinny być uwzględnione efekty tym wywołane.

W liniowej teorii sprężystości odkształcenia całkowite są sumą odkształceń czysto mechanicznych i odkształceń cieplnych tzn.

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j + \alpha_i \Delta T \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4.46)$$

gdzie ΔT oznacza różnicę między temperaturą eksploatacji, a temperaturą utwardzania, zaś α_i są współczynnikami rozszerzalności cieplnej. W głównych osiach materiałowych istnieją tylko współczynniki rozszerzalności liniowej tzn. α_1 i α_2 .

Związek odwrotny do (4.46) ma postać

$$\sigma_i = Q_{ij} (\varepsilon_j - \alpha_j \Delta T) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4.47)$$

Człon $Q_{ij} \alpha_j \Delta T$ oznacza naprężenia termiczne w stanie bezodkształceniowym laminatu - tzw. naprężenia resztkowe.

Tak więc związek fizyczny dla warstwy w głównych osiach materiałowych ma postać

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

Biorąc pod uwagę laminat, naprężenia w jego "k-tej" warstwie, wyrażają się w osiach laminatu (x, y) związkiem

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix}_k \quad (4.49)$$

gdzie α_x , α_y i α_{xy} to tzw. pozorne współczynniki rozszerzalności cieplnej, które otrzymuje się poprzez zastosowanie odpowiedniej transformacji (dodatniej lub ujemnej) współczynników α_1 i α_2 , analogicznie jak dla tensora odkształceń.

Związek fizyczny (4.49) zapisany macierzowo w postaci

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k - [\bar{Q}]_k \{\alpha\}_k \Delta T \quad (4.50)$$

wraz z równaniem (4.13), zapisanym dla "k-tej" warstwy

$$\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon^o\} + \mathbf{z} \{\kappa^o\} \quad (4.51)$$

po zastosowaniu procedury identycznej z tą dla klasycznej teorii laminacji (rozdz. 4.1.2), prowadzi to do wypadkowych sił i momentów w postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

gdzie

$$\{N^T\} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k t_k \quad (4.54)$$

oznacza wektor wypadkowych sił termicznych, natomiast

$$\{M^T\} = \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k t_k z_k^c \quad (4.55)$$

oznacza wektor **wypadkowych momentów termicznych**.

Przenosząc w równaniach (4.52) i (4.53) wypadkowe siły i momenty termiczne na lewe strony, można je traktować jak równoważne siły i momenty mechaniczne. Równania te przyjmują wówczas postaci

$$\{\bar{N}\} = \{N + N^T\} = [A] \{\varepsilon^o\} + [B] \{\kappa^o\} \quad (4.56)$$

$$\{\bar{M}\} = \{M + M^T\} = [B] \{\varepsilon^o\} + [D] \{\kappa^o\} \quad (4.57)$$

Wielkości \bar{N}_i i \bar{M}_i noszą nazwy, odpowiednio - **fikcyjnych sił i momentów wypadkowych**. Podobnie jak w klasycznej teorii laminacji - (4.56) i (4.57) można zapisać wspólnie w postaci

$$\begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

lub też po odwróceniu

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

przy czym macierze $[A']$, $[B']$, $[D']$ określone są równaniami (4.34).

4.3. Przykłady

◆ Przykład 1

Wyznaczyć wartości stałych inżynierskich dla laminatu o kodzie $[0, 90_n]_s$ w zależności od ilości warstw 90° dla kompozytu grafit/epoksyd (T 300 / epoksyd Vicotex 174), dla którego stałe materiałowe wynoszą $E_1=137$ GPa, $E_2=10.04$ GPa, $G_{12}=4.8$ GPa, $\nu_{12}=0.3$.

W związku z symetrią laminatu wartości stałych inżynierskich możemy wyznaczyć z równań (4.44). Wymagają one znajomości macierzy sztywności tarczowej $[A]$. Do jej określenia wykorzystamy procedurę pokazaną na rys. 4.5.

- Zredukowana macierz sztywności dla pojedynczej warstwy jest określona równaniem (2.42). Ma ona następującą postać

$$[Q] = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \text{ [GPa]} \quad (4.60)$$

- Z równań (3.20) obliczamy wartości współczynników U_i . Otrzymujemy wówczas (w [GPa])

$$U_1 = 58.665 \quad U_2 = 63.902 \quad U_3 = 15.344 \quad U_4 = 18.378 \quad U_5 = 20.144$$

- Z równań (4.39) i (4.41) wyznaczamy parametry geometryczne laminatu.

Uwzględniając, że ogólna liczba warstw wynosi $N = 2n+2$, liczba warstw 0° - 2, a warstw 90° - $2n$, objętościowe udziały warstw 0 i 90° oraz współczynniki V_i^* , wynoszą:

$$v_o = 2 / (2n + 2) \quad v_{90} = 2n / (2n + 2)$$

$$V_1^* = v_o - v_{90} = (2 - 2n) / (2n + 2) \quad V_2^* = v_o + v_{90} = 1 \quad V_3^* = V_4^* = 0$$

- Elementy macierzy sztywności tarczowej $[A]/t$ wyznaczamy z tabeli 4.1 (w [GPa]).

Elementy A_{12} i A_{66} nie zależą od objętościowych udziałów warstw i wynoszą

$$A_{12}/t = 3.034 = Q_{12} \quad A_{66}/t = 4.8 = Q_{66}$$

elementy A_{16} i A_{26} ze względu na zerowanie się V_3^* i V_4^* są równe zero

elementy A_{11} i A_{22} zależą od udziału warstw i wynoszą

$$A_{11}/t = 74.009 + 63.902 V_1^* \quad A_{22}/t = 74.009 - 63.902 V_1^*$$

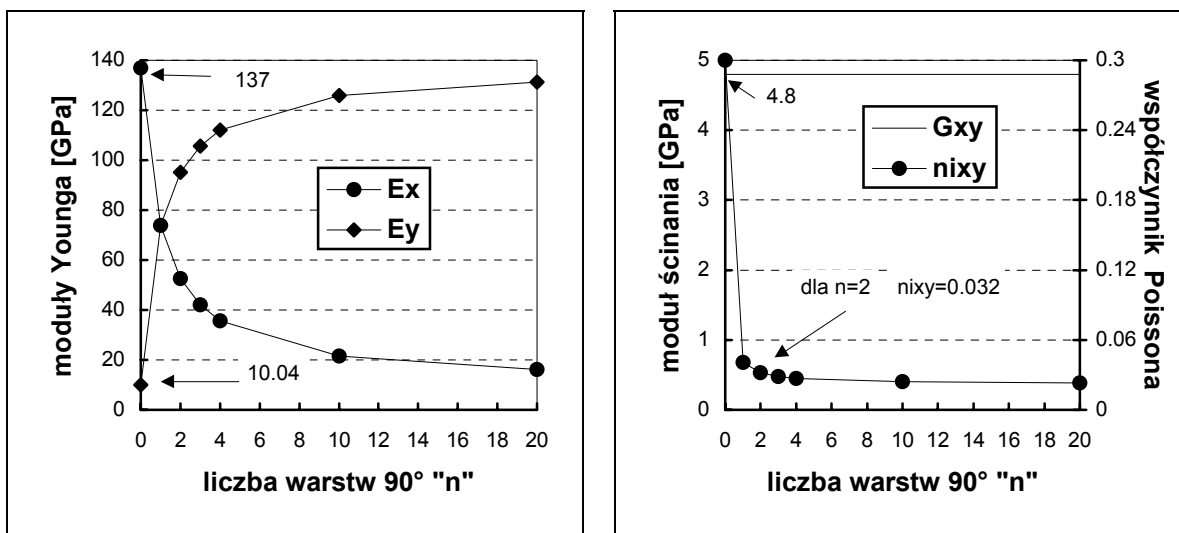
- Dalsze obliczenia przebiegają już dla konkretnych wartości n . W tabeli 4.2 podano wartości składowych unormowanej macierzy sztywności tarczowej w zależności od liczby n

n	V_1^*	A_{11}/t	A_{22}/t	A_{12}/t	A_{66}/t
0	1	137.911	10.107		
1	0	74.009	74.009		
2	-0.333	52.708	95.3108		
3	-0.5	42.058	105.960	3.034	4.8
4	-0.6	35.668	112.350		
10	-0.8181	21.726	126.292		
20	-0.9048	16.190	131.828		

Tabela 4.2. Unormowane macierze sztywności tarczowej dla laminatu $[0, 90_n]_s$

- Obecnie należy znaleźć macierze odwrotne do macierzy $[A]$ dla kolejnych "n", a następnie znaleźć wartości stałych inżynierskich z relacji (4.44) i (4.45). Niezerowe stałe inżynierskie przedstawiono na rysunku 4.6.

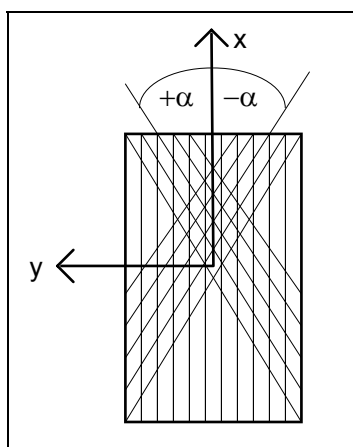
Analizę wyników pozostawmy czytelnikowi - zauważmy jedynie, że dla $n=0$ laminat składa się z dwóch warstw 0° i wartości stałych inżynierskich są takie same jak dla pojedynczej warstwy kompozytowej w konfiguracji osiowej (patrz - stałe materiałowe w temacie zadania).



Rys. 4.6. Zależność stałych inżynierskich od liczby warstw 90° dla laminatu $[0, 90_n]_s$

◆ Przykład 2

Wyznaczyć wartości stałych inżynierskich dla laminatu o kodzie $[0, \alpha, -\alpha]_s$ w zależności od kąta α dla kompozytu grafit/epoksyd (T300/epoksyd Vicotex174), dla którego stałe materiałowe wynoszą $E_1=137$ GPa, $E_2=10.04$ GPa, $G_{12}=4.8$ GPa, $\nu_{12}=0.3$.



Rys. 4.7. Orientacja warstw w laminacie $[0, \alpha, -\alpha]_s$.

Rozpatrywany materiał jest identyczny jak w przykładzie 1, zatem współczynniki U_i nie ulegają zmianie i wynoszą :

- $U_1 = 58.665$ $U_2 = 63.902$ $U_3 = 15.344$ $U_4 = 18.378$ $U_5 = 20.144$
- Z równań (4.39) i (4.41) wyznaczamy parametry geometryczne laminatu.

Udziały objętościowe warstw wynoszą: $v_o = 1/3$, $v_\alpha = 1/3$, $v_{-\alpha} = 1/3$

Współczynniki V_i^* wobec symetrii funkcji $\cos x$ i antysymetrii funkcji $\sin x$ wynoszą

$$V_1^* = 0.333 (1 + 2 \cos 2\alpha) \quad V_2^* = 0.333 (1 + 2 \cos 4\alpha) \quad V_3^* = V_4^* = 0$$

- Elementy unormowanej macierzy sztywności tarczowej $[A]/t$ wyznaczamy z tabeli 4.1 (w [GPa]) : elementy A_{16} i A_{26} ze względu na zerowanie się V_3^* i V_4^* są równe zero, zaś pozostałe elementy zależą od wartości kąta α i wyrażają się równaniami

$$A_{11}/t = U_1 + V_1^* U_2 + V_2^* U_3$$

$$A_{22}/t = U_1 - V_1^* U_2 + V_2^* U_3$$

$$A_{12}/t = U_4 - V_2^* U_3$$

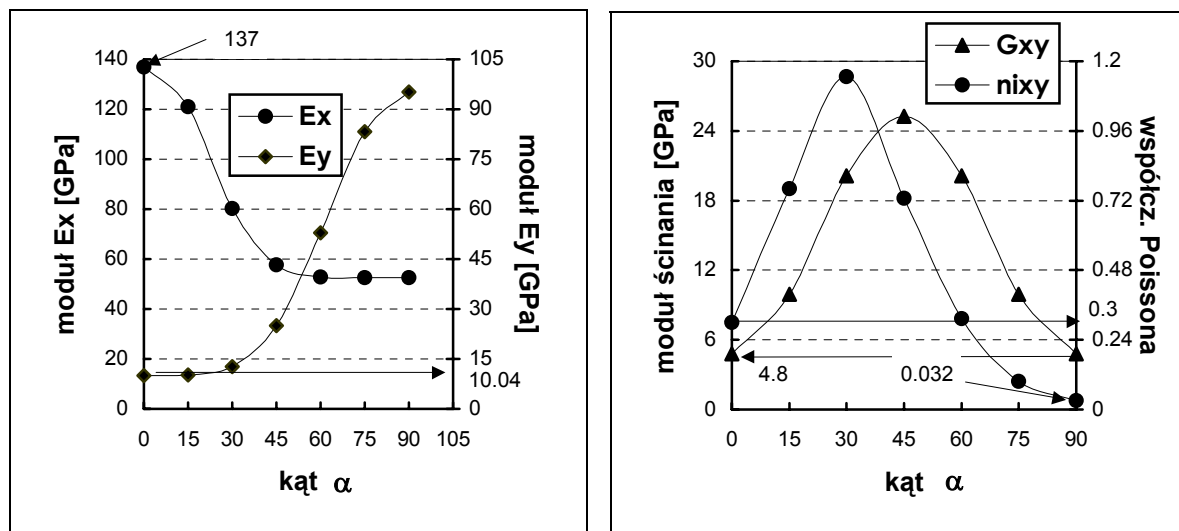
$$A_{66}/t = U_5 - V_2^* U_3$$

- Dalsze obliczenia przebiegają już dla konkretnych wartości kąta α . W tabeli 4.3 podano wartości składowych unormowanej macierzy sztywności tarczowej w zależności od kąta α .

α	V_1^*	V_2^*	A_{11}/t	A_{22}/t	A_{12}/t	A_{66}/t
0	1.0	1.0	137.911	10.107	3.034	4.8
15	0.911	0.667	127.114	10.685	8.144	9.910
30	0.667	0	101.288	16.042	18.378	20.144
45	0.333	-0.333	74.835	32.276	23.488	25.254
60	0	0	58.665	58.665	18.378	20.144
75	-0.244	0.667	53.307	84.492	8.144	9.910
90	-0.333	1.0	52.730	95.288	3.034	4.8

Tabela 4.3. Unormowane macierze sztywności tarczowej dla laminatu $[0, \alpha, -\alpha]_s$

- Ostatni krok to znalezienie macierzy odwrotnych do macierzy $[A]$ dla kolejnych kątów α , a następnie wyznaczenie wartości stałych inżynierskich z relacji (4.44) i (4.45). Niezerowe stałe inżynierskie przedstawiono na rysunku 4.8.



Rys. 4.8. Zależność stałych inżynierskich dla laminatu $[0, \alpha, -\alpha]_s$ od kąta α .

Zauważmy, że analizowany laminat w przypadku, gdy kąt $\alpha = 0^\circ$ składa się z 6 warstw 0° . Podobnie jak to miało miejsce w przykładzie 1 dla dwóch takich warstw tak i teraz stałe inżynierskie są identyczne jak dla pojedynczej warstwy 0° .

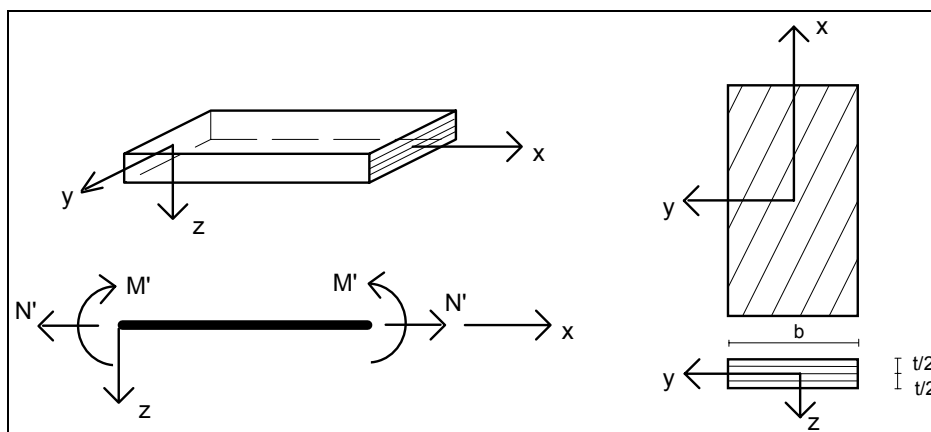
W przypadku, gdy kąt $\alpha = 90^\circ$ laminat ma kod $[0, 90_2]_S$, a więc taki sam, jak laminat w przykładzie 1 dla $n=2$. Wartości stałych inżynierskich dla tego przypadku, uzyskane w obu przykładach, pokazano na rys. 4.6 i rys. 4.8. Widać, że są takie same, co potwierdza poprawność uzyskanych wyników.

Wykresy zamieszczone w obu przykładach pokazują, jak silnie stałe sprężyste zależą od układu warstw laminatu, a jednocześnie wskazują jak ważną rolę ma do spełnienia projektant, który znając wymagania stawiane konstrukcji może tak dobrać budowę laminatu, aby spełnić je optymalnie.

◆ Przykład 3

Wyznaczyć rozkłady naprężeń i odkształceń w belce o przekroju prostokątnym, poddanej zginaniu momentem M' i rozciąganiu siłą podłużną N' . Belka składa się z dwu warstw izotropowych o modułach sprężystości $E_1=200$ GPa, $E_2=120$ GPa, $\nu_1=\nu_2=0.3$ (podane stałe odpowiadają odpowiednio stali i miedzi).

Belka stanowiąca przedmiot zadania jest szczególnym przypadkiem belki laminatowej, składającej się z dwu warstw izotropowych. Teoria laminacji umożliwia uzyskanie rozwiązania dla belek o całkowicie dowolnym układzie warstw kompozytowych, dlatego celowe jest przypomnienie ogólnych zależności, które następnie wykorzystamy dla przypadku szczególnego. Obciążenie i układ osi dla belki pokazano na rys. 4.9.



Rys. 4.9. Belka laminatowa poddana zginaniu i rozciąganiu.

- **Siły i momenty wypadkowe** (patrz rys. 4.3)

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N'/b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M'/b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

- **Równania fizyczne**

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

gdzie

$$[H] = [D] - [B][A]^{-1}[B] \quad (4.63)$$

$$[A'] = [A]^{-1} + [A]^{-1}[B][H]^{-1}[B][A]^{-1} \quad (4.64)$$

$$[B'] = -[A]^{-1}[B][H]^{-1} \quad (4.65)$$

$$[D'] = [H]^{-1} \quad (4.66)$$

• **Macierze sztywności**

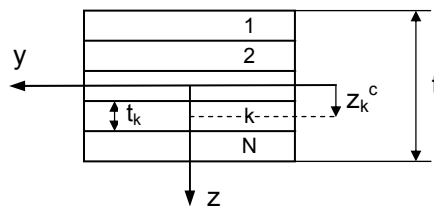
$$[A] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k t_k \quad (4.67)$$

$$[B] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k t_k z_k^c \quad (4.68)$$

$$[D] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \left(t_k z_k^{c2} + \frac{t_k^3}{12} \right) \quad (4.69)$$

Dla często stosowanych laminatów o jednakowej grubości wszystkich warstw, zwanych laminatami regularnymi macierzy te można przedstawić znacznie prościej. Przyjmując, że liczba warstw wynosi N , a ich grubości $t_k = t/N$ ($k=1 \dots N$) - współrzędne środków ciężkości można wyrazić następująco

$$z_k^c = \frac{2k - N - 1}{2N} t$$



zaś macierze sztywności przyjmują postaci

$$[A] = \frac{t}{N} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \quad (4.70)$$

$$[B] = \frac{t^2}{2N^2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (2k - N - 1) \quad (4.71)$$

$$[D] = \frac{t^3}{12N^3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (1 + 3(2k - N - 1)^2) \quad (4.72)$$

• **Odształcenia laminatu**

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \{\kappa\} \quad (4.73)$$

$$\{\varepsilon\} = \left[([A'] + z [B']) \{N\} + ([B'] + z [D']) \{M\} \right] \quad (4.74)$$

• **Naprężenia warstwowe**

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\} \quad (4.75)$$

$$\{\sigma\}_k = \left[([\bar{Q}]_k [A'] + z [\bar{Q}]_k [B']) \{N\} + ([\bar{Q}]_k [B'] + z [\bar{Q}]_k [D']) \{M\} \right]$$

Dobrym sprawdzianem poprawności powyższych relacji jest zastosowanie ich do przekroju jednowarstwowego. Niezależnie od tego czy warstwa jest izotropowa, czy też ortotropowa, a w tym drugim przypadku niezależnie również od jej orientacji wzg. układu odniesienia (x, y), macierz sprzężeń $[B]$ jest macierzą zerową, co prowadzi do następujących relacji

$$[A] = t [\bar{Q}]$$

$$[D] = \frac{t^3}{12} [\bar{Q}]$$

$$[H]=[D] \quad (4.76)$$

$$[A']=[A]^{-1}=\frac{1}{t}[\bar{Q}]^{-1}$$

$$[B']=[0]$$

$$[D']=[D]^{-1}=\frac{12}{t^3}[\bar{Q}]^{-1}$$

Podstawiając te związki do równania określającego naprężenia warstwowe, po elementarnych przekształceniach otrzymujemy

$$\sigma_x = \frac{N'}{A} + \frac{M'}{I_y} z \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (4.77)$$

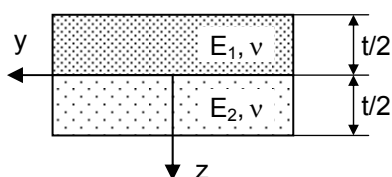
gdzie

$$A = b t \quad \text{pole przekroju poprzecznego}$$

$$I_y = \frac{b t^3}{12} \quad \text{moment bezwładności przekroju}$$

Otrzymaliśmy zatem dobrze znane z wytrzymałości materiałów rozwiązanie dla przekroju mimośrodowo rozciąganego.

Przystąpimy obecnie do wyznaczenia naprężeń i odkształceń w belce dwuwarstwowej, będącej tematem zadania - rys. 4.10.



Rys. 4.10. Przekrój belki dwuwarstwowej

Ze względu na izotropię, zredukowana i transformowana macierze sztywności dla pojedynczej warstwy są takie same. Korzystając z (2.42) otrzymujemy macierze o następujących składowych

$$[\bar{Q}]_1 = \begin{bmatrix} 219.8 & 65.9 & 0 \\ 65.9 & 219.8 & 0 \\ 0 & 0 & 76.9 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (4.78)$$

$$[\bar{Q}]_2 = \begin{bmatrix} 131.9 & 39.6 & 0 \\ 39.6 & 131.9 & 0 \\ 0 & 0 & 46.2 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]}$$

Dalsze obliczenia polegają na wyznaczeniu macierzy sztywności oraz wykonaniu operacji odwracania i mnożenia macierzy, prowadzących do znalezienia odkształceń i naprężeń. Oznacza to w praktyce, że nawet w najprostszej sytuacji (2 warstwy izotropowe) niezbędne jest użycie odpowiedniego oprogramowania komputerowego. Pominiemy tu wszystkie wyniki pośrednie i ograniczymy się do podania końcowego wyniku.

Naprężenia w warstwie górnej "1" wynoszą

$$\sigma_{x1} = \left(1.31 \frac{N'}{A} + \frac{0.98 N'}{t A} z \right) + \left(0.082 t \frac{M'}{I_y} + 1.31 \frac{M'}{I_y} z \right) \quad (4.79)$$

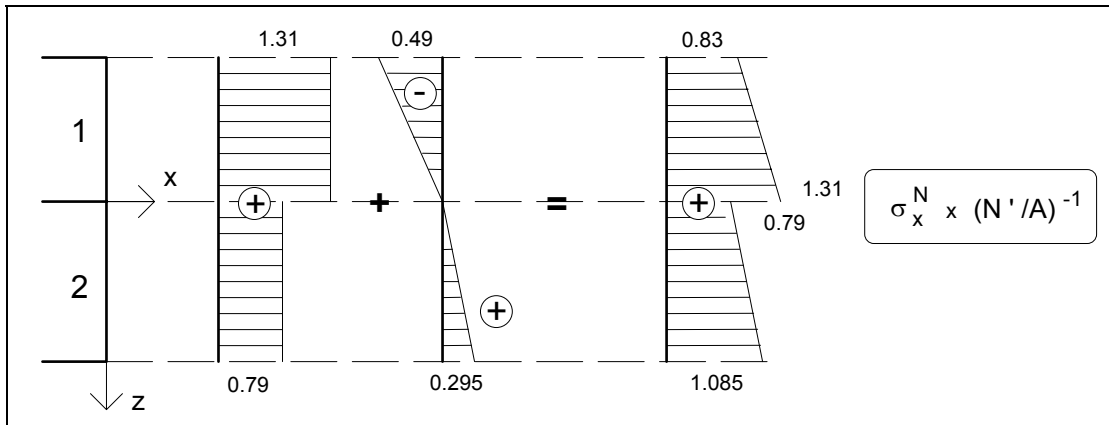
$$\sigma_{y1} = \tau_{xy1} = 0$$

Naprężenia w warstwie dolnej "2" mają wartości

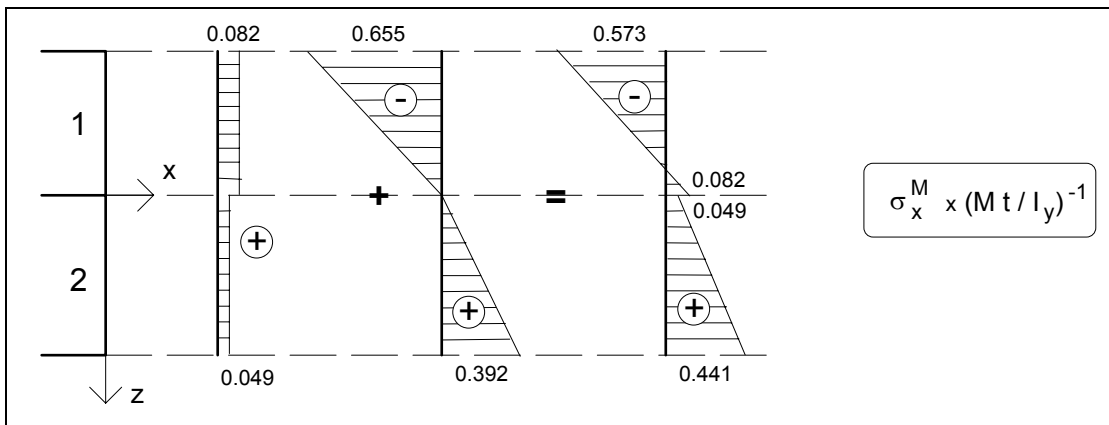
$$\sigma_{x2} = \left(0.79 \frac{N'}{A} + \frac{0.59}{t} \frac{N'}{A} z \right) + \left(0.049 t \frac{M'}{I_y} + 0.784 \frac{M'}{I_y} z \right) \quad (4.80)$$

$$\sigma_{y2} = \tau_{xy2} = 0$$

Jak widać z podanych rozwiązań, niezerowe są jedynie naprężenia normalne podłużne. Wyrażenia ujęte w pierwszym nawiasie dotyczą wyłącznie rozciągania, a w drugim wyłącznie zginania. Wykresy naprężeń odpowiadających tym dwóm przypadkom przedstawiono, odpowiednio, na rys. 4.11 i 4.12.



Rys. 4.11. Naprężenia normalne przy rozciąganiu.



Rys. 4.12. Naprężenia normalne przy zginaniu

Przedstawione wykresy mogą w pierwszym momencie budzić zaskoczenie. W przypadku rozciągania, widać że oprócz naprężeń skokowo zmieniających się w miejscu połączenia warstw (skutek różnych sztywności warstw), ale stałych na ich wysokości, występują naprężenia o liniowym przebiegu, charakterystyczne dla zginania. Jest to bezpośredni skutek sprzężenia stanu tarczowego i giętnego. Zauważmy, że naprężenia wywołane efektem sprzężenia nie są bynajmniej pomijalnie małe w stosunku do naprężeń wynikających wyłącznie ze stanu tarczowego.

Poprawność uzyskanego rozwiązania potwierdza obliczenie siły wypadkowej, jaką uzyskuje się w wyniku scałkowania naprężeń po przekroju poprzecznym. Otrzymujemy

$$W = 0.5 (1.085 + 0.79) \frac{N'}{A} \frac{t}{2} b + 0.5 (0.83 + 1.31) \frac{N'}{A} \frac{t}{2} b = N'$$

Sprzężenie stanu tarczowego i giętnego widoczne jest także w przypadku naprężeń normalnych wywołanych wyłącznie zginaniem. Tu oprócz składowej liniowo zmiennej po wysokości, występuje dodatkowo składowa stała na wysokości warstwy, charakterystyczna dla rozciągania. Jest ona jednak znikomo mała w stosunku do tej pierwszej.

Także w tym przypadku sprawdzimy warunek równowagi. W wyniku scałkowania naprężeń otrzymamy moment wypadkowy

$$M_w = \frac{1}{2} 0.573 \frac{M' t}{I_y} \frac{t}{2} b \frac{2}{3} \frac{t}{2} - \frac{1}{2} 0.082 \frac{M' t}{I_y} \frac{t}{2} b \frac{1}{3} \frac{t}{2} +$$

$$+ 0.049 \frac{M' t}{I_y} \frac{t}{2} b \frac{t}{4} + \frac{1}{2} 0.392 \frac{M' t}{I_y} \frac{t}{2} b \frac{2}{3} \frac{t}{2} = M'$$

Występowanie sprężenia lub też jego brak jest ściśle związane z budową laminatu. Warunki, jakie musi on spełniać, aby sprężenie stanu tarczowego i giętnego nie występowało, będą szczegółowo przedstawione w rozdziale 5.

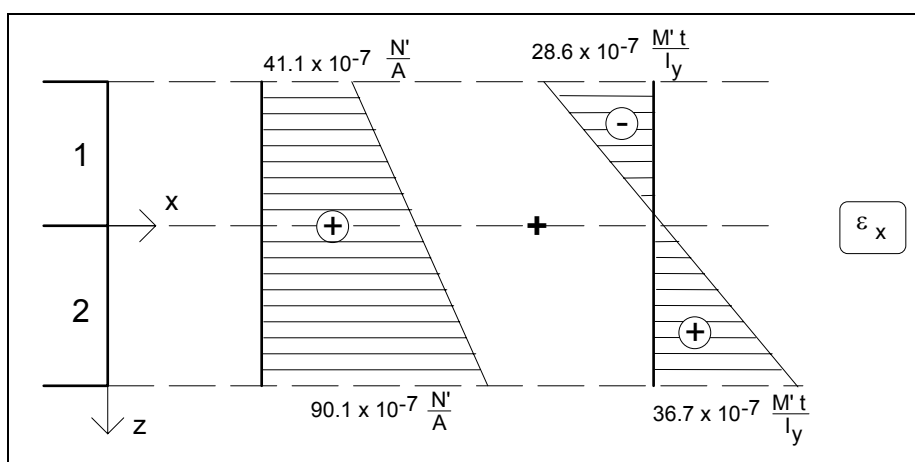
Odształcenia laminatu wyrażają się związkami

$$\varepsilon_x = \frac{N'}{A} \left(65.6 \times 10^{-7} + \frac{49 \times 10^{-7}}{t} z \right) + \frac{M' t}{I_y} \left(4.083 \times 10^{-7} + \frac{65.3 \times 10^{-7}}{t} z \right) \quad (4.81)$$

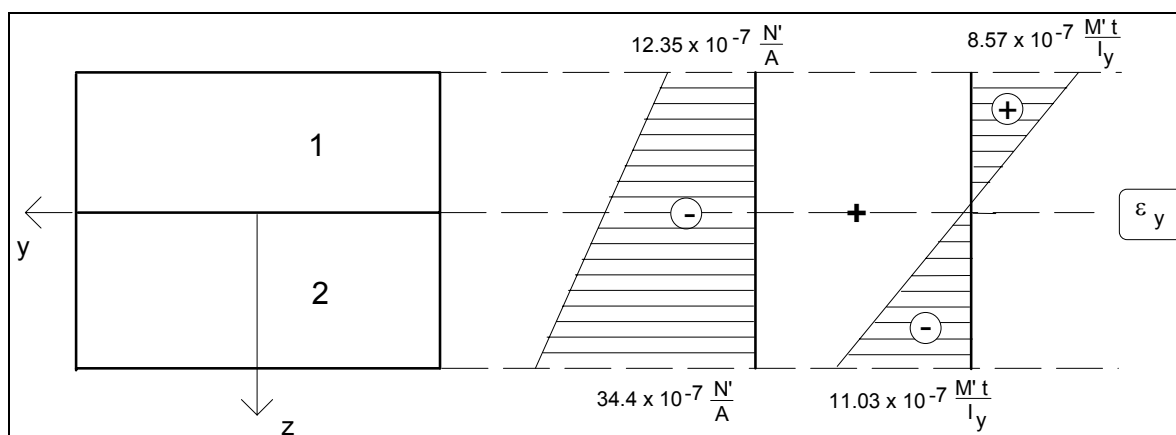
$$\varepsilon_y = -\frac{N'}{A} \left(19.7 \times 10^{-7} + \frac{14.7 \times 10^{-7}}{t} z \right) - \frac{M' t}{I_y} \left(1.23 \times 10^{-7} + \frac{19.6 \times 10^{-7}}{t} z \right) \quad (4.82)$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (4.83)$$

Rozkłady odształceń liniowych, podłużnych i poprzecznych, przedstawiono na rys. 4.13 i 4.14.



Rys. 4.13. Rozkład odształceń podłużnych.



Rys. 4.14. Rozkład odształceń poprzecznych.

◆ **Przykład 4**

Walcowy zbiornik ciśnieniowy (rys. 4.15) wykonano metodą nawijania obwodowego i śrubowego (patrz - rozdz. 1) z wysokowytrzymałego kompozytu grafit/epoksyd w taki sposób, że uzyskano sekwencję warstw opisaną kodem $[0_3/+60/-60]_s$. Wyznaczyć maksymalne ciśnienie, jakie może przenieść zbiornik, jeżeli odkształcenie obwodowe (równoleżnikowe) nie może przekroczyć 1%. Obliczyć wielkość odkształcenia południkowego, odpowiadającego ciśnieniu maksymalnemu.

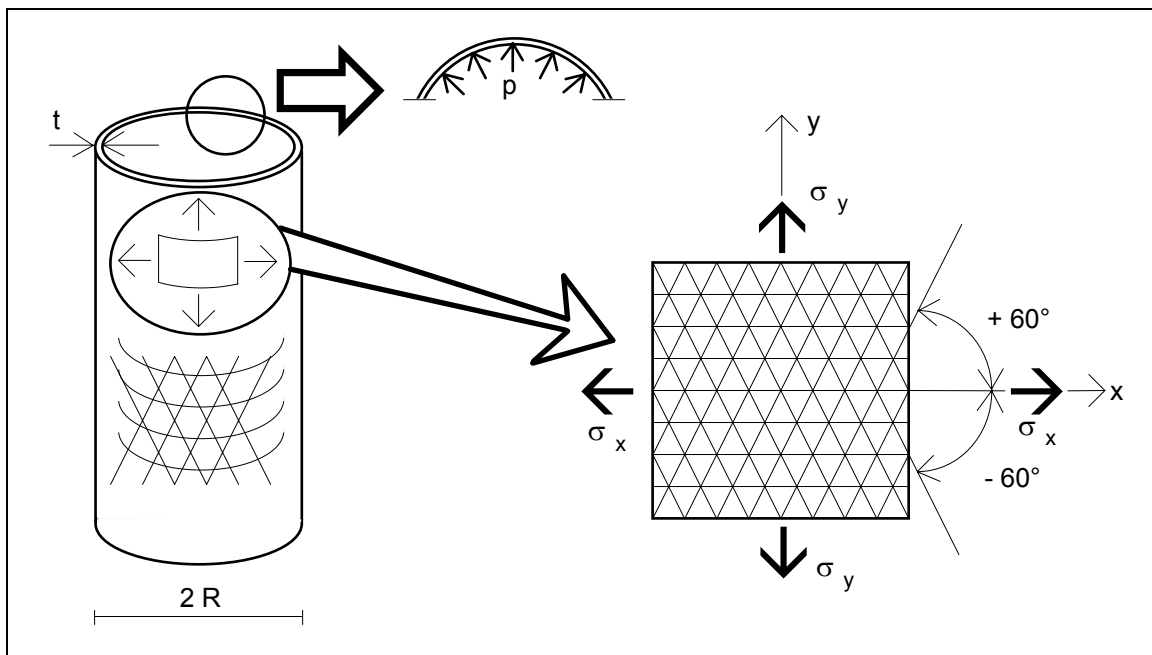
Promień zbiornika wynosi $R=0.5$ m, grubość pojedynczej warstwy $t_0=0.15$ mm, stałe inżynierskie dla pojedynczej warstwy przyjmują wartości (tab. 2.2): $E_1=145$ GPa, $E_2=10$ GPa, $G_{12}=4.8$ GPa, $\nu_{12}=0.25$.

Z teorii powłok, których szczególnym przypadkiem jest cienkościenna powłoka obrotowa w postaci walca, obciążonego ciśnieniem wewnętrznym p wynika, że stan naprężenia w powłoce określony jest naprężeniem obwodowym (równoleżnikowym) σ_x i osiowym (południkowym) σ_y , opisanymi następującymi równaniami

$$\sigma_x = p \frac{R}{t} \tag{4.84}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} p \frac{R}{t} \tag{4.85}$$

gdzie R jest promieniem warstwy środkowej powłoki walcowej.



Rys. 4.15. Układ warstw i naprężenia w cienkościennym kompozytowym zbiorniku ciśnieniowym.

W celu rozwiązania zadania należy najpierw określić macierze sztywności dla laminatu w układzie odniesienia (x, y) . Ze względu na symetrię ułożenia warstw macierz sztywności sprzężeń $[B]$ jest macierzą zerową. Stan naprężenia w powłoce jest tzw. stanem błonowym, co oznacza, że nie występują momenty zginające, a zatem wektor momentów wypadkowych $\{M\}$ jest wektorem zerowym. Ostatecznie równanie fizyczne (4.35) po uwzględnieniu (4.36) upraszcza się do postaci

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1} \{N\} \tag{4.86}$$

Macierz sztywności tarczowej $[A]$ wyznaczymy obliczając kolejno: składowe macierze sztywności $[Q]$ dla warstwy w jej osiach materiałowych (rów. (2.42)), współczynniki materiałowe (3.20), współczynniki geometryczne (4.39), (4.41) i wreszcie, korzystając z tab. 4.1

- ◆ macierz sztywności warstwy

$$[Q] = \begin{bmatrix} 145.63 & 2.51 & 0 \\ 2.51 & 10.04 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \text{ [GPa]} \quad (4.87)$$

♦ współczynniki materiałowe

$$U_1 = 61.40 \quad U_2 = 67.80 \quad U_3 = 16.43 \quad U_4 = 18.94 \quad U_5 = 21.23 \text{ [GPa]} \quad (4.88)$$

♦ objętościowe udziały warstw

$$v_0 = 0.6 \quad v_{-60} = v_{+60} = 0.2 \quad (4.89)$$

♦ współczynniki geometryczne (4.41)

$$V_1^* = 0.4 \quad V_2^* = 0.4 \quad V_3^* = V_4^* = 0 \quad (4.90)$$

♦ macierz sztywności tarczowej

$$[A] = \begin{bmatrix} 142.6 & 18.6 & 0 \\ 18.6 & 61.3 & 0 \\ 0 & 0 & 22.0 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ [GN/m]} \quad (4.91)$$

♦ macierz odwrotna

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 7.30 & -2.22 & 0 \\ -2.22 & 16.99 & 0 \\ 0 & 0 & 45.45 \end{bmatrix} \text{ [GN/m]}^{-1} \quad (4.92)$$

Odształcenia w powłoce zbiornika określone są zatem związkiem

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.30 & -2.22 & 0 \\ -2.22 & 16.99 & 0 \\ 0 & 0 & 45.45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

przy czym składowe wektora sił wypadkowych związane są ze składowymi tensora naprężenia równaniami

$$N_x = \sigma_x t = p R \quad N_y = \sigma_y t = 0.5 p R \quad N_{xy} = 0 \quad (4.94)$$

Maksymalne ciśnienie, jakie może przenieść zbiornik wynika z warunku narzuconego na wartość dopuszczalną odkształceń obwodowych w następującej postaci

$$\varepsilon_x = 7.30 p R - 2.22 \times 0.5 p R = 3.095 p = 0.01 \quad (4.95)$$

Ostatecznie więc maksymalne dopuszczalne ciśnienie wynosi

$$p = 3.23 \text{ MPa} \quad (4.96)$$

Odształcenie południkowe przy takiej wielkości ciśnienia wynosi

$$\varepsilon_y = (-2.22 + 16.99 \times 0.5) \times 3.23 \times 10^{-3} \times 0.5 = 0.0101 = 1.01 \% \quad (4.97)$$

