

## ROZDZIAŁ 3

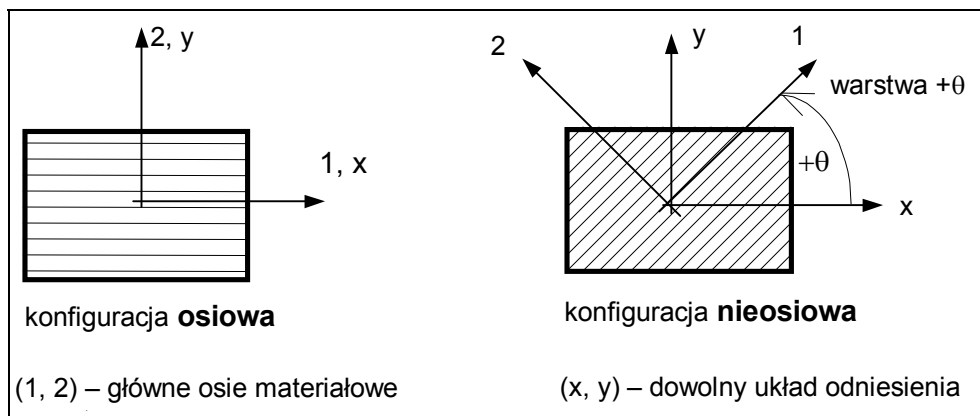
## ROZDZIAŁ 3

### ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA MATERIAŁÓW ORTOTROPOWYCH KONFIGURACJA NIEOSIOWA

W rozdziale tym zostaną przedstawione równania fizyczne dla materiałów ortotropowych w **płaskim stanie naprężenia**, w układzie współrzędnych dowolnie zorientowanym względem głównych osi ortotropii. Przedmiotem analizy będzie pojedyncza warstwowa kompozytu zbrojonego włóknami jednokierunkowymi. W oparciu o odpowiednie relacje transformacyjne z konfiguracji osiowej do nieosiowej, wyprowadzone będą postaci macierzy sztywności i podatności w konfiguracji nieosiowej, odgrywające podstawową rolę w klasycznej teorii laminacji, a także analizie wytrzymałościowej kompozytów. Składowe tych macierzy będą także określone w funkcji stałych inżynierskich.

#### 3.1. Transformacje tensorów naprężenia i odkształcenia

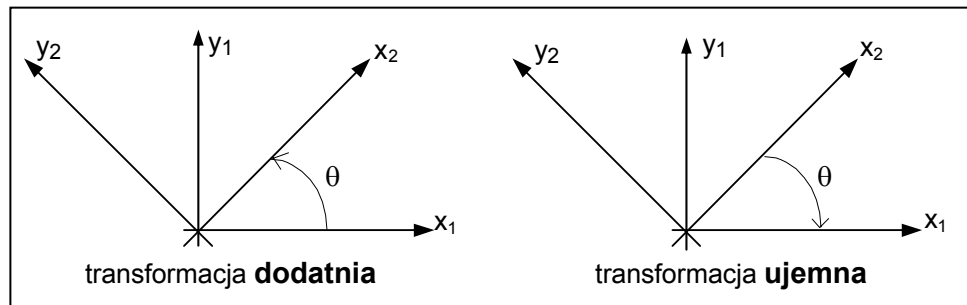
Przypomnijmy, że w rozdziale 1.4 wprowadzone zostały pojęcia **konfiguracji osiowej i nieosiowej** warstwy kompozytu. O typie konfiguracji decyduje ustawienie włókien, czyli zarazem położenie głównych osi materiałowych (1, 2) względem dowolnego układu odniesienia (x, y). Pokazano to na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Konfiguracja osiowa i nieosiowa warstwy kompozytu.

W kompozytach - będących zbiorem warstw o dowolnej orientacji względem przyjętego układu odniesienia, określonej w kodzie laminatu kątem dodatnim lub ujemnym (np. położenie warstwy w prawej części rys. 3.1 określa w układzie odniesienia (x, y) dodatni kąt  $\theta$ ) - istotnym czynnikiem we wszelkich przekształceniach związanych z transformacjami tensorów naprężenia i odkształcenia jest bardzo staranne podejście do znaków tych kątów. Wprowadzono w związku z tym pojęcia tzw. dodatniej i ujemnej transformacji tensora. Powiedzmy to wyraźnie - oba pojęcia związane są wyłącznie z transformacjami tensorowymi i mają w związku z tym charakter uniwersalny - w żadnym stopniu nie należy ich traktować jako pojęć wynikających z mechaniki kompozytów, choć są w niej ogólnie stosowane.

W celu wyjaśnienia tych pojęć przyjmijmy dwa dowolne układy współrzędnych  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ , obrócone względem siebie o dowolny kąt  $\theta$  - pokazano to na rys. 3.2. O **transformacji dodatniej** mówimy wówczas, gdy obrót wyjściowego układu współrzędnych do układu, do którego transformujemy dowolny tensor, następuje **przeciwnie do ruchu wskazówek zegara**. W przeciwnym przypadku mówimy o **transformacji ujemnej**. Obie transformacje pokazano na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Dodatnia i ujemna transformacja układu współrzędnych.

W mechanice kompozytów transformacje te stosuje się dla tensorów odkształcenia i naprężenia, a więc tensorów II rzędu. Przypomnijmy, że składowe dowolnego tensora  $a_{ij}$  rzędu II, transformują się przy obrocie układu współrzędnych zgodnie z następującą zależnością

$$a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} a_{kl} \quad (3.1)$$

gdzie  $\alpha_{ij}$  są elementami macierzy przejścia, a iloczyny  $\alpha_{ik} \alpha_{jl}$  tworzą **macierz transformacyjną** dla tensora II rzędu, przy obrocie układu współrzędnych.

Macierze przejścia dla obu transformacji mają postaci

- ♦ dla transformacji dodatniej

$$[\alpha_+] = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

- ♦ dla transformacji ujemnej

$$[\alpha_-] = \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

gdzie

$$m = \cos \theta \quad n = \sin \theta$$

Rozpisując równania (3.1) dla obu wymienionych transformacji i korzystając z podanych macierzy przejścia otrzymamy następujące postaci macierzy transformacyjnych

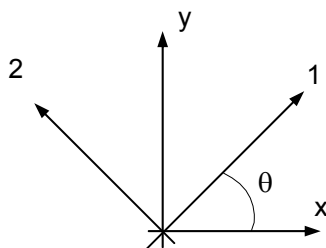
- ♦ dla transformacji dodatniej

$$[T_+] = [T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

♦ dla transformacji ujemnej

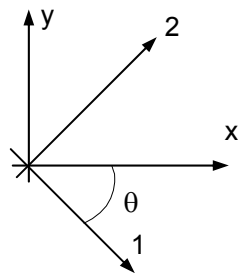
$$[T_-] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

W laminatach warstwowych, główne osie materiałowe (1, 2) poszczególnych warstw mogą przyjmować względem dowolnego układu odniesienia (x, y) jedno z dwóch położeń, pokazanych na rys. 3.3. Dla jasności dalszych wywodów celowe jest wyraźne określenie tych dwóch sytuacji, wraz z podaniem wzorów transformacyjnych dla tensorów naprężenia i odkształcenia. Przedstawiono to na rys. 3.3. Dolny indeks "n" towarzyszący nawiasom klamrowym oznacza, że tensory naprężenia i odkształcenia umieszczone w tych nawiasach określone są w konfiguracji **nieosiowej** tzn. w ukł. (x, y). Indeks "o" oznacza, że tensory określone są w konfiguracji **osiowej**, tzn. w ukł. (1, 2).



$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_n = [T_-] \begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_o \quad (3.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_o = [T_+] \begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_n \quad (3.6)$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_n = [T_+] \begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_o \quad (3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_o = [T_-] \begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_n \quad (3.8)$$

Rys. 3.3. Równania transformacyjne tensorów naprężenia i odkształcenia.

Tensory występujące w równaniach (3.5) - (3.8) mają następujące składowe (w zapisie Voigta)

$$\{\sigma\}_n = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad \{\sigma\}_o = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\{\varepsilon\}_n = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} / 2 \end{Bmatrix} ; \quad \{\varepsilon\}_o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 / 2 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Zauważmy, że tensor odkształcenia w konfiguracji osiowej, występujący w równaniu (3.10) różni się od tego, który występuje w związkach fizycznych (2.35) i (2.36) oraz dalszych równaniach z nich wynikających, bowiem w związkach fizycznych występują odkształcenia kątowe (tzw. "inżynierskie" odkształcenia styczne), podczas gdy w (3.9) "tensorowe" odkształcenia styczne. W celu ujednoczenia notacji wygodnie jest skorzystać z następujących relacji

$$\{\varepsilon\}_n^R = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \{\varepsilon\}_n \quad ; \quad \{\varepsilon\}_o^R = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [R] \{\varepsilon\}_o \quad (3.11)$$

gdzie

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{macierz Reutera} \quad (3.12)$$

### 3.2. Macierz sztywności warstwy w konfiguracji nieosiowej

Zredukowana macierz sztywności warstwy w płaskim stanie naprężenia, określona w jej głównych osiach materiałowych - równanie (2.35) - nie jest tensorem, mimo że jest macierzą symetryczną II rzędu. Taka jej postać jest jednak wynikiem jedynie czysto formalnego zapisu Voigta, umożliwiającego "upakowanie" elementów tensora IV rzędu (takim obiektem jest macierz sztywności) w macierz rzędu II. Dzięki temu upraszcza się zapis macierzy, ale z drugiej strony traci ona charakter tensorowy, co z kolei powoduje, że przy obrocie układu współrzędnych ( w tym wypadku od konfiguracji osiowej do nieosiowej) nie można skorzystać z prawa transformacji tensora. Chcąc zatem określić macierz sztywności w dowolnym układzie (x, y) obróconym względem układu osi materiałowych (1, 2) (zarazem określić postać równań fizycznych  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ ) należy wykorzystać inną drogę.

Powyższe stwierdzenia wymagają szerszego komentarza krytycznego. Nasuwa się bowiem pytanie czy nie należałoby zrezygnować z notacji zwężonej na rzecz pełnego zapisu tensorowego równań fizycznych w postaci (2.2a) i wykorzystać możliwości wynikające z tensorowego charakteru macierzy sztywności i podatności. Wyznaczenie wartości ich składowych w dowolnym układzie współrzędnych na podstawie znajomości tych składowych w głównych osiach materiałowych sprowadza się wówczas do zastosowania prawa transformacji tensora IV rzędu w postaci

$$Q'_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{ko} \alpha_{lp} Q_{mnop} \quad (3.13)$$

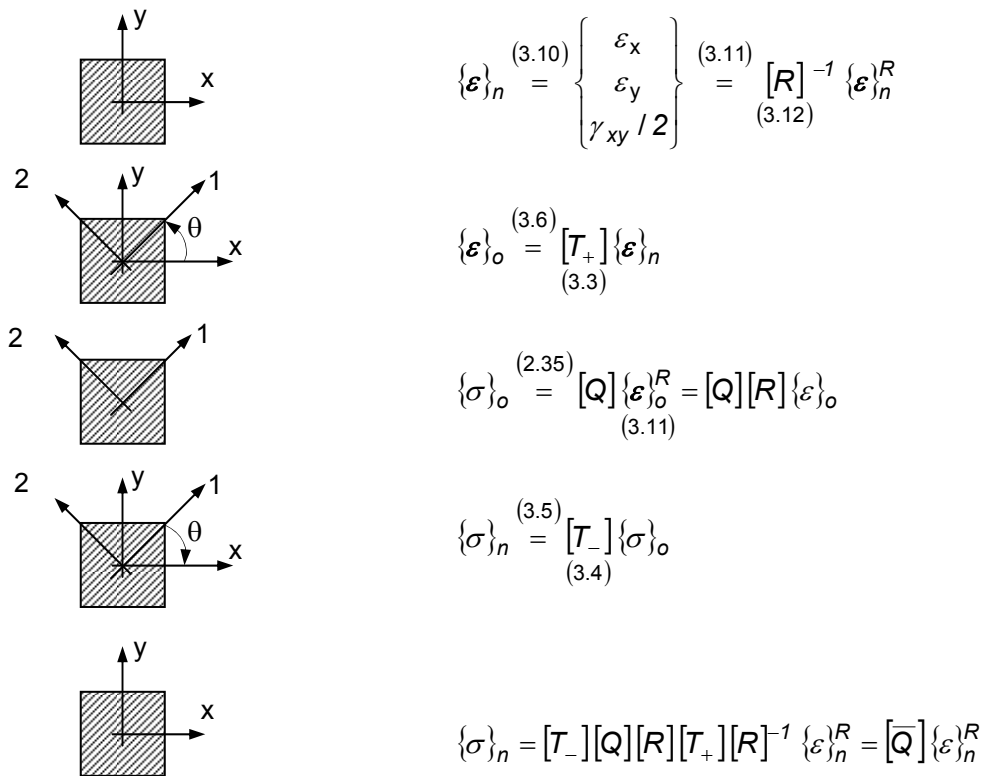
Równanie (3.13) formalnie bardzo proste, w praktyce nadaje się wyłącznie do obliczeń wykonywanych z pomocą komputera. Pociąga to za sobą konieczność wprowadzenia całkowicie odmiennego sposobu formułowania zadań mechaniki kompozytów, wykorzystującego metody numeryczne. Możliwe to jest jednak tylko wówczas, gdy dysponuje się odpowiednią wiedzą teoretyczną, a tę można nabyć jedynie w tradycyjny sposób, nawet gdyby wiązało się to z rezygnacją z ogólności rozważań. Zrozumienie podstawowych zależności rządzących zachowaniem się kompozytów pozwala budować ogólne algorytmy numeryczne, ale rozwiązanie nawet złożonego zagadnienia za pomocą dostępnych programów komercyjnych z pewnością nie pozwala na nabycie ogólnej wiedzy o przedmiocie. To sprawia, że mimo tak zaawansowanej komputeryzacji, klasyczny wykład mechaniki kompozytów nadal opiera się na "niekomputerowej" notacji Voigta, pozwalającej stosunkowo prosto uzyskać relacje analityczne, niezmiernie ułatwiające zrozumienie pracy materiałów kompozytowych, choć ceną, jaką się płaci jest ograniczenie rozważań do zagadnień z reguły dwuwymiarowych. Również ten skrypt odwołuje się do klasycznych wzorców. Oprócz przyczyn wymienionych wcześniej, spowodowane to jest również tym, że chcąc umożliwić czytelnikowi możliwość korzystania z istniejących, znacznie obszerniejszych podręczników i monografii, dotyczących mechaniki kompozytów należy zapoznać go z pojęciami i metodami w nich wykorzystywanymi.

Korzystając w dalszym ciągu z notacji Voigta, chcąc wyznaczyć macierz sztywności warstwy w dowolnym układzie współrzędnych musimy zrezygnować z równania (3.13) i skorzystać z innego sposobu jej określenia.

Wykorzystamy w tym celu procedurę składającą się z następujących kroków

- ♦ transformacja odkształceń z konfiguracji nieosiowej do konfiguracji osiowej,
- ♦ zapisanie równań fizycznych  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  w konfiguracji osiowej,
- ♦ transformacja naprężeń z konfiguracji osiowej do nieosiowej,
- ♦ zapisanie równań fizycznych  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  w konfiguracji nieosiowej.

Przedstawiona powyżej procedura, wraz z podaniem równań, z których należy skorzystać, została pokazana na rys. 3.4.



Rys. 3.4. Schemat wyznaczania macierzy sztywności w konfiguracji nieosiowej.

Związek fizyczny w konfiguracji nieosiowej (ostatnie równanie na rys. 3.4) ma postać

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

$$[\bar{Q}] = [T_-][Q][R][T_+][R]^{-1} = [T_-][Q][T_-]^T \quad (3.15)$$

Macierz sztywności (3.15) jest poszukiwaną macierzą określoną w dowolnym układzie odniesienia (x,y). Nosi ona nazwę **transformowanej, zredukowanej macierzy sztywności**, a warstwa kompozytu o takiej macierzy sztywności - **warstwy ogólnie ortotropowej**.

Z rozważań energetycznych przytoczonych w rozdziale 2.1 wynika symetria macierzy  $[\bar{Q}]$ , tzn.

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{Q}_{ji} \quad i,j=1,2,6 \quad (3.16)$$

Macierz (3.15) wyraża się poprzez składowe zredukowanej macierzy sztywności - równanie (2.35) - i macierz transformacji ujemnej - równanie (3.4). Operacje rachunkowe prowadzące do jawnej postaci poszczególnych składowych transformowanej macierzy sztywności, jakkolwiek elementarne, są dość nużące, toteż zostaną tu pominięte. Efekt końcowy tych operacji można przedstawić w postaci tabelarycznej (tabela 3.1).

	$Q_{11}$	$Q_{22}$	$Q_{12}$	$Q_{66}$
$\bar{Q}_{11}$	$m^4$	$n^4$	$2 m^2 n^2$	$4 m^2 n^2$
$\bar{Q}_{22}$	$n^4$	$m^4$	$2 m^2 n^2$	$4 m^2 n^2$
$\bar{Q}_{12}$	$m^2 n^2$	$m^2 n^2$	$m^4 + n^4$	$- 4 m^2 n^2$
$\bar{Q}_{66}$	$m^2 n^2$	$m^2 n^2$	$- 2 m^2 n^2$	$(m^2 - n^2)^2$
$\bar{Q}_{16}$	$m^3 n$	$- m n^3$	$m n^3 - m^3 n$	$2 (m n^3 - m^3 n)$
$\bar{Q}_{26}$	$m n^3$	$- m^3 n$	$m^3 n - m n^3$	$2 (m^3 n - m n^3)$

TABELA 3.1. Wzory transformacyjne dla macierzy sztywności w konfiguracji nieosiowej ( transformowanej, zredukowanej macierzy sztywności).

W celu uzyskania poszczególnych składowych macierzy transformowanej należy wysumować iloczyny kolejnych składowych macierzy zredukowanej i funkcji trygonometrycznych leżących w tym samym wierszu co poszukiwana składowa. Dla przykładu

$$\bar{Q}_{11} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2 m^2 n^2 Q_{12} + 4 m^2 n^2 Q_{66} \quad (3.17)$$

Zwróćmy uwagę na istotną różnicę między zredukowaną macierzą sztywności (tzn. w osiach głównych materiałowych) i transformowaną, zredukowaną macierzą sztywności (tzn. w dowolnym układzie odniesienia). W tej drugiej występują dodatkowe wyrazy

- ♦  $\bar{Q}_{16}$ ,  $\bar{Q}_{26}$  - składowe odpowiadające tzw. **sprężeniu stycznemu**, wiążące naprężenie normalne z odkształceniami stycznymi
- ♦  $\bar{Q}_{61}$ ,  $\bar{Q}_{62}$  - składowe odpowiadające tzw. **sprężeniu normalnemu**, wiążące naprężenie styczne z odkształceniami normalnymi .

Zauważmy, że macierz transformowana dla warstwy ortotropowej i macierz sztywności dla materiału o dowolnej anizotropii, (rozdział 2) są formalnie takie same. To co je różni to liczba niezależnych składowych. W przypadku anizotropii wynosi ona - w płaskim stanie naprężenia - sześć. W przypadku ortotropii - macierz transformowana nadal ma cztery niezależne składowe (sześć "różnoimiennych" składowych wyraża się przez cztery niezależne składowe macierzy zredukowanej).

Tak więc, warstwa, która w konfiguracji osiowej była ortotropowa, mimo że w konfiguracji nieosiowej charakteryzuje się macierzą sztywności całkowicie wypełnioną (tzn. ze wszystkimi elementami niezerowymi) i pozornie staje się warstwą o dowolnej anizotropii, w rzeczywistości nadal jest ortotropowa, gdyż do jej pełnego opisu wystarczają cztery niezależne stałe materiałowe.

### 3.2.1. Transformacja macierzy sztywności do konfiguracji nieosiowej z wykorzystaniem niezmienniczych charakterystyk warstwy

Bardzo wygodny, a przy tym niezwykle ułatwiający zrozumienie wpływu obrotu warstwy względem głównych osi materiałowych na wartości transformowanej macierzy sztywności podali Tsai i Pagano. Wykorzystując tożsamości trygonometryczne

$$\begin{aligned}
 m^4 &= 1/8 (3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) \\
 n^4 &= 1/8 (3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) \\
 m^3 n &= 1/8 (2\sin 2\theta + \sin 4\theta) \\
 mn^3 &= 1/8 (2\sin 2\theta - \sin 4\theta) \\
 m^2 n^2 &= 1/8 (1 - \cos 4\theta)
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

wzory transformacyjne umieszczone w tabeli 3.1 można przekształcić do postaci, którą przedstawiono w formie tabelaryzowanej - tabela 3.2.

Można wykazać, że  $U_1$ ,  $U_4$  i  $U_5$  są wielkościami niezmienniczymi dla warstwy kompozytu (patrz- pkt. 3.6, przykład 1), niezależnie od jej położenia, stąd tytuł niniejszego rozdziału.

	1	$U_2$	$U_3$
$\bar{Q}_{11}$	$U_1$	$\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{22}$	$U_1$	$-\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{12}$	$U_4$	0	$-\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{66}$	$U_5$	0	$-\cos 4\theta$
$\bar{Q}_{16}$	0	$1/2 \sin 2\theta$	$\sin 4\theta$
$\bar{Q}_{26}$	0	$1/2 \sin 2\theta$	$-\sin 4\theta$

TABELA 3.2. Transformacja macierzy sztywności poprzez funkcje kątów wielokrotnych i wielkości niezmiennicze warstwy kompozytu.

Sposób korzystania z tabeli ilustruje poniższy przykład

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (3.19)$$

Wielkości występujące w tabeli 3.2 mają postaci

$$U_1 = 1/8 (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$U_2 = 1/2 (Q_{11} - Q_{22})$$

$$U_3 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \quad (3.20)$$

$$U_4 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_5 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

Cennym spostrzeżeniem wynikającym z tabeli 3.2 jest to, że w czterech pierwszych składowych macierzy transformowanej dają się wyróżnić człony niezależne od kąta obrotu warstwy. Biorąc dla przykładu pierwszą składową macierzy transformowanej - równanie (3.19) - widzimy, że wartość  $\bar{Q}_{11}$  jest superpozycją niezależnej od kąta wielkości  $U_1$ , na którą nakładają się "zakłócenia" kątowe o okresie  $\pi$  i  $\pi/2$ . Można powiedzieć, że  $U_1$  jest dobrym wskaźnikiem sztywności w kierunku osi "x", niezależnie od jej orientacji względem osi materiałowych, gdyż nie zależy od tej orientacji.

### 3.3. Macierz podatności w konfiguracji nieosiowej

Procedura wyznaczanie macierzy podatności w dowolnym układzie odniesienia, obróconym względem układu głównych osi materiałowych jest w pełni analogiczna do procedury wyznaczania transformowanej macierzy sztywności. Składają się na nią następujące etapy

- ◆ transformacja naprężeń z dowolnego układu (x, y) do układu (1, 2),
- ◆ zapisanie równań fizycznych  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$  w układzie (1, 2),
- ◆ transformacja odkształceń z układu (1, 2) do układu (x, y),
- ◆ zapisanie równań fizycznych  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$  w układzie (x, y) tzn. w konfiguracji nieosiowej.

Wszelkie obliczenia prowadzące do ostatecznej postaci macierzy podatności w konfiguracji nieosiowej zostaną tu pominięte. Posługując się schematem analogicznym do tego pokazanego na rys. 3.4 otrzymujemy równania fizyczne w układzie  $(x, y)$  w postaci

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[\bar{S}] = [T_+]^T [S] [T_+] \quad (3.22)$$

Macierz sztywności (3.22) jest poszukiwaną macierzą w konfiguracji nieosiowej. Wyraża się poprzez składowe macierzy podatności w konfiguracji osiowej - równanie (2.36) - i macierz transformacji dodatniej - równanie (3.3).

Z rozważań energetycznych przytoczonych w rozdziale 2.1 wynika symetria macierzy  $[\bar{S}]$ , tzn.

$$\bar{S}_{ij} = \bar{S}_{ji} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.23)$$

Zależności transformacyjne dla macierzy podatności zestawiono w tabeli 3.3. Sposób korzystania z tabeli pokazano wcześniej na przykładzie transformowanej macierzy sztywności.

	$S_{11}$	$S_{22}$	$S_{12}$	$S_{66}$
$\bar{S}_{11}$	$m^4$	$n^4$	$2 m^2 n^2$	$m^2 n^2$
$\bar{S}_{22}$	$n^4$	$m^4$	$2 m^2 n^2$	$m^2 n^2$
$\bar{S}_{12}$	$m^2 n^2$	$m^2 n^2$	$m^4 + n^4$	$- m^2 n^2$
$\bar{S}_{66}$	$4 m^2 n^2$	$4 m^2 n^2$	$- 8 m^2 n^2$	$(m^2 - n^2)^2$
$\bar{S}_{16}$	$2 m^3 n$	$- 2 m n^3$	$2 (m n^3 - m^3 n)$	$m n^3 - m^3 n$
$\bar{S}_{26}$	$2 m n^3$	$- 2 m^3 n$	$2 (m^3 n - m n^3)$	$m^3 n - m n^3$

TABELA 3.3. Wzory transformacyjne dla macierzy podatności w konfiguracji nieosiowej

### 3.4 Stałe inżynierskie w konfiguracji nieosiowej

#### 3.4.1. Macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich

W celu wyznaczenia macierzy podatności w funkcji stałych inżynierskich w dowolnym układzie współrzędnych zastosujemy sposób podobny do tego, który wykorzystano przy analizie konfiguracji osiowej (rozdział 2). Wyobraźmy sobie serię trzech podstawowych prób wytrzymałościowych (dwa rozciągania i ścinanie) przeprowadzonych na próbce w konfiguracji nieosiowej  $(x, y)$ . Próby te przedstawiono na rys. 3.5.

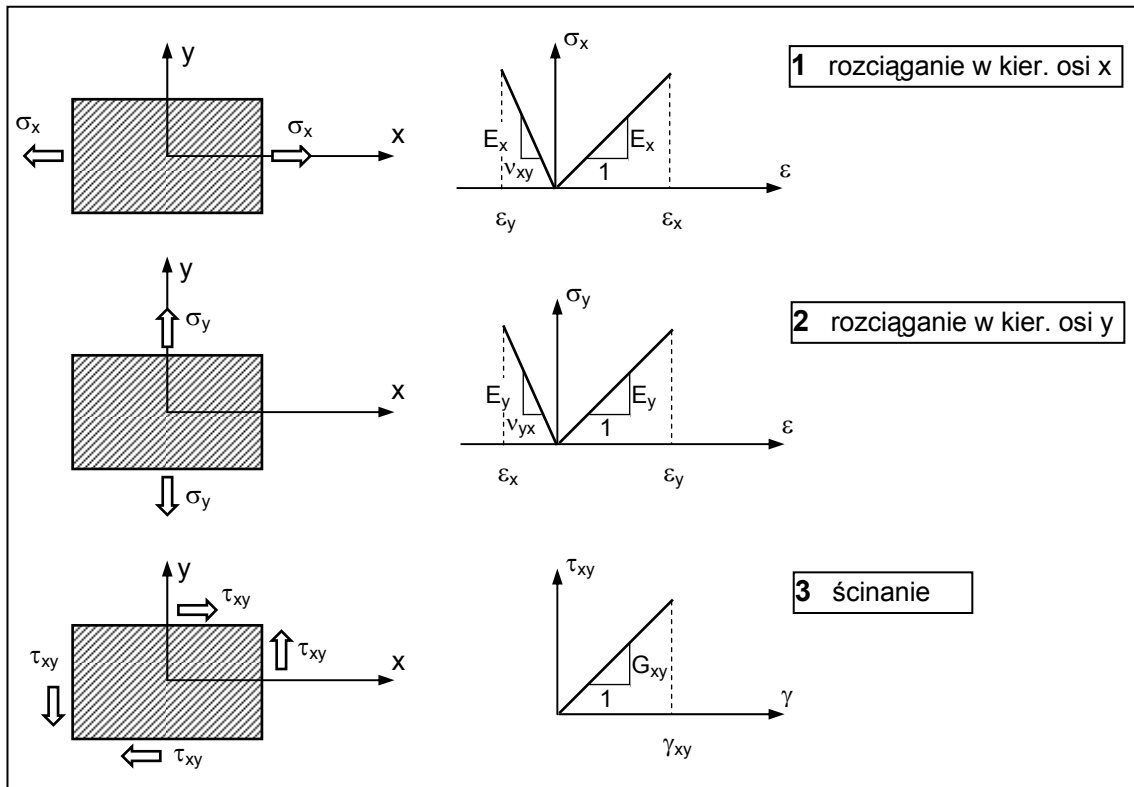
Korzystając z równań fizycznych w postaci (3.21), dla prób przedstawionych na rys. 3.5 można zapisać następujące związki

##### ♦ próba 1

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{11} \sigma_x = \frac{1}{E_x} \sigma_x \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{11} = \frac{1}{E_x} \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{21} \sigma_x \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{61} \sigma_x \quad (3.26)$$



Rys. 3.5. Schemat wyznaczania stałych inżynierskich w płaszczyźnie (x, y).

◆ **próba 2**

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{12} \sigma_y \quad (3.27)$$

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{22} \sigma_y = \frac{1}{E_y} \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{22} = \frac{1}{E_y} \quad (3.28)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{62} \sigma_y \quad (3.29)$$

◆ **próba 3**

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{16} \tau_{xy} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{26} \tau_{xy} \quad (3.31)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{66} \tau_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{66} = \frac{1}{G_{xy}} \quad (3.32)$$

Wprowadźmy następujące definicje tzw. współczynników sprzężonych  $\nu_{ij}$  i  $\eta_{i,j}$  odnoszących się do kolejnych rozpatrywanych prób

◆ **próba 1**

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{11}} = -\bar{S}_{21} E_x \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{21} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad (3.33)$$

$$\eta_{x,xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x} = \frac{\bar{S}_{61}}{\bar{S}_{11}} = \bar{S}_{61} E_x \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{61} = \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} \quad (3.34)$$

## ♦ próba 2

$$v_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{22}} = -\bar{S}_{12} E_y \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{12} = -\frac{v_{yx}}{E_y} \quad (3.35)$$

$$\eta_{y,xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_y} = \frac{\bar{S}_{62}}{\bar{S}_{22}} = \bar{S}_{62} E_y \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{62} = \frac{\eta_{y,xy}}{E_y} \quad (3.36)$$

## ♦ próba 3

$$\eta_{xy,x} = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}} = \frac{\bar{S}_{16}}{\bar{S}_{66}} = \bar{S}_{16} G_{xy} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} \quad (3.37)$$

$$\eta_{xy,y} = \frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = \frac{\bar{S}_{26}}{\bar{S}_{66}} = \bar{S}_{26} G_{xy} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{26} = \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} \quad (3.38)$$

Powyższe współczynniki mają następujące definicje

- ♦  $\nu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$  - współczynniki Poisson'a, charakteryzujące ściskanie w kierunku osi  $j$  wywołane przyłożonym obciążeniem, działającym w kierunku osi  $i$ .
- ♦  $\eta_{i,ij} = \gamma_{ij} / \varepsilon_i$  - charakteryzują ścinanie w płaszczyźnie  $(i, j)$  wywołane obciążeniem, działającym w kierunku osi  $i$ . Są to tzw. współczynniki Lechnickiego, wzajemnego wpływu II rodzaju.
- ♦  $\eta_{ij,i} = \varepsilon_i / \gamma_{ij}$  - charakteryzują ściskanie (rozciąganie) w kierunku osi  $i$  wywołane ścinaniem w płaszczyźnie  $(i, j)$ . Są to tzw. współczynniki Lechnickiego, wzajemnego wpływu I rodzaju.

Zauważmy, że współczynniki wzajemnego wpływu nie mają swoich odpowiedników w materiałach izotropowych, a także i to, że nie występują w konfiguracji osiowej warstwy ortotropowej.

W literaturze można spotkać bardzo różne sposoby ich indeksowania, odmienne od zastosowanego powyżej. Sposób stosowany tutaj, pozwala na podanie bardzo prostej zasady, ułatwiającej zrozumienie i zapamiętanie zarówno tych współczynników, jak i współczynników Poisson'a. W każdym przypadku pierwszy indeks (lub para indeksów) określa przyczynę (rodzaj obciążenia), a drugi - skutek (efekt wywołany działającym obciążeniem).

Zestawiając zależności podane z prawej strony równań (3.24), (3.28), (3.32) i (3.33) - (3.38), otrzymujemy macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich, określonych w dowolnym układzie współrzędnych  $(x, y)$

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} & \frac{\eta_{y,xy}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{\nu_{yx}}{E_y} &= \frac{\nu_{xy}}{E_x} \\ \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} \\ \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{y,xy}}{E_y} \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.4.2. Transformacja stałych inżynierskich

W celu efektywnego wykorzystania macierzy (3.39) konieczna jest znajomość występujących w niej stałych inżynierskich, w funkcji "klasycznych" 4 niezależnych stałych inżynierskich, określanych w głównych osiach materiałowych warstwy kompozytu. Należy zatem wyznaczyć wzory transformacyjne stałych inżynierskich z konfiguracji osiowej do nieosiowej.

W tym celu należy wykorzystać podane uprzednio zależności

$$E_x = \frac{1}{S_{11}} \quad E_y = \frac{1}{S_{22}} \quad G_{xy} = \frac{1}{S_{66}} \quad (3.40)$$

$$\nu_{xy} = -\bar{S}_{21} E_x \quad \eta_{x,xy} = \bar{S}_{61} E_x \quad \eta_{y,xy} = \bar{S}_{62} E_y \quad (3.41)$$

wraz z tabelą transformacyjną 3.3 i równaniem (2.37).

W efekcie otrzymamy wzory transformacyjne dla stałych inżynierskich, które podano w tabeli 3.4.

	$1/E_1$	$1/G_{12}$	$\nu_{12}/E_1$	$1/E_2$	$\times$
$1/E_x$	$m^4$	$m^2 n^2$	$- 2 m^2 n^2$	$n^4$	
$\nu_{xy}$	$- m^2 n^2$	$m^2 n^2$	$m^4 + n^4$	$- m^2 n^2$	$E_x$
$1/E_y$	$n^4$	$m^2 n^2$	$- 2 m^2 n^2$	$m^4$	
$1/G_{xy}$	$4 m^2 n^2$	$(m^2 - n^2)^2$	$8 m^2 n^2$	$4 m^2 n^2$	
$\eta_{x,xy}$	$2 m^3 n$	$m n^3 - m^3 n$	$2 (m^3 n - m n^3)$	$- 2 m n^3$	$E_x$
$\eta_{y,xy}$	$2 m n^3$	$m^3 n - m n^3$	$2 (m n^3 - m^3 n)$	$- 2 m^3 n$	$E_y$

TABELA 3.4. Transformacja stałych inżynierskich z konfiguracji osiowej do nieosiowej.

Stosując tożsamości trygonometryczne (3.18) do wzorów transformacyjnych ujętych w tabeli 3.4, można uzyskać znacznie wygodniejsze zależności, których wyprowadzenie pominiemy ze względu na trywialność, a jednocześnie dużą ilość przekształceń rachunkowych.

Ostatecznie stałe inżynierskie, wyrażają się poprzez funkcje kątów wielokrotnych zgodnie ze związkami podanymi w tabeli 3.5.

	1	$\sin 2\theta$	$\sin 4\theta$	$\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$	$\times$
$1/E_x$	$W_2$	0	0	$W_3$	$W_1$	
$1/E_y$	$W_2$	0	0	$- W_3$	$W_1$	
$1/G_{xy}$	$W_4$	0	0	0	$- 4 W_1$	
$\nu_{xy}$	$W_5$	0	0	0	$W_1$	$E_x$
$\eta_{x,xy}$	0	$W_3$	$2 W_1$	0	0	$E_x$
$\eta_{y,xy}$	0	$W_3$	$- 2 W_1$	0	0	$E_y$

TABELA 3.5. Transformacja stałych inżynierskich wyrażona poprzez funkcje kątów wielokrotnych.

Współczynniki  $W_i$ , występujące w tabeli 3.5 wyrażają się zależnościami

$$W_1 = \frac{1}{8} \left( \frac{1 + 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$W_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{3 - 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{3}{E_2} + \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \quad (3.42)$$

$$W_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{1+2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$W_5 = -\frac{1}{8} \left( \frac{1-6\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)$$

### 3.5. Zależność między macierzą sztywności i podatności w układzie nieosiowym

Odwracając transformowaną macierz sztywności (3.15) otrzymujemy składowe transformowanej macierzy podatności w postaci

$$\bar{S}_{11} = (\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{26}^2) / \Delta \quad (3.43)$$

$$\bar{S}_{22} = (\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{16}^2) / \Delta \quad (3.44)$$

$$\bar{S}_{66} = (\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2) / \Delta \quad (3.45)$$

$$\bar{S}_{12} = (\bar{Q}_{16}\bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{66}) / \Delta \quad (3.46)$$

$$\bar{S}_{16} = (\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{16}) / \Delta \quad (3.47)$$

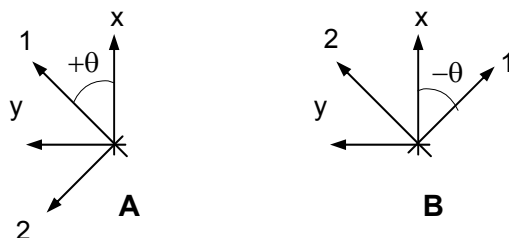
$$\bar{S}_{26} = (\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{16} - \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{26}) / \Delta \quad (3.48)$$

$$\Delta = \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{66} + 2\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}\bar{Q}_{61} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{16}^2 - \bar{Q}_{66}\bar{Q}_{12}^2 - \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{62}^2 \quad (3.49)$$

### 3.6. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale podano szczegółowo sposoby określania macierzy sztywności, podatności oraz stałych technicznych w dowolnym układzie odniesienia (x, y), czyli w **konfiguracji nieosiowej**.

Wszystkie zależności transformacyjne zawarte w tabelach 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 zostały podane dla warstwy, której główne osie materiałowe (1, 2) zorientowane są względem układu odniesienia (x, y) tak, jak pokazano to na rys. 3.6 A, a zatem warstwy, którą w kodzie laminatu (rozdział 1.4.2) określa kąt  $+\theta$  (np.  $\theta=15^\circ$ ). Dla warstwy o osiach materiałowych zorientowanych tak, jak na rys. 3.6 B, którą w kodzie laminatu określa kąt  $-\theta$  (np.  $\theta=-15^\circ$ ), należy stosować te same tabele, wstawiając we wzorach ujemną wartość kąta.



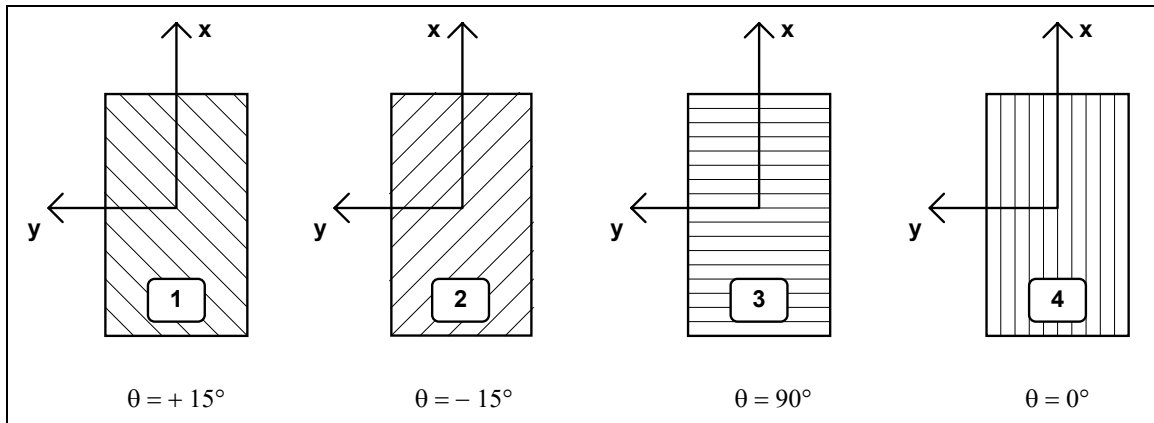
Rys. 3.6

Nasuwa się w tym miejscu uwaga, że nawet w podstawowych podręcznikach panuje w tym zakresie pewien zamęt, a co gorsza zdarzają się również i błędy. Polegają one na tym, że te same zależności transformacyjne, zapisane w różnych postaciach, dają dla tego samego kąta wartości różniące się znakiem (dotyczy to elementów macierzy z indeksami "16" i "26").

### 3.7. Przykłady

#### ◆ Przykład 1

Wyznaczyć macierze sztywności i podatności oraz stałe inżynierskie w układzie (x, y) dla pojedynczych warstw kompozytu szkło/epoksyd o konfiguracjach 15°, -15°, 90° i 0°. Wykorzystać rozwiązanie przykładu 1 w rozdziale 2.4.



W celu wyznaczenia transformowanej macierzy sztywności należy wykorzystać tabelę 3.1 lub 3.2. Skorzystamy z tej drugiej, gdyż znacznie ułatwia ona obliczenia. Wartości współczynników  $U_i$  - równanie (3.20) - po wykorzystaniu macierzy sztywności  $[Q]$  - równanie (2.44) - wynoszą

$$U_1 = 32.9 \quad U_2 = 18.3 \quad U_3 = 3.7 \quad U_4 = 8.3 \quad U_5 = 12.3 \quad [\text{GPa}] \quad (3.50)$$

Wartości sztywności (w [GPa]) wyrażone w ukł. (x, y) wynoszą dla poszczególnych warstw

$$[\bar{Q}]_1 = \begin{bmatrix} 50.6 & 6.4 & 7.8 \\ 6.4 & 18.9 & 1.4 \\ 7.8 & 1.4 & 10.4 \end{bmatrix}; \quad [\bar{Q}]_2 = \begin{bmatrix} 50.6 & 6.4 & -7.8 \\ 6.4 & 18.9 & -1.4 \\ -7.8 & -1.4 & 10.4 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$[\bar{Q}]_3 = \begin{bmatrix} 18.3 & 4.6 & 0 \\ 4.6 & 54.9 & 0 \\ 0 & 0 & 8.6 \end{bmatrix}; \quad [\bar{Q}]_4 = \begin{bmatrix} 54.9 & 4.6 & 0 \\ 4.6 & 18.3 & 0 \\ 0 & 0 & 8.6 \end{bmatrix}$$

Otrzymane macierze sztywności pokazują, że w przypadku indywidualnych warstw zawsze występują duże różnice między wartościami sztywności w różnych kierunkach, co z punktu widzenia większości zastosowań jest niekorzystne. Aby tego uniknąć kompozyty buduje się z wielu warstw o różnej orientacji, w dowolny sposób kształtując ich sztywność, a jak to będzie pokazane dalej, także cechy wytrzymałościowe.

Macierze podatności można uzyskać korzystając z tabeli 3.3 wraz macierzą podatności w osiach materiałowych - równanie (2.44) - lub poprzez odwrócenie transformowanych macierzy sztywności (3.51). Otrzymamy następujące składowe macierzy podatności (w  $[\text{GPa}]^{-1}$ )

$$[\bar{S}]_1 = \begin{bmatrix} 2.31 & -.665 & -1.65 \\ -.665 & 5.53 & -.225 \\ -1.65 & -.225 & 10.88 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \quad [\bar{S}]_2 = \begin{bmatrix} 2.31 & -.665 & 1.65 \\ -.665 & 5.53 & .225 \\ 1.65 & .225 & 10.88 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \quad (3.52)$$

$$[\bar{S}]_3 = \begin{bmatrix} 5.59 & -.465 & 0 \\ -.465 & 1.86 & 0 \\ 0 & 0 & 11.63 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \quad [\bar{S}]_4 = \begin{bmatrix} 1.86 & -.465 & 0 \\ -.465 & 5.59 & 0 \\ 0 & 0 & 11.63 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

Zauważmy, że dla przypadku 3 i 4 rozwiązania można uzyskać wprost z przykładu 1 w rozdz. 2.4. Łatwo także sprawdzić, że wartości  $U_1$ ,  $U_4$ ,  $U_5$ , obliczone dla transformowanych macierzy sztywności (3.51) w konfiguracji nieosiowej są identyczne z wartościami tych współczynników dla macierzy zredukowanej w konfiguracji osiowej - równanie (3.50). Potwierdza to niezmienny charakter  $U_1$ ,  $U_4$  i  $U_5$ . Równie łatwo pokazać, że  $U_2$  i  $U_3$  są różne dla konfiguracji osiowej i rozpatrywanych w przykładzie konfiguracji nieosiowych - nie są więc wielkościami niezmiennymi.

Znając stałe inżynierskie w układzie głównych osi materiałowych, ich wartości w dowolnym układzie odniesienia możemy obliczyć wprost z tabeli 3.5. W tym przykładzie znamy jednak macierze podatności i poszukiwane stałe znacznie szybciej uzyskuje się ze związków (3.40). Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli.

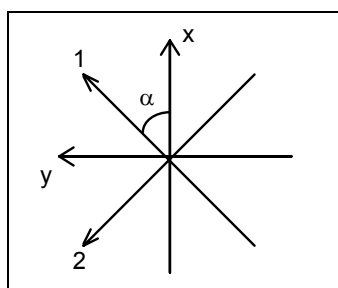
warstwa	$E_x$ [GPa]	$E_y$ [GPa]	$G_{xy}$ [GPa]	$\nu_{xy}$	$\eta_{x,y}$	$\eta_{y,x}$
1	43.3	18.1	9.2	0.29	- 0.71	- 0.041
2	43.3	18.1	9.2	0.29	0.71	0.041
3	17.9	53.8	8.6	0.083	0	0
4	53.8	17.9	8.6	0.25	0	0

Zgodnie z oczekiwaniami w warstwach nieosiowych 1 i 2 pojawiają się niezerowe współczynniki wzajemnego wpływu I i II rodzaju, które nie występują w warstwach osiowych 3 i 4.

Interesująca jest analiza wyników dla warstw 1 i 2, a więc warstw, które powstają z warstwy 4 poprzez jej obrót o stosunkowo mały kąt  $15^\circ$ . Widać, że wartość podłużnego modułu Younga dla warstwy 1(2) maleje w stosunku do warstwy 4 aż o 20 procent, podczas gdy moduł poprzeczny wzrasta, ale zaledwie o 1 procent. Wzrastają także moduł ścinania i większy współczynnik Poisson'a, odpowiednio o 7 i 16 procent. Wyniki te pokazują, jak trudno przy analizie nawet pojedynczej warstwy, nie mówiąc już o laminacie, posługiwać się "intuicją inżynierską" w miejsce rzetelnej znajomości mechaniki kompozytów.

#### ◆ Przykład 2

Wyznaczyć zależność stałych inżynierskich od kąta, jaki tworzą główne osie materiałowe (1, 2) z układem odniesienia (x, y) dla pojedynczej warstwy, jednokierunkowo zbrojonej wykonanej z wysoko-modułowego kompozytu grafit/epoksyd. Stałe materiałowe wynoszą (tabela 2.2):  $E_1=220$  GPa,  $E_2=6.9$  GPa,  $G_{12}=4.8$  GPa,  $\nu_{12}=0.25$ .

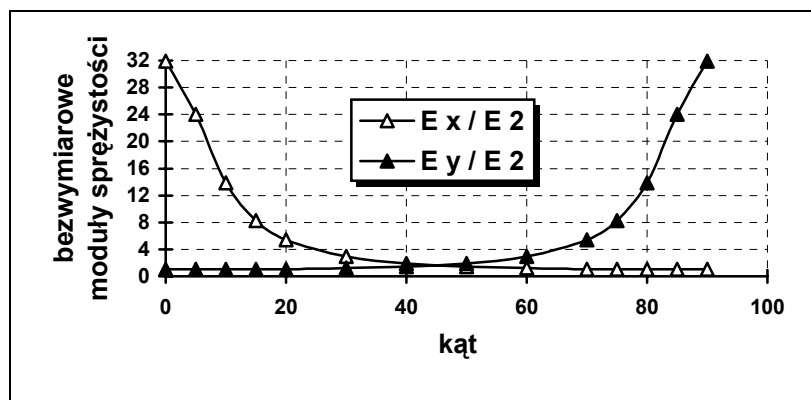


Stałe inżynierskie wyznaczmy posługując się wzorami transformacyjnymi zawartymi w tabeli 3.5. Wartości występujących w niej współczynników wynoszą

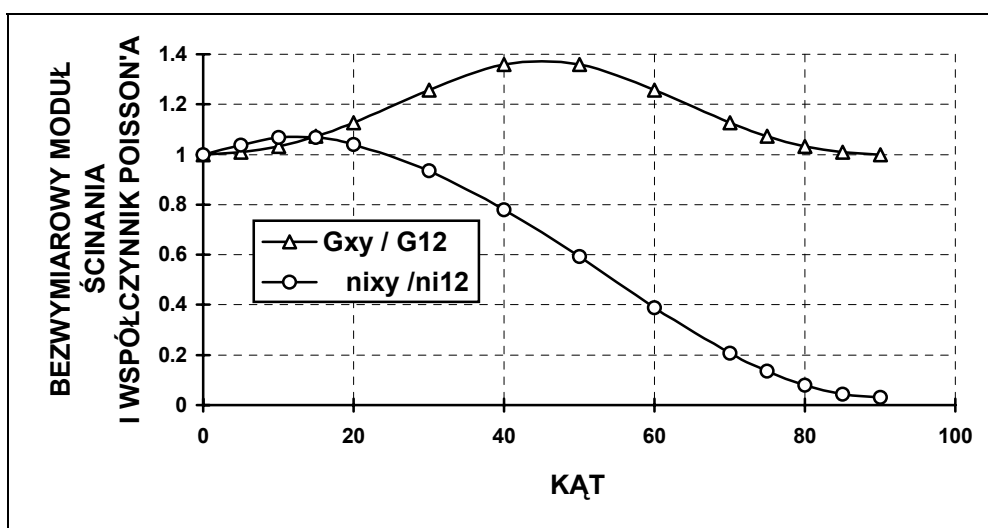
$$W_1 = -7.0735 \times 10^{-3}, W_2 = 8.181 \times 10^{-2}, W_3 = -7.0191 \times 10^{-2} [\text{MPa}]^{-1}$$

$$W_4 = 1.8 \times 10^{-1}, W_5 = 8.2098 \times 10^{-3} [\text{MPa}]^{-1}$$

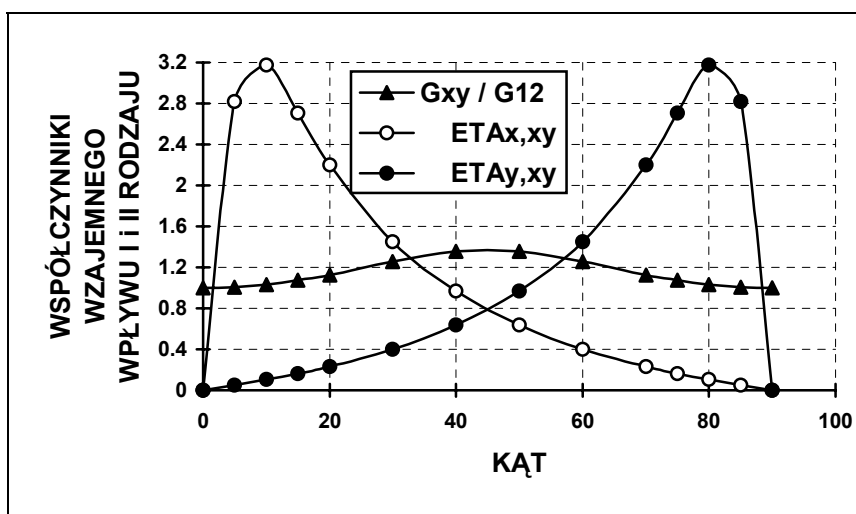
Zależność stałych inżynierskich od kąta  $\alpha$  przedstawiono na rys. 3.7 - 3.9.



Rys. 3.7. Zależność bezwymiarowych modułów Younga  $E_x / E_2$  i  $E_y / E_2$  od kąta  $\alpha$ .



Rys. 3.8. Zależność bezwymiarowego modułu ścinania  $G_{xy} / G_{12}$  i współczynnika Poisson'a  $\nu_{xy} / \nu_{12}$  od kąta  $\alpha$ .



Rys. 3.9. Zależność współczynników wzajemnego wpływu I i II rodzaju od kąta  $\alpha$ .

◆ **Przykład 3**

Wyznaczyć odkształcenia w układzie (x,y) w próbkach o konfiguracji jak w przykładzie 1, przy obciążeniu każdej z nich obciążeniem rozciągającym  $\sigma = 10$  MPa, działającym wzdłuż kierunku osi x.

W celu określenia odkształceń należy skorzystać ze związków fizycznych w postaci (3.21), kładąc w tensorze naprężenia  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y, \tau_{xy} = 0$ , oraz macierzy podatności (3.52).

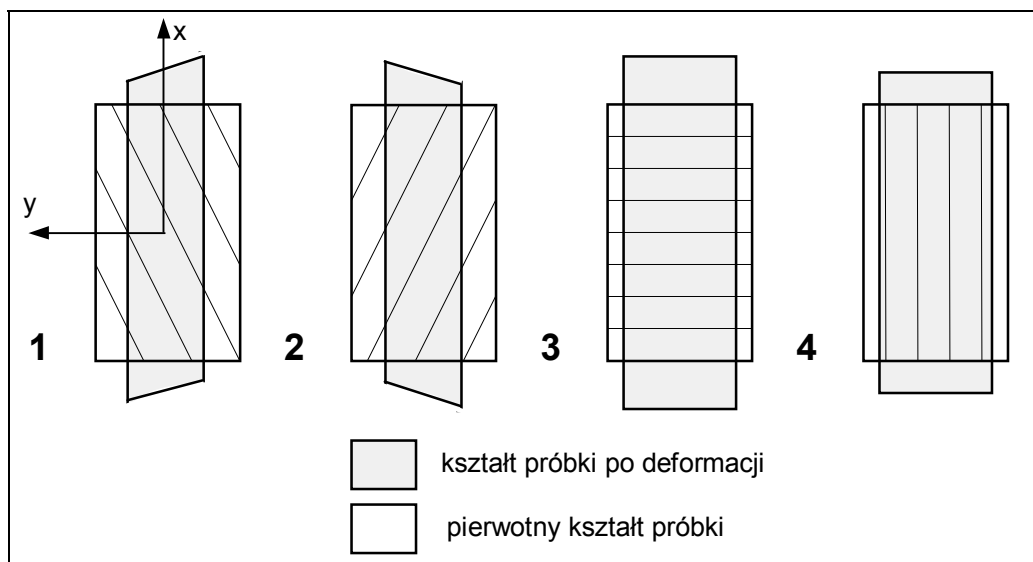
Otrzymamy dla poszczególnych warstw odkształcenia wynoszące

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_1 &= \begin{Bmatrix} 2.310 \\ -0.665 \\ -1.650 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} & \{\varepsilon\}_2 &= \begin{Bmatrix} 2.310 \\ -0.665 \\ 1.650 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \\ \{\varepsilon\}_3 &= \begin{Bmatrix} 5.590 \\ -.465 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} & \{\varepsilon\}_4 &= \begin{Bmatrix} 1.861 \\ -.465 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Zwróćmy uwagę, że wyniki uzyskane dla próbek 3 i 4 są w pełni zgodne z jakościowym rozwiązaniem przykładu 2 w rozdziale 2.4.

W próbkach 1 i 2 oprócz odkształceń normalnych występują ponadto odkształcenia styczne, a zatem próbki pod wpływem jednoosiowego rozciągania ulegają także ścinaniu. Jest to oczywiście skutek sprzężenia stycznego, występującego w nieosiowej konfiguracji warstwy ortotropowej. Efekt ten nie występuje w próbkach 3 i 4, dla których osie x i y to zarazem główne osie materiałowe, a w tych sprzężenie styczne nie występuje. Kształt próbek po deformacji pokazano na rys. 3.10.

Ten prosty przykład jest dobrą ilustracją efektów z jakimi należy się liczyć w analizie warstwy kompozytu ( a także kompozytu jako zbioru warstw) przy zmianie jej konfiguracji.



Rys. 3.10. Kształt próbek po deformacji.

