

ROZDZIAŁ 2

ROZDZIAŁ 2

RÓWNANIA FIZYCZNE DLA KOMPOZYTÓW KONFIGURACJA OSIOWA

W rozdziale tym zostaną przedstawione równania fizyczne dla materiałów anizotropowych, a w szczególności ortotropowych. Do tej klasy materiałów należy większość kompozytów warstwowych zbrojonych włóknami jednokierunkowymi. Omówiona będzie budowa macierzy sztywności i podatności w konfiguracji osiowej. Macierze te będą także określone w funkcji tzw. stałych inżynierskich. Rozważania są ograniczone do związków fizycznych liniowej sprężystości, która bardzo dobrze odpowiada zachowaniu się większości kompozytów w szerokim zakresie temperatury.

2.1. Równania fizyczne dla materiałów anizotropowych

Równania fizyczne liniowej teorii sprężystości można zapisać w ogólnej postaci

$$\sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1a)$$

lub po odwróceniu

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.1b)$$

gdzie σ_{ij} oznaczają składowe tensora naprężenia, ε_{ij} - składowe tensora odkształcenia, Q_{ijkl} są elementami **macierzy sztywności**, a S_{ijkl} elementami **macierzy podatności**.

W mechanice kompozytów powszechnie stosuje się prostszy i wygodniejszej w użyciu tzw. zapis zwężony, zwany też notacją Voigta (tabela 2.1). Równania fizyczne (2.1a) i (2.1b) mają w notacji zwężonej następujące postaci

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.2a)$$

lub po odwróceniu

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.2b)$$

Należy zwrócić uwagę na to, że macierze sztywności i podatności występujące w (2.1a) i (2.1b) są tensorami IV rzędu i jako takie mogą być transformowane wg zasad transformacji tensorowych, natomiast w zapisie Voigta stają się formalnie macierzami rzędu II, które nie posiadają jednak własności tensorowych - nie podlegają zatem transformacjom tensorowym. Analogicznie tensory naprężenia i odkształcenia stają się w notacji zwężonej macierzami jednokolumnowymi, ale nie wektorami, gdyż również nie podlegają prawu transformacji wektora (zasadę zapisu elementów tensorów naprężenia i odkształcenia w notacji zwężonej podano w tab. 2.1). Ma to swoje implikacje przy określaniu macierzy sztywności i podatności w nieosiowej konfiguracji warstwy laminatu.

ZAPIS TENSOROWY		ZAPIS VOIGTA	
Naprężenia	Odształcenia	Naprężenia	Odształcenia
σ_{11}	ε_{11}	σ_1	ε_1
σ_{22}	ε_{22}	σ_2	ε_2
σ_{33}	ε_{33}	σ_3	ε_3
τ_{23}	$2\varepsilon_{23} = \gamma_{23}$	σ_4	ε_4
τ_{13}	$2\varepsilon_{13} = \gamma_{13}$	σ_5	ε_5
τ_{12}	$2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$	σ_6	ε_6

Tabela 2.1. Konwencja zapisu tensorowego i zwężonego naprężeń i odkształceń.

Macierze Q_{ij} i S_{ij} mają w ogólnym przypadku materiału liniowo sprężystego po 36 elementów składowych, ale liczba składowych niezależnych jest mniejsza, co można wykazać rozpatrując energię odkształceń sprężystych.

Gęstość energii odkształceń sprężystych (na jednostkę objętości) określa związek

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \quad (2.3)$$

Po wykorzystaniu (2.1) i scałkowaniu otrzymujemy energię odkształceń sprężystych

$$W = 1/2 Q_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (2.4)$$

Wykorzystując to, że energia sprężysta jest potencjałem, otrzymujemy

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = \sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_j} = \sigma_j = Q_{ji} \varepsilon_i \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = Q_{ij} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = Q_{ji} \quad (2.8)$$

Wykorzystanie przemienności różniczkowania funkcji skalarnej i porównanie (2.7) i (2.8) daje

$$Q_{ij} = Q_{ji} \quad (2.9)$$

Jest to warunek symetrii macierzy sztywności, który powoduje zmniejszenie liczby niezależnych jej składowych do 21 $((36-6)/2 + 6)$. Analogicznie, jak dla macierzy sztywności, można wykazać, że również macierz podatności jest symetryczna, czyli że zachodzi warunek

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (2.10)$$

Korzystając z warunków (2.9) i (2.10), równania fizyczne (2.2a) i (2.2b) można zapisać dla najogólniejszego przypadku anizotropii w postaci

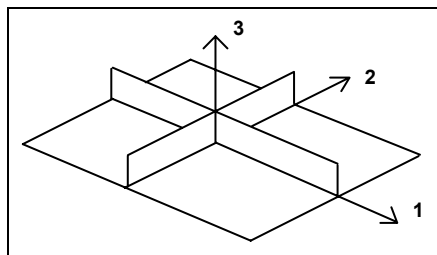
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{15} & Q_{25} & Q_{35} & Q_{45} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & Q_{46} & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.11a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.11b)$$

Liczba niezależnych składowych macierzy sztywności i podatności ulega zmniejszeniu, jeżeli materiał wykazuje własności symetrii względem określonych płaszczyzn. W skrajnym przypadku, gdy dowolna płaszczyzna jest płaszczyzną symetrii własności materiału mówimy o materiale izotropowym, który można w pełni scharakteryzować dwiema stałymi sprężystymi. Drugi przypadek skrajny to taki, w którym nie istnieje żadna płaszczyzna symetrii materiałowej - liczba niezależnych stałych materiałowych wynosi wówczas 21. Między tymi skrajnościami występuje wiele przypadków szczególnych symetrii, z których najważniejszy z punktu widzenia mechaniki kompozytów jest przypadek tzw. symetrii ortotropowej.

2.2. Równania fizyczne dla materiałów ortotropowych

Istotnym z punktu widzenia mechaniki kompozytów jest przypadek symetrii ortotropowej, gdyż większość kompozytów warstwowych o jednokierunkowym zbrojeniu zalicza się do tej klasy. O ortotropii mówimy wówczas, gdy istnieją 3 wzajemnie prostopadłe płaszczyzny symetrii, pokazane na rys. 2.1. Krawędzie przecięcia każdych 2 płaszczyzn symetrii pokrywają się w kompozytach jednokierunkowo zbrojonych z ich głównymi osiami materiałowymi. Oś "1" ma kierunek zgodny z kierunkiem włókien, oś "2" jest prostopadła do kierunku włókien, a oś "3" jest prostopadła do płaszczyzny warstwy.



Rys. 2.1. Płaszczyzny symetrii ortotropowej

Można wykazać, że równania fizyczne dla materiałów o symetrii ortotropowej mają postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.12a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.12b)$$

Z równań (2.12) widać że ortotropia jest takim szczególnym przypadkiem anizotropii, dla którego w głównych osiach materiałowych nie występuje sprzężenie naprężeń normalnych z odkształceniami stycznymi, naprężeń stycznych z odkształceniami normalnymi, ani też naprężeń stycznych z odkształceniami stycznymi odpowiadającymi różnym płaszczyznom. Mniejsza jest też niż dla anizotropii liczba niezależnych składowych macierzy sztywności, gdyż wynosi tylko 9.

Dalsze uproszczenia zachodzą dla materiałów tzw. poprzecznie izotropowych, tzn. takich, w których można wyróżnić jedną płaszczyznę, w której własności materiału są identyczne we wszystkich kierunkach, a zatem płaszczyznę izotropii materiału. Przykładowo - jeżeli tą płaszczyzną jest płaszczyzna (1, 2), to związek fizyczny można zapisać w postaci następujących równań:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{13} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (Q_{11} - Q_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.13a)$$

lub po odwróceniu

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.13b)$$

Jak wynika z równań (2.13a) i (2.13b) liczba niezależnych stałych w macierzach sztywności i podatności redukuje się dla materiału o symetrii poprzecznie izotropowej do 5.

Dla materiałów izotropowych, czyli takich których własności we wszystkich kierunkach są takie same równania fizyczne mają postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Q_{11} - Q_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (Q_{11} - Q_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (Q_{11} - Q_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.14a)$$

lub po odwróceniu

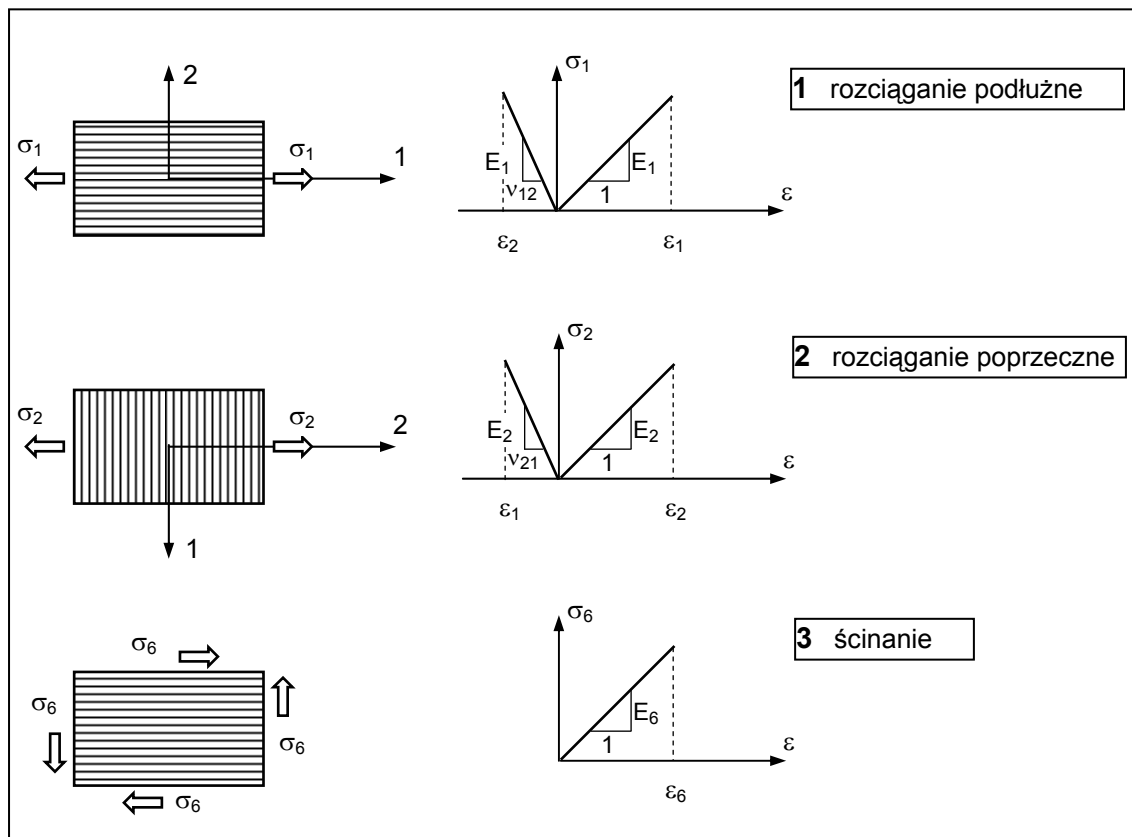
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.14b)$$

W przypadku materiałów izotropowych liczba niezależnych składowych macierzy sztywności i podatności redukuje się zatem do dwóch.

2.2.1. Stałe inżynierskie dla materiałów ortotropowych

Macierze sztywności i podatności są "strukturami" wprowadzonymi w czysto formalny sposób i nie mają fizycznej interpretacji ani bezpośredniego odniesienia do zachowania się materiału w prostych próbach wytrzymałościowych (rozciąganie, ścinanie). Powyższe cechy można natomiast przypisać stałym inżynierskim, zwanym też stałymi technicznymi, tj. uogólnionym modułom sprężystości, uogólnionym współczynnikom Poissona i modułom ścinania (w materiałach izotropowych takie stałe są tylko 2 - moduł Young'a i współczynnik Poissona). W materiałach ortotropowych, w konfiguracji nieosiowej pojawiają się dodatkowe stałe sprzężone, nie mające swoich odpowiedników w materiałach izotropowych - będzie o tym mowa w dalszych rozdziałach.

W celu zilustrowania sposobu określenia stałych inżynierskich wyobraźmy sobie serię 3 prób wytrzymałościowych, tj. jednoosiowego rozciągania (rys. 2.2 - test 1 i 2) i ścinania (rys. 2.2 - test 3) w płaszczyźnie głównych osi materiałowych (1, 2).



Rys.2.2. Schemat wyznaczania stałych inżynierskich w płaszczyźnie (1, 2).

Dla prób przedstawionych na rys.2.2 zachodzą związki

♦ próba 1

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \sigma_1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1$$

♦ próba 2

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2$$

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \sigma_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2 \quad (2.16)$$

♦ próba 3

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{G_{12}} \sigma_6 \quad (2.17)$$

Korzystając z zasady superpozycji dla przypadków 1, 2 i 3, otrzymujemy w płaszczyźnie głównych osi materiałowych (1, 2), a więc dla konfiguracji osiowej, następujące związki między odkształceniami i naprężeniami

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{G_{12}} \sigma_6$$

Porównując te związki z równaniem (2.2b) i strukturą macierzy podatności dla ortotropii (równanie (2.12b) widać, że

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} ; S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} ; S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} ; S_{22} = \frac{1}{E_2} ; S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.19)$$

Korzystając ponadto z symetrii macierzy podatności (równanie (2.10)), otrzymujemy związek

$$S_{12} = S_{21} \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (2.20)$$

Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do tego, które przedstawiono dla płaszczyzny (1, 2), w odniesieniu do 2 pozostałych płaszczyzn ortotropii, można pokazać że macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich dla ortotropii, w konfiguracji osiowej ma postać

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

gdzie występujące w (2.21) stałe noszą następujące nazwy :

- ♦ E_1, E_2, E_3 - moduły Young'a w kierunkach głównych osi materiałowych,
- ♦ ν_{ij} - współczynniki Poissona, odpowiadające odkształceniom w kierunku osi "j" przy obciążeniu działającym w kierunku osi "i", tzn.

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad \text{dla} \quad \sigma_k = \begin{cases} \sigma & \text{dla } k = i \\ 0 & \text{dla } k \neq i \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

- ♦ G_{23}, G_{31}, G_{12} - moduły ścinania w płaszczyznach (2, 3), (3, 1) i (1, 2).

Ponadto wykorzystując warunek symetrii macierzy podatności w postaci (2.20), otrzymujemy w ogólnym przypadku

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

Tak więc liczba niezależnych stałych inżynierskich dla ortotropii, w konfiguracji osiowej, wynosi 9 (3 moduły sprężystości, 3 moduły ścinania i 3 współczynniki Poissona).

2.2.2. Związek macierzy sztywności z macierzą podatności i stałymi inżynierskimi

Wykorzystując fakt, że macierze sztywności i podatności są macierzami wzajemnie odwrotnymi, elementy macierzy sztywności wyrażają się poprzez składowe macierzy podatności następująco (żmudne obliczenia pominiemy - czytelnik może potraktować je jako ćwiczenie)

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} & Q_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} \\ Q_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} & Q_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} \\ Q_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} & Q_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} \\ Q_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & Q_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$$

Zamieniając formalnie Q na S otrzymamy zależność składowych macierzy podatności od składowych macierzy sztywności.

Elementy macierzy sztywności można także wyrazić poprzez stałe inżynierskie korzystając z zależności (2.24) i (2.21). Otrzymamy wówczas następujące związki

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & Q_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 Q_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & Q_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\
 Q_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & Q_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 Q_{44} &= G_{23} & Q_{55} &= G_{31} & Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

gdzie:

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \tag{2.26}$$

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na jeszcze jeden efekt, charakterystyczny dla materiałów ortotropowych, a stojący w opozycji do "przyzwyczajień" wynikających z analizy materiałów izotropowych. W tych ostatnich, jak wiadomo, współczynnik Poissona musi spełniać warunek $-1 < \nu < 1/2$, zaś moduł Younga musi być dodatni. W przypadku materiałów ortotropowych, na podstawie rozważań energetycznych wykazano, że zarówno macierz sztywności, jak i macierz podatności muszą być dodatnio określone, co powoduje, że elementy tych macierzy leżące na przekątnej głównej muszą być dodatnie, tzn.

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \tag{2.27}$$

$$Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44}, Q_{55}, Q_{66} > 0 \tag{2.28}$$

Z równania (2.27), po wykorzystaniu (2.21) otrzymujemy warunek, jaki muszą spełniać moduły sprężystości i moduły ścinania

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{31}, G_{12} > 0 \tag{2.29}$$

Ograniczenia na wartości współczynników Poissona wynikają z równania (2.28) oraz związków określających elementy macierzy sztywności poprzez elementy macierzy podatności - równanie (2.24). Otrzymamy stąd następujące warunki ograniczające

$$\begin{aligned}
 |S_{23}| &< (S_{22} S_{33})^{1/2} \\
 |S_{13}| &< (S_{11} S_{33})^{1/2} \\
 |S_{12}| &< (S_{11} S_{22})^{1/2}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Wstawiając do (2.30) odpowiednie składowe macierzy podatności określone równaniem (2.21) otrzymujemy ograniczenia na wartości współczynników Poissona w postaci następujących nierówności

$$\begin{aligned}
 |v_{21}| < \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} & ; & |v_{12}| < \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2} \\
 |v_{32}| < \left(\frac{E_3}{E_2}\right)^{1/2} & ; & |v_{23}| < \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \\
 |v_{13}| < \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{1/2} & ; & |v_{31}| < \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Kolejny warunek ograniczający wartości współczynników Poissona wynika z faktu, że wyznacznik (2.26) dodatnio określonej macierzy podatności musi być dodatni. Biorąc pod uwagę, że moduły sprężystości są dodatnie, licznik wyrażenia (2.26) również musi być dodatni, tzn. zachodzi warunek

$$1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13} > 0 \tag{2.32}$$

Tak więc stałe inżynierskie dla ortotropowej warstwy laminatowej w głównych osiach materiałowych muszą spełniać koniunkcję warunków (2.29), (2.31) i (2.32). Relacje te są użyteczne dla oceny spójności teoretycznego modelu sprężystego materiału kompozytowego z danymi eksperymentalnymi dotyczącymi stałych inżynierskich. W przypadku, gdy warunki ograniczające nie są spełnione, wątpliwe są wyniki eksperymentalne, bądź wadliwy jest model teoretyczny.

Z nierówności (2.31) widać, że wartości współczynników Poissona zależą od modułów Younga, nie można zatem podać żadnego liczbowego ograniczenia na te wartości. Dane doświadczalne pokazują, że np. wartość większego współczynnika Poissona $v_{12} = 1.9$ nie jest czymś zaskakującym.

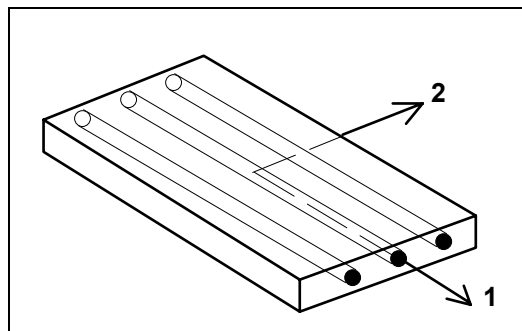
Warto zauważyć, że dla materiału izotropowego nierówność (2.32), wobec równości wszystkich współczynników Poissona w niej występujących, redukuje się do nierówności

$$1 - 3\nu^2 - 2\nu^3 > 0 \tag{2.33}$$

Nierówność ta jest spełniona tylko wówczas, gdy współczynnik Poissona spełnia warunek $-1 < \nu < 0.5$, a zatem (2.32) zapewnia prawidłowe przejście do materiału izotropowego.

2.3. Związki fizyczne dla materiału ortotropowego w płaskim stanie naprężenia

Biorąc pod uwagę, że konstrukcje wykonane z kompozytów laminatowych są generalnie konstrukcjami dwuwymiarowymi (grubość laminatów jest znikomo mała w stosunku do pozostałych wymiarów) celowe jest zwrócenie szczególnej uwagi na płaski stan naprężenia. Będzie on analizowany dla płaszczyzny utworzonej przez główne osie materiałowe warstwy kompozytowej, tzn. w układzie (1, 2), leżącym w płaszczyźnie warstwy - rys. 2.3. Przypomnijmy raz jeszcze, że taka konfiguracja nosi nazwę **konfiguracji osiowej**.



Rys. 2.3. Konfiguracja osiowa warstwy jednokierunkowo zbrojonej.

Dla płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie (1, 2), określonego warunkiem

$$\sigma_3 = 0 \quad \sigma_4 = 0 \quad \sigma_5 = 0 \quad (2.34)$$

związki fizyczne (2.2) upraszczają się do postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Macierz sztywności w postaci występującej w równaniu (2.35) jest zwana **zredukowaną macierzą sztywności**, a warstwa ortotropowa, dla której Q_{ij} ma taką właśnie postać - **warstwą specjalnie ortotropową**.

Sposób określania stałych inżynierskich dla płaskiego stanu naprężenia przedstawiono szczegółowo w poprzednim rozdziale (rys. 2.2, rów. (2.15) - (2.21)). W funkcji stałych inżynierskich równanie (2.36) ma postać

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Odwracając macierz podatności lub też wykorzystując związki (2.24) z uproszczeniami wynikającymi z płaskiego stanu naprężenia otrzymamy niezależne składowe macierzy sztywności w postaci

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}} \quad (2.38)$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}} \quad (2.39)$$

$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}} \quad (2.40)$$

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (2.41)$$

Korzystając z równań (2.37) - (2.41) równania fizyczne (2.35) przyjmują postać, w której macierz sztywności określona jest w funkcji stałych inżynierskich następująco

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m E_1 & m \nu_{21} E_1 & 0 \\ m \nu_{12} E_2 & m E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad m = [1 - \nu_{12} \nu_{21}]^{-1} \quad (2.42)$$

Ilość niezależnych stałych w macierzach sztywności, podatności i stałych inżynierskich zmniejsza się do czterech, w porównaniu z dziewięcioma dla ogólnego przypadku ortotropii. Niezależne stałe inżynierskie, standardowo podawane dla danego typu materiału kompozytowego to

- ♦ E_1 tzw. podłużny moduł Younga
- ♦ E_2 tzw. poprzeczny moduł Younga
- ♦ G_{12} moduł ścinania
- ♦ ν_{12} tzw. większy (ang. *major*) współczynnik Poissona.

Piąta stała inżynierska, występująca w równaniu (2.37) i (2.42)

- ♦ ν_{21} tzw. mniejszy (ang. *minor*) współczynnik Poissona

jest stałą zależną od pozostałych stałych inżynierskich i wynosi

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \tag{2.43}$$

Stałe inżynierskie dla typowych kompozytów laminatowych jednokierunkowo zbrojonych zestawiono w tabeli 2.2. Należy je traktować jako wartości typowe, ale nie koniecznie bardzo precyzyjne. W rozdziale 1 wspomniano już o dużym rozrzucie w wartościach stałych materiałowych dla włókien. Daje on o sobie znać także w przypadku kompozytów jednokierunkowo zbrojonych, w których udział włókien w ich ogólnej objętości wynosi z reguły 60 % (reszta przypada na matrycę). W tabeli 2.3 zestawiono stałe inżynierskie dla formalnie tego samego materiału, zestawione na podstawie danych różnych autorów. W ostatniej kolumnie podano procentowe różnice wartościami minimalnymi i maksymalnymi - wachają się one od kilkunastu do kilkudziesięciu procent.

Na zakończenie należy podkreślić, że znajomość macierzy sztywności, podatności i ich postaci w funkcji stałych inżynierskich przedstawionych tutaj dla pojedynczej warstwy kompozytu w jej konfiguracji osiowej, odgrywa podstawową rolę w analizie nieosiowej konfiguracji warstwy, a potem przy rozważaniach dotyczących kompozytu jako zbioru warstw czyli w tzw. klasycznej teorii laminacji.

MATERIAŁ □	STAŁE INŻYNIERSKIE			
	MODUŁ PODŁUŻNY □ E_1 [GPa] □	MODUŁ POPRZECZNY □ E_2 [GPa] □	MODUŁ ŚCINANIA □ G_{12} [GPa]	WSPÓŁCZYNNIK POISSONA ν_{12}
szkło E/epoksyd	45	12.0	5.5	.28
szkło S/epoksyd	55	16.0	7.6	.28
grafit/epoksyd WW**	145	10.0	4.8	.25
grafit/epoksyd WM**	220	6.9	4.8	.25
grafit/epoksyd UWM**	290	6.2	4.8	.25
Toray T300/epoksyd *	121	10.2	4.8	.30
Kevlar 49	76	5.5	2.1	.34
boron/epoxy	210	19.0	4.8	.25

*) - badania DTH - Lyngby. Pozostałe dane na podstawie *Delaware Composites Design Encyclopedia*, Vol.1.

***) - skróty oznaczają: WW - kompozyt wysoko-wytrzymały, WM - wysoko-modułowy, UWM - ultrawysoko-modułowy

TABELA 2.2. Stałe inżynierskie dla typowych kompozytów jednokierunkowo zbrojonych.

STAŁE INŻYN.	ŹRÓDŁO DANYCH							Δ [%]
	1	2	3	4	5	6	7	
E_1 [GPa]	137	121	139	128	145	148	132	18

E_2 [GPa]	10.0	10.2	11.5	11.0	10.0	7.4	9.3	36
G_{12} [GPa]	4.8	4.8	5.3	4.5	4.8	3.9	4.6	26
ν_{12}	0.3	0.3	0.31	0.25	0.25	0.31	0.28	19

1, 2 - DTH - Lyngby, 3, 4 - Major Airframe Company Reports . Kolumna 3 podaje wartości średnie, kolumna 4 wartości rekomendowane do projektowania, 5 - C. Zweben, 6 - K. F. Rogers i in. 7 - T. Ishikawa i in. (dane w kolumnach 3 - 7 zaczerpnięto z *Delaware Composites Design Encyclopedia*, Vol.1.)

TABELA 2.3. Porównanie wartości stałych inżynierskich dla kompozytu jednokierunkowo zbrojonego grafit/epoksyd.

2.4. Przykłady

◆ Przykład 1

Określić macierze sztywności i podatności dla kompozytu szkło/epoksyd, dla którego stałe techniczne wynoszą : $E_1 = 53.8$ GPa, $E_2 = 17.9$ GPa, $G_{12} = 8.6$ GPa, $\nu_{12} = 0.25$.

Korzystając z równania (2.37) otrzymujemy macierz podatności S_{ij} . Macierz sztywności wyznaczamy poprzez jej odwrócenie (równania (2.38) - (2.41)) lub bezpośrednio w funkcji stałych inżynierskich, z równania (2.42). W tym drugim przypadku należy dodatkowo skorzystać z relacji (2.43), celem wyznaczenia ν_{21} . Otrzymujemy ostatecznie

$$[S] = \begin{bmatrix} 1.86 & -.465 & 0 \\ -.465 & 5.59 & 0 \\ 0 & 0 & 11.53 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ [GPa]}^{-1} \quad [Q] = \begin{bmatrix} 54.9 & 4.57 & 0 \\ 4.57 & 18.3 & 0 \\ 0 & 0 & 8.6 \end{bmatrix} \text{ [GPa]} \quad (2.44)$$

◆ Przykład 2

Określić kształt pokazanej na rysunku próbki prostokątnej, złożonej z dwóch trwale połączonych części tego samego kompozytu jednokierunkowo zbrojonego, poddanej jednoosiowemu rozciąganiu obciążeniem σ .

Na rysunku "2" pokazano główne osie materiałowe dla części lewej ($1^l, 2^l$) i dla części prawej ($1^p, 2^p$). Korzystając ze związku między odkształceniami i naprężeniami (2.37) oddzielnie dla każdej z części, otrzymamy następujące równania

- dla części lewej

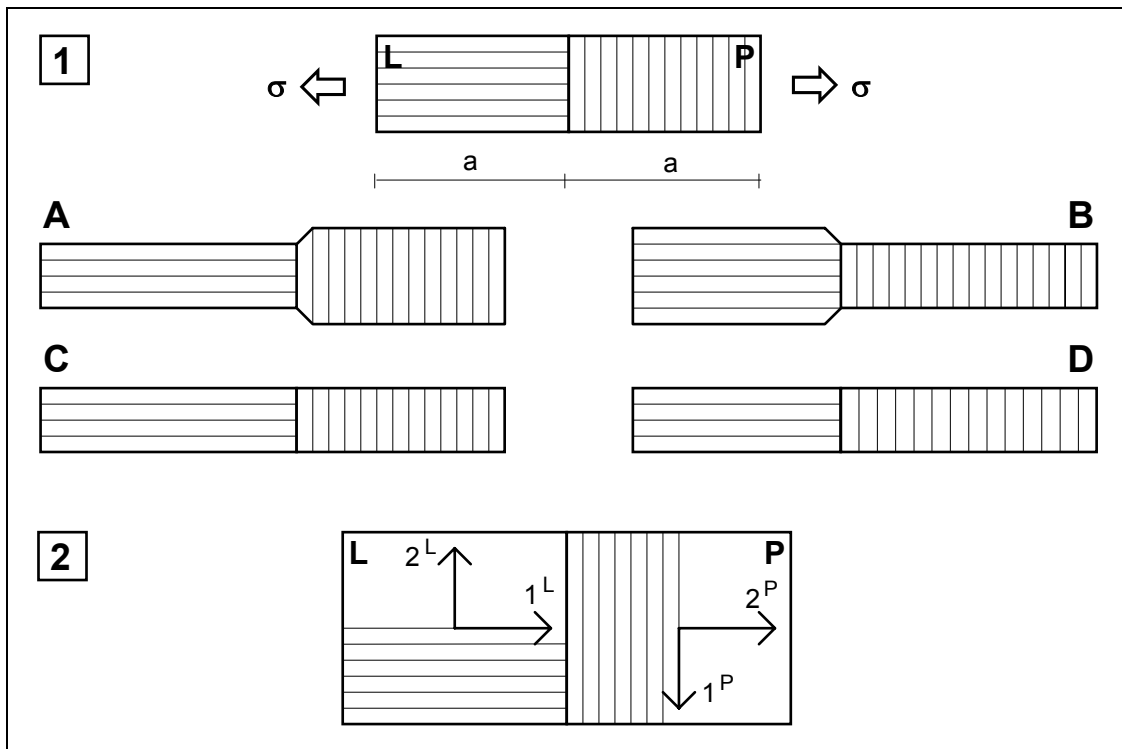
$$\varepsilon_1^l = \frac{\sigma}{E_1} \quad \varepsilon_2^l = -\nu_{12} \frac{\sigma}{E_1}$$

- dla części prawej

$$\varepsilon_2^p = \frac{\sigma}{E_2} \quad \varepsilon_1^p = -\nu_{21} \frac{\sigma}{E_2}$$

Porównując odkształcenia na kierunku działającego obciążenia tzn. ε_1^l i ε_2^p otrzymujemy

$$\frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^l} = \frac{E_1}{E_2}$$



Uwzględniając, że moduł podłużny E_1 w rzeczywistych materiałach kompozytowych jest zawsze większy od modułu poprzecznego E_2 , a ponadto biorąc pod uwagę, że początkowe długości obu części były jednakowe i wynosiły "a" - wydłużenie części prawej musi być większe od wydłużenia części lewej.

Porównanie odkształceń poprzecznych do kierunku obciążenia tzn. ε_1^P i ε_2^L oraz wykorzystanie warunku (2.43) prowadzi do związku

$$\frac{\varepsilon_2^L}{\varepsilon_1^P} = \frac{\nu_{12}}{\nu_{21}} \frac{E_2}{E_1} = 1$$

Oznacza on, że odkształcenia poprzeczne do kierunku działającego obciążenia (w tym wypadku oznaczające zwężenie próbki) obu części są jednakowe. Ostatecznie zatem, rozważana próbka przyjmie pod wpływem działającego obciążenia kształt oznaczony na rysunku literą **D**.