DODATKI

DODATEK 1

MACIERZE SZTYWNOŚCI TARCZOWEJ, SPRZĘŻEŃ I ZGINANIA DLA LAMINATÓW SYMETRYCZNYCH I ANTYSYMETRYCZNYCH

	LAMINATY SYMETRYCZNE				LAMINATY ANTYSYMETRYCZNE	
	KĄTOWE		POPRZECZNE		KĄTOWE	POPRZECZNE
	regularne	zrówn.	regularne	zrównoważone	regularne, zrównoważone	
A_{11}/t	$\overline{Q}_{11}$	$\overline{Q}_{11}$	$Q_{11}\left[\frac{P}{N}+\frac{E_2}{E_1}\left(1-\frac{P}{N}\right)\right]$	$\frac{1}{2}Q_{11}\left(1+\frac{E_2}{E_1}\right)$	$\overline{Q}_{11}$	$\frac{1}{2}Q_{11}\left(1+\frac{E_2}{E_1}\right)$
A_{22}/t	$\overline{Q}_{22}$	$\overline{Q}_{22}$	$Q_{22}\left[\frac{P}{N}+\frac{E_1}{E_2}\left(1-\frac{P}{N}\right)\right]$	A_{11}/t	$\overline{Q}_{22}$	A_{11}/t
A_{66}/t	$\overline{Q}_{66}$	$\overline{Q}_{66}$	Q_{66}	Q_{66}	$\overline{Q}_{66}$	Q_{66}
A_{12}/t	$\overline{Q}_{12}$	$\overline{Q}_{12}$	Q_{12}	Q_{12}	$\overline{Q}_{12}$	Q_{12}
A_{16}/t	$\overline{Q}_{16}\left(\frac{2P}{N}-1\right)$	0	0	0	0	0
A_{26}/t	$\overline{Q}_{26}\left(\frac{2P}{N}-1\right)$	0	0	0	0	0

P - liczba warstw $+\alpha$ lub 0°, R - liczba warstw - α lub 90°, N - liczba wszystlich warstw.

TABELA A.1.1. Macierze sztywności tarczowej dla laminatów symetrycznych i antysymetrycznych

	LAMINATY SYMETRYCZNE				LAMINATY ANTYSYMETRYCZNE	
	KĄTOWE		POPRZECZNE		KĄTOWE 1)	POPRZECZNE 1)
	regularne	zrówn.	regularne	zrówn.	regularne, zrównoważone	
B_{11}	0	0	0	0	0	$\pm \frac{Q_{11} t^2}{4N}\left(\frac{E_2}{E_1}-1\right)$
B_{22}	0	0	0	0	0	$-B_{11}$
B_{66}	0	0	0	0	0	0
B_{12}	0	0	0	0	0	0
B_{16}	0	0	0	0	$\pm \frac{\overline{Q}_{16} t^2}{2N}$	0
B_{26}	0	0	0	0	$\pm \frac{\overline{Q}_{26} t^2}{2N}$	0

1)

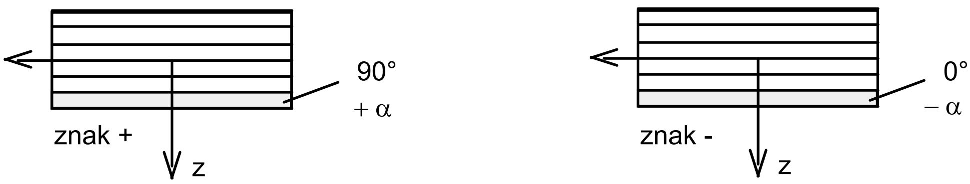


TABELA A.1.2. Macierze sztywności sprzężeń dla laminatów symetrycznych i antysymetrycznych

	LAMINATY SYMETRYCZNE				LAMINATY ANTYSYMETRYCZNE	
	KĄTOWE		POPRZECZNE		KĄTOWE	POPRZECZNE
	regularne 1)	zrówn. 2)	regularne	zrówn. 2)	regularne, zrównoważone	
D_{11}	$\frac{\overline{Q}_{11} t^3}{12}$	$\frac{\overline{Q}_{11} t^3}{12} C_N$	$\frac{Q_{11} t^3}{12} \frac{1}{N^3} \times \left[P\left(4P^2-3\right)+\frac{E_2}{E_1}R\left(4R^2-3\right)\right]$	$\frac{Q_{11} t^3}{12}\left(C_P + \frac{E_2}{E_1} C_R\right)$	$\frac{\overline{Q}_{11} t^3}{12}$	$\pm \frac{Q_{11} t^3}{24}\left(1+\frac{E_2}{E_1}\right)$
D_{22}	$\frac{\overline{Q}_{22} t^3}{12}$	$\frac{\overline{Q}_{22} t^3}{12} C_N$	$\frac{Q_{22} t^3}{12} \frac{1}{N^3} \times \left[P\left(4P^2-3\right)+\frac{E_1}{E_2}R\left(4R^2-3\right)\right]$	$\frac{Q_{22} t^3}{12}\left(C_P + \frac{E_1}{E_2} C_R\right)$	$\frac{\overline{Q}_{22} t^3}{12}$	D_{11}
D_{66}	$\frac{\overline{Q}_{66} t^3}{12}$	$\frac{\overline{Q}_{66} t^3}{12} C_N$	$\frac{Q_{66} t^3}{12}$	$\frac{Q_{66} t^3}{12} C_N$	$\frac{\overline{Q}_{66} t^3}{12}$	$\frac{Q_{66} t^3}{12}$
D_{12}	$\frac{\overline{Q}_{12} t^3}{12}$	$\frac{\overline{Q}_{12} t^3}{12} C_N$	$\frac{Q_{12} t^3}{12}$	$\frac{Q_{12} t^3}{12} C_N$	$\frac{\overline{Q}_{12} t^3}{12}$	$\frac{Q_{12} t^3}{12}$
D_{16}	$\frac{\overline{Q}_{16} t^3}{12}(C_P - C_R)$	$\frac{\overline{Q}_{16} t^3}{12}(C_P - C_R)$	0	0	0	0
D_{26}	$\frac{\overline{Q}_{26} t^3}{12}(C_P - C_R)$	$\frac{\overline{Q}_{26} t^3}{12}(C_P - C_R)$	0	0	0	0

1)

$$
C_p - C_R = \begin{cases} \dfrac{3N^2-2}{N^3} & \text{jeżeli} \quad P = R+1 \quad ; \quad P - \text{liczba warstw} + \alpha \\ \dfrac{-3N^2+2}{N^3} & \text{jeżeli} \quad P = R-1 \quad ; \quad R - \text{liczba warstw} - \alpha \end{cases}
$$

2)

$$
C_N = \sum_{k=1}^{N}\left(v_k^3 + \frac{12}{t^2} v_k z_k^{c^2}\right) \qquad C_P = \sum_{k=1}^{P}\left(v_k^3 + \frac{12}{t^2} v_k z_k^{c^2}\right) \qquad C_R = \sum_{k=1}^{R}\left(v_k^3 + \frac{12}{t^2} v_k z_k^{c^2}\right)
$$

TABELA A.1.3. Macierze sztywności zginania dla laminatów symetrycznych i antysymetrycznych

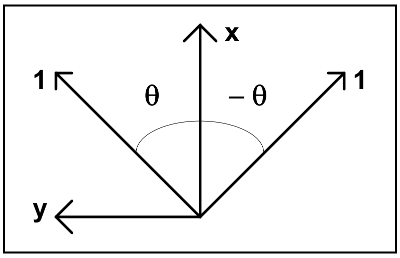
DODATEK 2

PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI I RÓWNANIA MECHANIKI KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH

★ **Macierz sztywności "płaskiej" warstwy**

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} mE_1 & m\nu_{21}E_1 & 0 \\ m\nu_{12}E_2 & mE_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \qquad m = (1-\nu_{12}\nu_{21})^{-1} \qquad \nu_{21} = (E_2\nu_{12})/E_1$$

★ **Transformowana macierz sztywności warstwy**



$$U_1 = 1/8\,(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$U_2 = 1/2\,(Q_{11} - Q_{22})$$

$$U_3 = 1/8\,(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_4 = 1/8\,(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_5 = 1/8\,(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

	1	U_2	U_3
$\overline{Q}_{11}$	U_1	$\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
$\overline{Q}_{22}$	U_1	$-\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
$\overline{Q}_{12}$	U_4	-	$-\cos 4\theta$
$\overline{Q}_{66}$	U_5	-	$-\cos 4\theta$
$\overline{Q}_{16}$	-	$\sin 2\theta$	$\sin 4\theta$
$\overline{Q}_{26}$	-	$\sin 2\theta$	$-\sin 4\theta$

★ **Macierz sztywności tarczowej laminatu**

$$[A] = \sum_{k=1}^{N} [\overline{Q}]_k t_k$$

★ **Macierz sztywności giętnej laminatu**

$$[D] = \sum_{k=1}^{N} [\overline{Q}]_k \left(t_k {z_k^c}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right)$$

★ **Macierz sztywności sprzężeń laminatu**

$$[B]=\sum_{k=1}^{N}\left[\overline{Q}\right]_k t_k z_k^c$$

★ **Wypadkowe siły termiczne**

$$\left\{N^T\right\}=\Delta T\sum_{k=1}^{N}\left[\overline{Q}\right]_k \{\alpha\}_k t_k$$

★ **Wypadkowe momenty termiczne**

$$\left\{M^T\right\}=\Delta T\sum_{k=1}^{N}\left[\overline{Q}\right]_k \{\alpha\}_k t_k z_k^c$$

★ **Siły i momenty wypadkowe**

$$\begin{Bmatrix}\overline{N}\\ \\ \overline{M}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}N+N^T\\ \\ M+M^T\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ \\ B & D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^o\\ \\ \kappa^o\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon^o\\ \\ \kappa^o\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & B'\\ \\ B' & D'\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{N}\\ \\ \overline{M}\end{Bmatrix}$$

gdzie

$$[H]=[D]-[B][A]^{-1}[B]$$

$$\left[A'\right]=[A]^{-1}+[A]^{-1}[B][H]^{-1}[B][A]^{-1}$$

$$\left[B'\right]=-[A]^{-1}[B][H]^{-1}$$

$$\left[D'\right]=[H]^{-1}$$

★ **Odkształcenia laminatu**

$$\{\varepsilon\}=\left\{\varepsilon^o\right\}+z\left\{\kappa^o\right\}$$

$$\{\varepsilon\}=\left([A']+z[B']\right)\left\{\overline{N}\right\}+\left([B']+z[D']\right)\left\{\overline{M}\right\}$$

★ **Naprężenia warstwowe**

$$\{\sigma\}_k=\left[\overline{Q}\right]_k\{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma\}_k=\left(\left[\overline{Q}\right]_k[A']+z\left[\overline{Q}\right]_k[B']\right)\left\{\overline{N}\right\}+\left(\left[\overline{Q}\right]_k[B']+z\left[\overline{Q}\right]_k[D']\right)\left\{\overline{M}\right\}$$

★ **Laminaty symetryczne**

$$\{\overline{N}\} = \{N + N^T\} = [A]\{\varepsilon^o\}$$

$$\{M\} = [D]\{\kappa^o\}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1}\{\overline{N}\} + z\,[D]^{-1}\{M\}$$

$$\{\sigma\}_k = [\overline{Q}]_k\,[A]^{-1}\{N\} + [\overline{Q}]_k\left([A]^{-1}\{N^T\} - \{\alpha\}_k\,\Delta T\right) + z\,[\overline{Q}]_k\,[D]^{-1}\{M\}$$

★ **Laminaty symetryczne, stan tarczowy**

$$\{\overline{N}\} = \{N + N^T\} = [A]\{\varepsilon^o\}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1}\{\overline{N}\}$$

$$\{\sigma\}_k = [\overline{Q}]_k[A]^{-1}\{N\} + [\overline{Q}]_k\left([A]^{-1}\{N^T\} - \{\alpha\}_k\Delta T\right)$$

★ **Kryterium Azzi'ego-Tsai'a-Hill'a**

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1$$