

Dr inż. Janusz German
Politechnika Krakowska
Instytut Mechaniki Budowli
Katedra Wytrzymałości Materiałów

WYTRZYMAŁOŚĆ KOMPOZYTÓW WARSTWOWYCH

Zagadnienia wytrzymałościowe w przypadku materiałów kompozytowych, a mówiąc ściślej włóknistych kompozytów warstwowych (np. laminaty zbrojone włóknami) należy rozpatrywać na trzech poziomach obserwacji, wynikających z ich budowy.

Najniższy poziom obserwacji to poziom mikroskopowy (można też nazwać go materiałowym), na którym rozróżniamy składniki tworzące kompozyt tzn. włókna i matrycę. Ich własności wytrzymałościowe decydują bezpośrednio o wytrzymałości indywidualnej warstwy kompozytu. Ta tematyka jest przedmiotem zainteresowań tzw. mikromechaniki kompozytów i wykracza poza ramy niniejszego artykułu.

Kolejny poziom obserwacji to poziom warstwy, rozumianej jako podstawowy "budulec" kompozytu warstwowego, ale jednocześnie będącej już elementem zdolnym do samodzielnego przenoszenia obciążenia. Pojawia się zatem problem określenia jej nośności, czyli wartości obciążenia, jakie jest ona w stanie bezpiecznie przenieść.

I wreszcie najwyższy poziom analizy wytrzymałościowej to poziom laminatu jako zbioru warstw, których własności i sposób ułożenia decydują bezpośrednio o nośności kompozytu.

Z praktycznego punktu widzenia najbardziej istotny jest ten ostatni przypadek, gdyż zadaniem konstruktora jest zaprojektowanie - do określonego celu - kompozytu o odpowiednim doborze warstw, rzadko natomiast zajmuje się on doбором składu samej warstwy, co jest domeną inżynierii materiałowej i technologii.

W tym artykule przedstawione będą podstawowe koncepcje odnoszące się do analizy wytrzymałościowej warstwy, a następnie na tej podstawie omówione będą podstawowe zagadnienia dotyczące wytrzymałości laminatów warstwowych.

1. NOŚNOŚĆ JEDNOKIERUNKOWO ZBROJONEJ WARSTWY ORTOTROPOWEJ

Określenie nośności warstwy ortotropowej jednokierunkowo zbrojonej (kompozytu jednokierunkowego) jest pojęciowo znacznie bardziej złożone niż określenie nośności elementu wykonanego z materiału izotropowego. W tym ostatnim, powszechnie używanymi narzędziami są różnorakie hipotezy wyteżeniowe, z których większość zdefiniowana jest poprzez naprężenia lub odkształcenia główne, bądź ich niezmienniki. W tle takiego podejścia

stoi zawsze współosiowość tensorów naprężenia i odkształcenia. W przypadku materiałów anizotropowych, a w szczególności ortotropowych takie podejście jest bezużyteczne, gdyż kierunki główne obu tensorów są różne. Innym ważnym czynnikiem różniącym pod względem analizy wytrzymałościowej materiały anizotropowe od izotropowych jest, że w tych ostatnich w celu określenia stanów bezpiecznych w oparciu o większość kryteriów wyężeńiowych, wystarczy znać wartość pewnej umownej granicy niebezpiecznej naprężeń, wyznaczanej z testu jednoosiowego rozciągania. W przypadku warstwy kompozytowej np. jednokierunkowo zbrojonej włóknami, granice niebezpieczne naprężeń przy rozciąganiu wzdłuż kierunku włókien i w kierunku do nich prostopadłym są zasadniczo różne. Podobna sytuacja ma miejsce dla ściskania. Dochodzi do tego jeszcze granica naprężeń niebezpiecznych przy ścinaniu. Tak więc w miejsce jednej granicy niebezpiecznej, jak w przypadku materiałów izotropowych, mamy pięć różnych charakterystyk wytrzymałościowych, a mianowicie :

- ◆ X_t (σ_{Lt}) - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku włókien
- ◆ X_c (σ_{Lc}) - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku włókien
- ◆ Y_t (σ_{Tt}) - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku poprzecznym do włókien
- ◆ Y_c (σ_{Tc}) - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku poprzecznym do włókien
- ◆ S (τ_{LT}) - wytrzymałość warstwy na ścinanie w płaszczyźnie głównych osi materiałowych (1,2)

Powyżej podano podwójną symbolikę stosowaną przez różnych autorów. W niniejszej pracy stosowane będą pierwsze oznaczenia .

Zamiast naprężeń granicznych - jako charakterystyki wytrzymałościowe - można również podawać odkształcenia graniczne (niszczące) ϵ_{Lt} , ϵ_{Lc} , ϵ_{Tt} , ϵ_{Tc} , γ_{LT} .

Wartości naprężeń i odkształceń granicznych dla niektórych kompozytów podane są w tabeli 1.

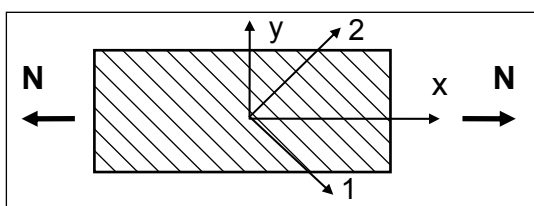
Niezależnie od typu kompozytu jednokierunkowego, widoczne jest, że jego wytrzymałości poprzeczne (w kierunku poprzecznym do włókien) są wielokrotnie mniejsze od wytrzymałości podłużnych (w kierunku włókien). Wynika to wprost z charakterystyk wytrzymałościowych składników kompozytu, tzn. włókien i matrycy oraz ich roli w kompozycie. W przenoszeniu obciążenia podłużnego podstawową rolę pełnią włókna, a te mają w porównaniu z matrycą wytrzymałość na rozciąganie o 2 rzędy wielkości większą, co bezpośrednio rzutuje na podłużną wytrzymałość kompozytu. Z kolei w kierunku poprzecznym podstawowe znaczenie dla zachowania się kompozytu ma matryca, charakteryzująca się niską wytrzymałością. Tak więc i kompozyt w kierunku poprzecznym musi być mało wytrzymały. Analogiczny wniosek można wysnuć w stosunku do wytrzymałości na ścinanie, również wielokrotnie mniejszej od podłużnej, gdyż przy obciążeniu ścinającym główną rolę także odgrywa matryca.

KOMPOZYT		WYTRZYMAŁOŚĆ [MPa]					ODKSZTAŁCENIA NISZCZĄCE [%]				
MATERIAŁ	v_f	X_t	X_c	Y_t	Y_c	S	ϵ_{Lt}	ϵ_{Lc}	ϵ_{Tt}	ϵ_{Tc}	γ_{LT}
T300/5208 (włókna węglowe / epoksyd)	0.70	1500	1500	40	246	68	1.24	1.23	0.39	2.41	1.42
Scotch ply 1002 (wł. szklane E / epoksyd)	0.45	1062	610	31	118	72	2.36	1.36	0.26	0.98	1.31
boron / epoksyd	0.50	1260	2500	61	202	67	0.60	1.19	0.32	1.06	1.40
kevlar 49 / epoksyd	0.60	1400	235	12	53	34	1.84	0.31	0.22	0.96	1.62

Tabela 1. Charakterystyki wytrzymałościowe dla kompozytów jednokierunkowych

Kluczowym pytaniem w analizie wytrzymałościowej kompozytu jednokierunkowo zbrojonego (warstwy lub zbioru warstw jednakowo zorientowanych) jest pytanie - jak w oparciu o podanych pięć charakterystyk wytrzymałościowych określić nośność warstwy, w której występuje wieloosiowy stan naprężenia w układzie współrzędnych określonym przez główne osie materiałowe. Podkreślimy to wyraźnie - w analizie wytrzymałościowej jest nim zawsze właśnie układ głównych osi materiałowych, co wiąże się wprost ze znajomością charakterystyk wytrzymałościowych wyłącznie w tym układzie.

Zwróćmy uwagę na to, że wieloosiowość stanu naprężenia nie musi być w przypadku warstwy ortotropowej wywołana działaniem obciążenia złożonego. Wystarczy, aby jej obciążenie stanowiło np. obciążenie jednokierunkowe, ale działające wzdłuż kierunku nie pokrywającego się z żadną z głównych osi materiałowych. Pokazano to na rysunku 1.



Rys. 1

W ukł. (x, y) jedyną niezerową składową tensora naprężenia jest oczywiście σ_x , ale transformując tensor naprężenia do ukł. głównych osi materiałowych $(1, 2)$ otrzymamy tensor, którego wszystkie trzy składowe są niezerowe, a ich wartości zależą od kąta α . Nie wnikając w kryteria wytrzymałościowe dla złożonych stanów naprężenia, nie trudno sobie wyobrazić, że przy tym samym co do wartości obciążeniu, dla pewnych kątów α warstwa może ulec zniszczeniu, a dla innych nie. Tak więc należy podkreślić, iż wytrzymałość warstwy zależy od orientacji naprężeń w niej występujących (czy też orientacji obciążenia). Jest to efekt, który nie występuje w materiałach izotropowych.

Wróćmy do zasadniczego problemu tzn. kryteriów wytrzymałościowych dla wieloosiowego stanu naprężenia w warstwie. Podobnie jak w przypadku znanych z analizy materiałów izotropowych hipotez wytrzymałościowych, tak i w przypadku kompozytów żadne z nich nie ma uzasadnienia teoretycznego. Wszystkie wynikają z obserwacji doświadczalnych i jako takie mogą być nazwane kryteriami empirycznymi. Biorąc pod uwagę różnorodność materiałów kompozytowych i wręcz nieograniczoną swobodę w doborze ich konfiguracji trudno oczekiwać uniwersalności tych kryteriów i precyzji wyników uzyskiwanych na ich podstawie w każdym przypadku. Podobne zastrzeżenie można jednak zgłosić także i pod adresem hipotez wytrzymałościowych dla izotropii, a przecież są one powszechnie stosowane i akceptowane.

Podstawowe kryteria wytrzymałościowe (zwane czasami kryteriami dwuosiowymi, ze względu na to, że dotyczą stanów dwuosiowych naprężenia) w kolejności odpowiadającej częstoci ich stosowania w projektowaniu, a jednocześnie ich prostocie to :

- ◆ kryterium maksymalnego naprężenia,
- ◆ kryterium maksymalnego odkształcenia,
- ◆ kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a,
- ◆ kryterium Tsai'a - Wu.

Wszystkie te kryteria, jakkolwiek różne, mają tę cechę wspólną, że są kryteriami "makroskopowymi", nie uwzględniającymi żadnych mechanizmów mikrouszkodzeń wewnątrz kompozytu, tak więc poziomem obserwacji przez nie wykorzystywanym jest warstwa, a nie jej składniki i ich możliwe różnorakie uszkodzenia prowadzące do zniszczenia warstwy.

1.1. Kryterium naprężenia maksymalnego

Kryterium naprężenia maksymalnego mówi, że warunkiem stanu bezpiecznego kompozytu jednokierunkowego jest, aby naprężenia normalne σ_1 i σ_2 oraz naprężenie styczne σ_6 (zwróćmy uwagę na fakt stosowania w tej pracy tzw. notacji zwężonej Voigta) nie przekraczały wartości wytrzymałości odpowiadających ich kierunkom. Formalny zapis kryterium ma zatem postać :

$$-X_c \leq \sigma_1 \leq X_t \quad ; \quad -Y_c \leq \sigma_2 \leq Y_t \quad ; \quad |\sigma_6| \leq S \quad (1)$$

W wypadku, gdy którykolwiek z warunków (1) nie jest spełniony to w myśl kryterium naprężenia maksymalnego uważa się, że materiał ulega zniszczeniu w wyniku mechanizmu zniszczenia związanego z naprężeniami normalnymi lub stycznymi. Tak więc pozwala ono na identyfikację sposobu zniszczenia kompozytu. Jego wadą jest natomiast to, że nie uwzględnia sprzężenia między tymi mechanizmami. W istocie zatem powinno się mówić o trzech oddzielnych i nie związanych ze sobą sub-kryteriach.

Łatwo zauważyć, że kryterium maksymalnego naprężenia ma swe źródło w znanej z analizy wytrzymałościowej materiałów izotropowych hipotezie Galileusza - maksymalnych naprężeń głównych.

Dla ilustracji omawianego kryterium rozważmy przypadek jednoosiowego rozciągania pokazany na rys. 1. W ukł. (x, y) stan naprężenia opisany jest jedyną niezerową składową σ_x . Po transformacji tensora naprężenia do ukł. (1, 2) otrzymujemy tensor w postaci :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \sigma_x \sin^2 \alpha \\ -\sigma_x \cos \alpha \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Stosując kryterium naprężenia maksymalnego (1) otrzymujemy:

$$\sigma_x < X_t / \cos^2 \alpha \quad ; \quad \sigma_x < Y_t / \sin^2 \alpha \quad ; \quad \sigma_x < S / (\cos \alpha \sin \alpha) \quad (3)$$

W układzie współrzędnych (σ_x, α) otrzymamy zatem trzy krzywe, z których pierwsza odpowiada zniszczeniu wskutek przekroczenia wytrzymałości na rozciąganie podłużne X_t , druga - wytrzymałości na ścinanie S , zaś trzecia - wytrzymałości na rozciąganie poprzeczne Y_t . Dane doświadczalne w wielu wypadkach odbiegają od przewidywań teoretycznych wynikających z omawianego kryterium, szczególnie dla kompozytów typu włókno szklane/epoksyd. Dla przykładu - niezależnie od rodzaju kompozytu nie obserwuje się wzrostu wytrzymałości kompozytu w stosunku do wytrzymałości na rozciąganie podłużne X_t dla małych kątów α , na co wskazywałaby krzywa pierwsza, jak również punktów nieciągłości na krzywej (σ_x, α) w miejscu przecinania się poszczególnych jej części. .

1.2. Kryterium odkształcenia maksymalnego

Kryterium odkształcenia maksymalnego jest koncepcyjnie bardzo zbliżone do kryterium naprężenia maksymalnego. Różnica polega jedynie na tym, że warunki graniczne nałożone są nie na naprężenia, ale na odkształcenia. Mają one następujące postaci :

$$-\varepsilon_{Lc} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{Lt} \quad ; \quad -\varepsilon_{Tc} \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{Tt} \quad ; \quad |\varepsilon_6| \leq \gamma_{LT} \quad (4)$$

Odkształcenia warstwy muszą być wyrażone w układzie głównych osi materiałowych (1, 2).

Graniczne wartości odkształceń, w przypadku liniowej teorii sprężystości wyznacza się z

odpowiadających im naprężeniowych charakterystyk wytrzymałościowych ze związków :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Lt} &= X_t/E_1 & \varepsilon_{Lc} &= X_c/E_1 \\ \varepsilon_{Tt} &= Y_t/E_2 & \varepsilon_{Tc} &= Y_c/E_2 & \gamma_{LT} &= S/G_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

Wartości odkształceń granicznych można też wziąć bezpośrednio z badań doświadczalnych.

Krzywa wytrzymałości kompozytu w ukł. (σ_x, α) składa się, podobnie jak w kryterium naprężenia maksymalnego, z trzech linii odpowiadających warunkom (4). Wszystkie wady i zalety kryterium naprężeniowego odnoszą się w równym stopniu do kryterium odkształcenia maksymalnego. Łatwo także można wskazać jego "protoplastę" wśród hipotez dla materiałów izotropowych, a mianowicie hipotezę de Saint-Venanta - maksymalnych odkształceń głównych.

1.3. Kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a

Kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a (A-T-H) należy do grupy kryteriów empirycznych uwzględniających sprzężenie między różnymi mechanizmami zniszczenia kompozytu poprzez uwzględnienie w kryterium wytrzymałościowym wszystkich składowych stanu naprężenia. Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego został uogólniony na materiały ortotropowe w 1950 roku przez Hill'a. Uogólnienie to ma postać :

$$\begin{aligned} (G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + \\ + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

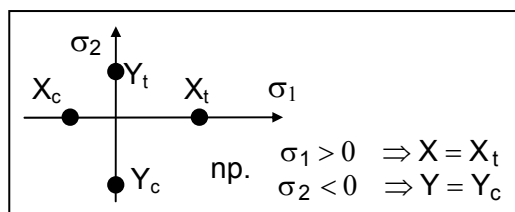
Warunek plastyczności został jednocześnie uznany za kryterium wytrzymałościowe dla kompozytu, tak więc de facto zakłada się, że o wytrzymałości kompozytu decyduje osiągnięcie granicznego stanu liniowo sprężystego. Parametry F, G, H, L, M, N, związane z plastycznym zachowaniem kompozytu zostały zastąpione charakterystykami wytrzymałościowymi X, Y, S, bez uwzględnienia różnic w ich wartościach dla rozciągania i ściskania.

Rozpatrując jednoosiowe przypadki stanu naprężenia - Tsai uzyskał związki między parametrami F, G, H, L, M, N i charakterystykami wytrzymałościowymi X, Y, S.

Dla płaskiego stanu naprężenia kryterium (6) przyjmuje postać :

$$\left(\sigma_1/X\right)^2 + \left(\sigma_2/Y\right)^2 - \sigma_1\sigma_2/X^2 + \left(\sigma_6/S\right)^2 = 1 \quad (7)$$

Azzi i Tsai wykazali, że kryterium w postaci (7) zachowuje ważność również wówczas, gdy materiał kompozytowy ma różne charakterystyki wytrzymałościowe na rozciąganie i ściskanie. Modyfikacja kryterium polega wówczas na wstawieniu w miejsce X i (lub) Y - w zależności od znaku naprężeń σ_1, σ_2 - wartości wytrzymałości na rozciąganie X_t, Y_t lub na ściskanie X_c, Y_c . Ilustruje to rys. 2. Kryterium, z tak pomyślanymi modyfikacjami nazywane jest w literaturze kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a, bądź Tsai'a - Hill'a.



Rys. 2. Zasady wyboru charakterystyk wytrzymałościowych w kryterium A-T-H.

Przewaga kryterium A-T-H nad kryteriami naprężenia i odkształcenia maksymalnego przejawia się tym, że :

- ◆ pozostaje w lepszej zgodności z wynikami doświadczalnymi,
- ◆ uwzględnia interakcję składowych stanu naprężenia,
- ◆ jego obrazem jest jedna krzywa gładka, a nie trójdcinkowa krzywa z punktami nieciągłości.

1.4. Kryterium Tsai'a - Wu.

U podstaw tego kryterium leżało dążenie do jak najlepszego dopasowania teoretycznych krzywych zniszczenia do wyników doświadczalnych. Jest to więc kolejne kryterium empiryczne. Tsai i Wu zaproponowali w 1971 roku nowe charakterystyki wytrzymałościowe związane głównie ze współzależnościami naprężeń w wieloosiowych stanach naprężenia w formie tzw. tensorów wytrzymałości - rzędu II F_{ij} i rzędu IV F_{ijkl} . W notacji zwężonej kryterium Tsai'a-Wu opisujące powierzchnię zniszczenia w przestrzeni naprężeń ma postać :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (8)$$

Dla kompozytu ortotropowego w płaskim stanie naprężenia rów. (8) redukuje się do postaci :

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (9)$$

W przypadku płaskim wszystkie elementy tensorów wytrzymałości, z wyjątkiem F_{12} , można wyznaczyć w próbach jednoosiowego rozciągania i ściskania oraz próbie ścinania - jest to pokazane szczegółowo w pracy autora „*Podstawy mechaniki...*”. Mają one następujące postaci :

$$F_{11} = 1/X_c X_t \quad F_1 = 1/X_t - 1/X_c \quad F_{22} = 1/Y_c Y_t \quad (10)$$

$$F_2 = 1/Y_t - 1/Y_c \quad F_{66} = 1/S^2 \quad F_6 = 0 \quad (11)$$

Widać, że składowe F_1 , F_2 , F_{11} , F_{22} i F_{66} wyrażają się poprzez standardowe charakterystyki wytrzymałościowe. Do pełnego opisu tensorów wytrzymałości brakuje jedynie składowej F_{12} . Związana jest ona z interakcją naprężeń normalnych σ_1 i σ_2 . Jej wyznaczenie możliwe jest w zasadzie jedynie w teście dwuosiowym, o programie obciążenia np. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Otrzymujemy wtedy następującą postać składowej F_{12} :

$$F_{12} = 1/2 \left[1/\sigma^2 - (F_1 + F_2)/\sigma - (F_{11} + F_{22}) \right] \quad (12)$$

Widać, że do wyznaczenia F_{12} nie wystarcza znajomość standardowych charakterystyk wytrzymałościowych, ale należy dodatkowo określić doświadczalnie wartość obciążenia σ , przy którym kompozyt ulega zniszczeniu.

W przypadku braku danych doświadczalnych, F_{12} można obliczać z następującego równania :

$$F_{12} = -\sqrt{F_{11} F_{22}}/2 \quad (13)$$

1.5. Inne kryteria wytrzymałościowe.

Przedstawione w punktach 1.1-1.4 kryteria wyężeniowe to jedynie cztery wybrane spośród wielu innych. Większość z niewymienionych w artykule kryteriów to modyfikacje kryterium Hill'a, bardzo zbliżone do warunku A-T-H. Jedyna różnica to z reguły inna postać mianownika trzeciego wyrazu w rów. (7). Do tej grupy należą m.in. kryteria Norrisa, Ashkenazi'ego, Fishera, Hoffmana, Martina i.in. Druga duża grupa kryteriów to modyfikacje tensorowego warunku Tsai'a-Wu, polegające na odmiennym od (12) i (13) przyjmowaniu wyrazu F_{12} - tak jest m.in. w kryteriach Hoffmana, Cowina, Rowlandsa, Stachursky'ego i in.

Istnieją także kryteria, które próbują uwzględnić, najczęściej czysto formalnie, mechanizmy zniszczenia kompozytu. Wymieńmy tu kryteria Pucka i Schneidera, Hashina i Rotema, Voloshina i Arcana. Obszerny wykaz literatury dotyczącej tego zagadnienia można znaleźć w pracy pod red. François i Gołaskiego. Tematyce tej poświęcony jest także jeden z artykułów niniejszego tomu.

2. WYTRZYMAŁOŚĆ WARSTWOWYCH LAMINATÓW KOMPOZYTOWYCH

W pkt. 1 omówiono kryteria wytrzymałościowe dla warstwy kompozytowej jednokierunkowo zbrojonej włóknami. Podano też charakterystyki wytrzymałościowe warstwy, tak naprężeniowe, jak i odkształceniowe. Procedura określenia nośności, tzn. obciążenia jakie może bezpiecznie przenieść warstwa jest w tym przypadku jasna i daje się przedstawić następująco :

- ◆ wyznaczyć składowe stanu naprężenia i odkształcenia (w przypadku kryterium odkształcenia maksymalnego) w funkcji obciążenia zewnętrznego,
- ◆ wstawić wyznaczone składowe do jednego z kryteriów wytrzymałościowych i określić poszukiwaną nośność.

W przypadku laminatu, a więc zbioru warstw, które mogą różnić się między sobą zarówno parametrami geometrycznymi jak i materiałowymi sytuacja jest znacznie bardziej złożona. Różnorodność materiałów kompozytowych, mnogość różnych mechanizmów ich zniszczenia, wzajemne powiązania między nimi, trudności z doświadczalną weryfikacją kryteriów wytrzymałościowych (duże rozrzuty wyników, brak ujednoczonych procedur badawczych, nieodpowiednie niekiedy techniki eksperymentalne) sprawiają, że w chwili obecnej nie istnieje uniwersalna teoria wytrzymałościowa dla laminatów. Mówiąc inaczej - nie sposób jest określić ich wytrzymałość przyjmując jako poziom obserwacji laminat jako całość. Konieczne jest zejście na poziom poszczególnych warstw i dopiero w oparciu o ich własności wytrzymałościowe zbudować algorytm analizy wytrzymałościowej odnoszący się do laminatu. To sprawia, że istnieje w tym zakresie pewna dowolność, której odzwierciedleniem jest istnienie różnych metod wyznaczania wytrzymałości laminatów. Analizę komplikuje także fakt, że wszystkie kryteria dotyczące warstwy bazują na wytrzymałościach określonych w jej głównych osiach materiałowych. W analizie laminatu stosuje się natomiast dowolnie przyjęty globalny układ odniesienia. Nieograniczone możliwości orientacji poszczególnych warstw względem tego układu, powodują że z reguły mamy do czynienia z wielością układów współrzędnych, co może prowadzić do pewnych komplikacji obliczeniowych.

O wytrzymałości laminatu decydują następujące czynniki :

- 1) charakterystyki wytrzymałościowe warstwy
- 2) charakterystyki sztywnościowe warstwy
- 3) charakterystyki temperaturowe (współczynniki rozszerzalności cieplnej) warstwy
- 4) sekwencja ułożenia warstw i ich udział objętościowy.

Znaczenie pierwszego z nich jest oczywiste i nie wymaga komentarza. Czynniki 2) i 4) decydują o postaciach macierzy sztywności i podatności laminatu, niezbędnych do określenia naprężeń i odkształceń warstwowych w laminacie. Te z kolei są konieczne przy określaniu wytrzymałości poszczególnych warstw, a w dalszej kolejności również i laminatu.

Osobnego komentarza wymaga czynnik 3). Temperatura pracy laminatu z reguły różni się od temperatury laminacji. Wynikająca stąd różnica temperatur jest źródłem powstawania naprężeń resztkowych, które mają wpływ na wytrzymałość laminatu i powinny być uwzględniane w jego całościowej analizie wytrzymałościowej, choć niewątpliwie ją komplikują.

Wspomniano już wcześniej, że u podstaw wyznaczania wytrzymałości laminatu leży analiza

wytrzymałości tworzących go warstw, a uściślając to stwierdzenie - analiza naprężeń i odkształceń warstwowych, które wyznacza się z zależności wynikających z tzw. klasycznej teorii laminacji. Stosując w odniesieniu do każdej z warstw wybrane kryterium wytrzymałościowe można określić wytrzymałość każdej z nich, a tym samym znaleźć warstwę, która ulegnie zniszczeniu (wedle przyjętego kryterium) jako pierwsza. Można zatem wyznaczyć także obciążenie, przy którym nastąpi zniszczenie tej warstwy. Nosi ono nazwę obciążenia niszczącego pierwszą warstwę (w literaturze anglosaskiej ogólnie przyjętym terminem jest *First Ply Failure load*, przy czym używa się powszechnie skrótu - **FPF** . Choć można by się pokusić o jego polski odpowiednik, to będziemy tu używać skrótu angielskiego).

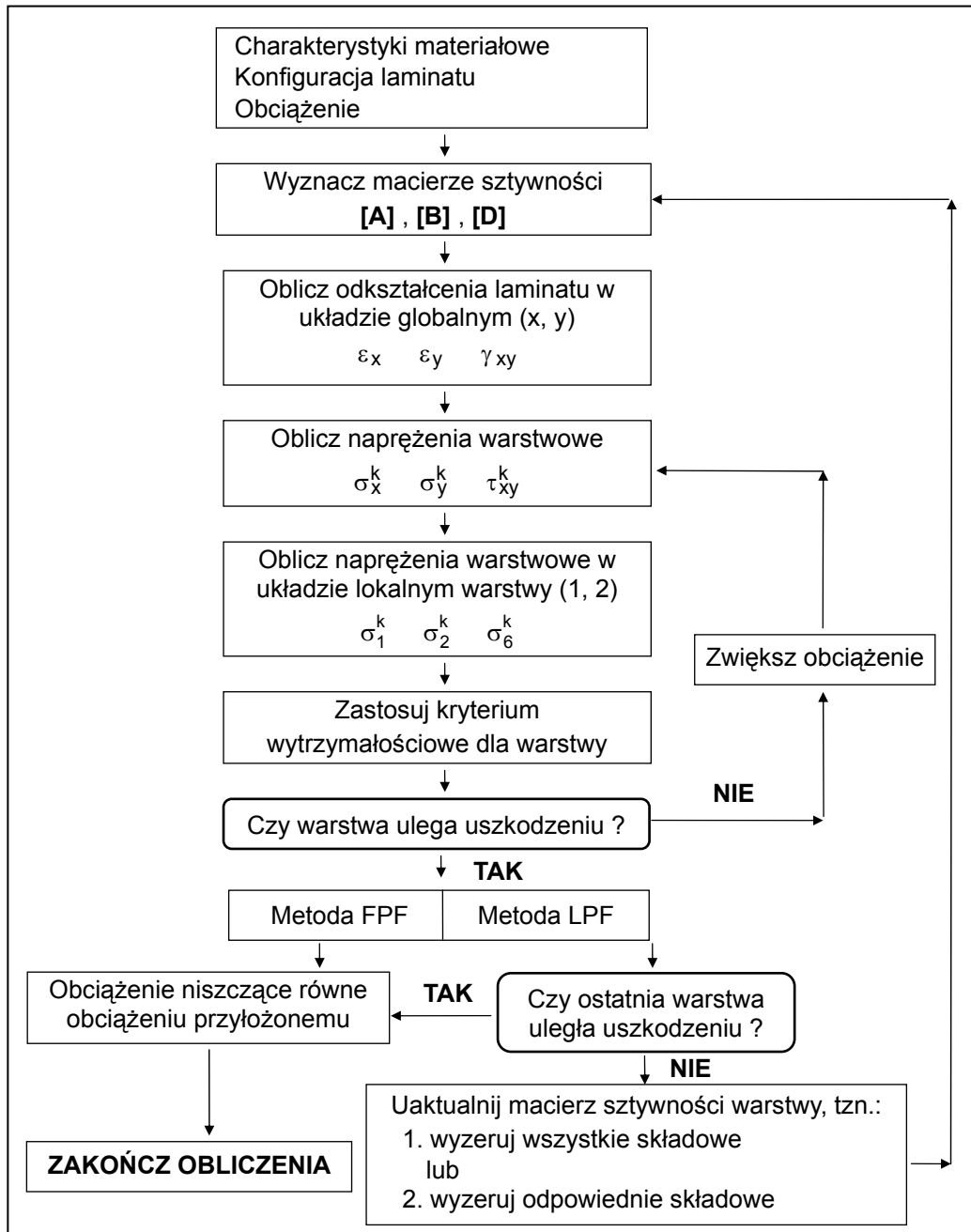
Z reguły zniszczenie pierwszej warstwy nie oznacza wyczerpania nośności laminatu. W większości przypadków może on nadal bezpiecznie przenosić obciążenie, czasem znacznie większe niż obciążenie odpowiadające FPF. Zazwyczaj jest tak, że zniszczeniu ulegają kolejne warstwy, a laminat jako całość nadal może przejmować zwiększone obciążenie i dopiero zniszczenie ostatniej warstwy jest równoznaczne z wyczerpaniem jego nośności. Obciążenie, przy którym to następuje nosi nazwę obciążenia niszczącego ostatnią warstwę (w literaturze anglosaskiej ogólnie przyjętym określeniem jest *Last Ply Failure load*, przy czym używa się skrótu tego określenia - **LPF**. Również my będziemy używać tego skrótu, rezygnując z poszukiwania polskiego odpowiednika).

W analizie wytrzymałościowej laminatu bazującej na koncepcji LPF musi być rozpatrywane zachowanie wszystkich warstw, prowadzące do wykluczania z laminatu kolejno niszczących się warstw. Tak więc mamy tu do czynienia z zadaniem, w którym konieczne jest wielokrotne jego "redefiniowanie". Stosowane są dwa podejścia do uwzględniania wpływu zniszczonej warstwy na własności wytrzymałościowe laminatu. Pierwsze z nich polega na całkowitym wykluczeniu zniszczonej warstwy z laminatu, tzn. przyjęciu, że wszystkie jej sztywności są zerowe (w literaturze ang. podejście to nosi nazwę *total ply discount approach*). Drugie podejście, obliczeniowo bardziej pracochłonne, uwzględnia mechanizm, zgodnie z którym następuje zniszczenie danej warstwy i wyklucza się jedynie te spośród jej charakterystyk sztywnościowych, które związane są z danym mechanizmem. Takie podejście sprowadza się zatem do częściowego wykluczenia warstwy uszkodzonej z dalszej analizy (ang. *partial ply discount approach*). Jeżeli mechanizm zniszczenia związany jest z uszkodzeniem matrycy, to przyjmuje się jako zerowy tylko poprzeczny moduł sprężystości i moduł ścinania, zachowując niezmienną wartość podłużnego modułu sprężystości warstwy. W przypadku, gdy mechanizm zniszczenia związany jest ze zniszczeniem włókien, wówczas wszystkie sztywności przyjmuje się jako zerowe (w tym wypadku znika różnica między metodą częściowej i całkowitej eliminacji warstwy).

Dalsza analiza wytrzymałości, bez względu na to, który sposób eliminacji warstwy został zastosowany, przebiega w ten sposób, że należy wyznaczyć dla "nowego" laminatu macierze sztywności, a następnie dokonać sprawdzenia czy pozostałe nieuszkodzone warstwy "nowego" laminatu mogą bezpiecznie przenieść obciążenie, przy którym nastąpiło zniszczenie warstwy analizowanej jako ostatnia. Jeżeli tak jest to oznacza to, że laminat jest w stanie przejść zwiększone obciążenie - całą procedurę wyznaczania jego wytrzymałości należy zacząć od początku. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z ostatecznym zniszczeniem laminatu, a obciążeniem niszczącym, odpowiadającym LPF, jest obciążenie niszczące warstwę analizowaną jako ostatnia. Procedurę tę ilustruje schematu blokowy na rysunku 3.

3. UWAGI KOŃCOWE

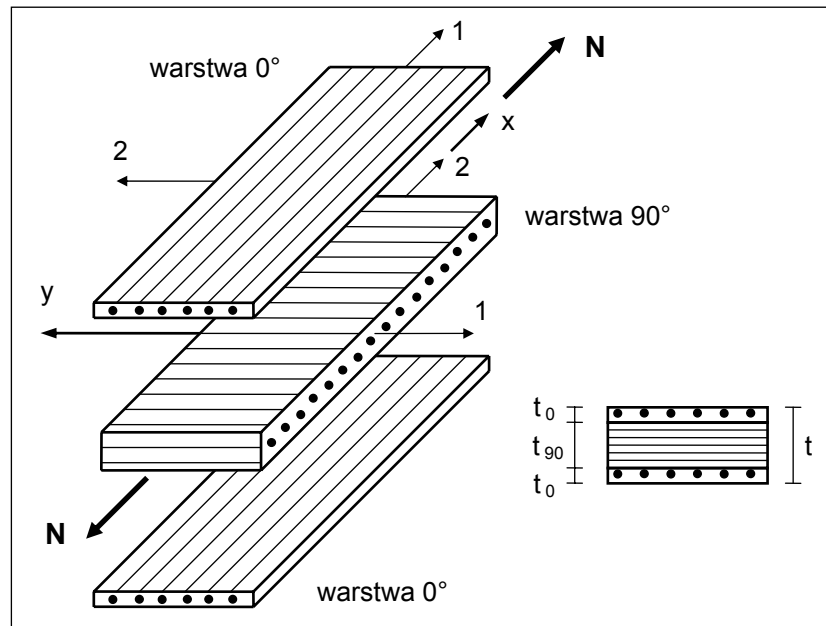
Analiza wytrzymałościowa kompozytów warstwowych, jakkolwiek posiadająca jasno określony algorytm (rys. 3) jest kłopotliwa obliczeniowo, choćby tylko ze względu na konieczność wyznaczania macierzy sztywności i obliczania macierzy odwrotnych. Wraz ze wzrostem ilości warstw kompozytu, szczególnie o różnych orientacjach osi materiałowych poszczególnych warstw względem globalnego układu odniesienia radykalnie rośnie ilość obliczeń - odnosi się to zwłaszcza do metody LPF. Są one kłopotliwe nawet dla stosunkowo najprostszyc laminatów poprzecznych, o kilku zaledwie warstwach i najprostszym typie obciążenia - obciążeniu rozciągającym, działającym w płaszczyźnie laminatu. Ilustruje to przykład laminatu o kodzie $[0, 90_2]_s$, zamieszczony w dalszej części artykułu. Znacznie ułatwia zadanie wykorzystanie programów komputerowych. Jednym z takich programów - sprawnym, prostym, a co nie bez znaczenia typu *shareware* - jest program *LAMINATOR* dostępny pod adresem <http://tni.net/~mlindell/laminator.html> . Inne programy i obszerne archiwum można znaleźć w *The Composites Registry* pod adresem <http://www.compositesreg.com/> .



Rys. 3. Algorytm analizy wytrzymałościowej warstwowego laminatu kompozytowego.

PRZYKŁAD ANALIZY WYTRZYMAŁOŚCIOWEJ LAMINATU POPRZECZNEGO

Określić wartość obciążenia N , jakie jest w stanie przenieść symetryczny laminat poprzeczny o kodzie $[0, 90_2]_s$, poddany rozciąganiu. Laminat wykonano z warstw kompozytu włókno węglowe/epoksyd o nazwie Torayca T300/ Vicotex 174B. Charakterystyki sztywnościowe, wytrzymałościowe i termiczne kompozytu są następujące: $E_1=137 \times 10^3$ MPa, $E_2=10.04 \times 10^3$ MPa, $G_{12}=4.8 \times 10^3$ MPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{21}=0.0219$, $X_t=1531$ MPa, $X_c=1390$ MPa, $Y_t=41$ MPa, $Y_c=145$ MPa, $S=98$ MPa, $\alpha_1=3.1 \times 10^{-7}$ $1/^\circ\text{C}$, $\alpha_2=3.1 \times 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. Grubość pojedynczej warstwy wynosi $t_0=1.23 \times 10^{-4}$ m. Temperatura laminacji wynosiła 120°C , zaś temperatura eksploatacji wynosi 20°C . Konfiguracja laminatu i sposób jego obciążenia pokazano na rys 4. Przy wyznaczaniu wytrzymałości warstw wykorzystać kryterium Azzi-Tsai'a-Hill'a (szczegóły obliczeń znajdują się w cytowanej wcześniej pracy autora niniejszego artykułu).



Rys. 4. Konfiguracja rozciąganego laminatu $[0, 90_2]_s$.

1) Macierze sztywności warstwy w głównych osiach materiałowych (1, 2)

Zredukowana macierz sztywności warstwy $[Q]$ - równanie (D1) ma postać :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (14)$$

2) Transformowane macierze sztywności warstw w układzie odniesienia (x,y)

Transformowane macierze sztywności warstw 0° i 90° w układzie odniesienia (x, y) wynikają wprost z macierzy zredukowanej i nie zachodzi potrzeba korzystania z pracochłonnych obliczeń wg ogólnych równań (D2). Macierze te mają następujące składowe

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\bar{Q}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 10.11 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 137.91 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ [MPa]} \quad (15)$$

3) Macierze sztywności laminatu

Ze względu na symetrię laminatu macierz sztywności $[B]$, sprzężenia stanu tarczowego i giętnego jest macierzą zerową. Znajomość macierzy sztywności giętniej $[D]$ nie jest konieczna, gdyż analizowany jest tu wyłącznie stan tarczowy. Unormowana macierz sztywności tarczowej $[A]/t$ [MPa] obliczona z równań (D3b) dla laminatu $[0, 90_2]_s$ oraz macierz do niej odwrotna $[A]^{-1}t$ [MPa] $^{-1}$ mają odpowiednio postaci :

$$\frac{[A]}{t} = \begin{bmatrix} 52.71 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 95.31 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad ; \quad [A]^{-1}t = \begin{bmatrix} 190.1 & -6.04 & 0 \\ -6.04 & 105.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2083.3 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \quad (16)$$

4) Wypadkowe siły termiczne

Wypadkowe siły termiczne powstające w laminacie wskutek różnicy temperatury laminacji T_1 i eksploatacji T_e ($\Delta T = T_e - T_1$) określone są równaniem (D4). Występujące w nim macierze pozornych (tzn. podanych w ukł. odniesienia (x,y)) współczynników rozszerzalności cieplnej, które w ogólnym przypadku wyznacza się poprzez transformację tensora utworzonego ze

współczynników α_1 i α_2 podanych w osiach materiałowych, w przypadku laminatu poprzecznego można utworzyć wprost z tych współczynników. Macierze te mają postaci :

$$\{\alpha\}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3.1 \\ 310 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} \quad \{\alpha\}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 310 \\ 3.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} [1/^\circ\text{C}] \quad (17)$$

Wykorzystując (15) i (17) z rów. (99) otrzymujemy wartości wypadkowych sił termicznych :

$$\{\mathbf{N}^T\} / t = \begin{Bmatrix} -25.5 \\ -19.6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{MPa}] \quad (18)$$

5) Naprężenia warstwowe

Naprężenia warstwowe dla dowolnego laminatu symetrycznego opisuje równanie (D5). Uwzględniając, że siły wypadkowe $\{\mathbf{N}\}$ mają dla rozpatrywanego obciążenia postać :

$$\begin{Bmatrix} N_x = N \\ N_y = 0 \\ N_{xy} = 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

po wykonaniu obliczeń otrzymamy następujące wartości naprężeń w warstwach 0° i 90°

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 2.6198 \\ 0.0515 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \frac{N}{t} + \begin{Bmatrix} -52.13 \\ 28.08 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0.1904 \\ -0.0257 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \frac{N}{t} + \begin{Bmatrix} 26.08 \\ -14.05 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

6. Obciążenie N powodujące uszkodzenie pierwszej warstwy (FPF)

Obliczone naprężenia warstwowe należy wstawić do kryterium wytrzymałościowego A-T-H, oddzielnie dla każdej warstwy laminatu. W wyniku obliczeń otrzymamy wartość siły N (na jednostkę szerokości laminatu), przy której ulegnie uszkodzeniu pierwsza warstwa.

Naprężenia warstwowe (20), aby mogły być użyte w kryterium wytrzymałościowym muszą być przetransformowane do głównych osi materiałowych warstw. Dla laminatu poprzecznego, ze względu na szczególne położenie układu odniesienia (x, y) oraz układów głównych (1, 2), naprężenia w osiach głównych znajdujemy wprost z (20) bez potrzeby ich transformacji. Pokazano to na rys. 5.

Kryterium A-T-H - równanie (7) - przyjmuje dla warstw 0° i 90° następujące postaci :

$$\sigma_x^2 + \left(\frac{X_t}{Y_t}\right)^2 \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y - X_t^2 = 0 \quad \text{dla warstwy } 0^\circ \quad (21)$$

$$\sigma_x^2 + \left(\frac{Y_t}{X_c}\right)^2 \sigma_y^2 - \left(\frac{Y_t}{X_c}\right)^2 \sigma_x \sigma_y - Y_t^2 = 0 \quad \text{dla warstwy } 90^\circ \quad (22)$$

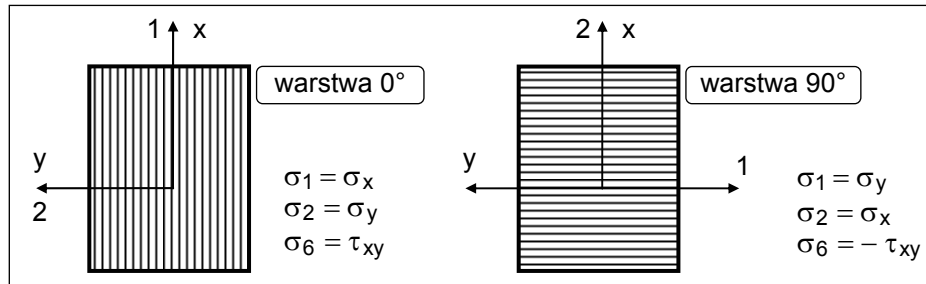
Rozwiązując rów. (21) i (22) otrzymujemy wartości obciążenia odpowiadającego uszkodzeniu pierwszej warstwy. Wynoszą one

$$N / t = 210.7 \quad \text{MPa} \quad \text{dla warstwy } 0^\circ \quad (23)$$

$$N / t = 78.3 \quad \text{MPa} \quad \text{dla warstwy } 90^\circ \quad (24)$$

Z rozwiązania widać, że jako pierwsza ulegnie uszkodzeniu warstwa wewnętrzna 90_4 , dla której obciążenie niszczące jest mniejsze. Ostatecznie zatem mamy :

$$(N / t)_{\text{FPF}} \equiv \sigma_{\text{FPF}} = 78.3 \quad \text{MPa} \quad (25)$$



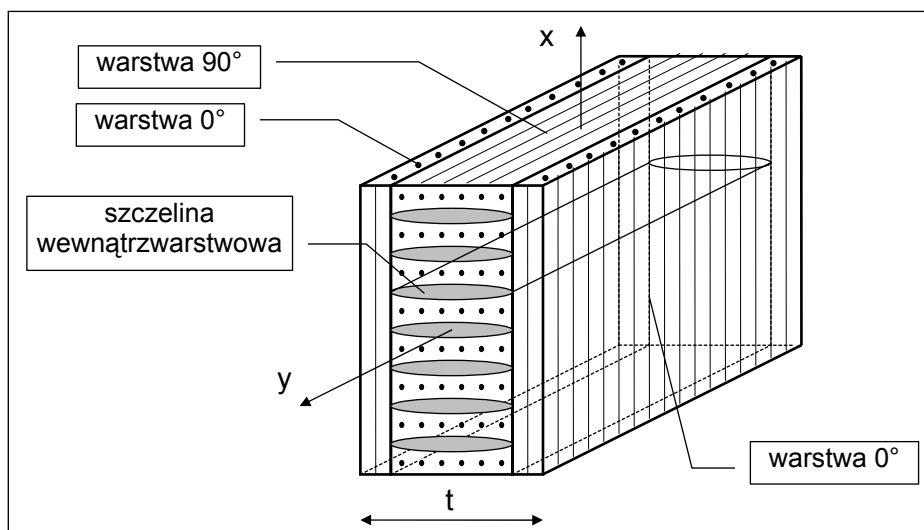
Rys. 5. Naprężenia warstwowe w ukl. odniesienia (x, y) i układach głównych (1, 2).

7) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu przy obciążeniu FPF

Naprężenia warstwowe przy obciążeniu równym FPF, wyznaczone z (20) wynoszą :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{FPF}0^\circ} = \begin{Bmatrix} 153.0 \\ 32.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{FPF}90^\circ} = \begin{Bmatrix} 41.0 \\ -16.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (26)$$

Zauważmy, że w warstwie 90° naprężenie w kierunku osi x, a więc kierunku poprzecznym do kierunku włókien wynosi 41 MPa, czyli dokładnie tyle, ile jej wytrzymałość na poprzeczne rozciąganie. Pozostałe naprężenia w obu warstwach są mniejsze od odpowiednich wytrzymałości. Można zatem określić mechanizm uszkodzenia warstwy 90° - jest to pęknięcie matrycy wzdłuż kierunku włókien. Potwierdzają to badania doświadczalne. Obserwując pod mikroskopem odpowiednio wypolerowaną boczną powierzchnię laminatu (tak aby widoczny był układ warstw na jego grubości) można stwierdzić obecność licznych szczelin, których płaszczyzna środkowa przebiega mniej więcej równoległe do kierunku włókien. Występują one w niemal równych od siebie odległościach i "przecinają" całą szerokość laminatu - określane są one mianem wewnątrzwarstwowych. Mechanizm uszkodzania się laminatów poprzecznych w wyniku powstawania szczelin wewnątrzwarstwowych w warstwie 90° pokazano na rys. 6.



Rys. 6. Układ szczelin wewnątrzwarstwowych w warstwie 90° laminatu poprzecznego.

Odształcenia laminatu określone równaniem (D6) można przedstawić w postaci sumy odkształceń "mechanicznych" $\{\epsilon_M\}$ i termicznych $\{\epsilon_T\}$:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^M\} + \{\epsilon^T\} \quad (27)$$

Odształcenia laminatu dla obciążenia wywołującego uszkodzenie pierwszej warstwy wynoszą:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{M}}\}_{\text{FPF}} = \begin{Bmatrix} 148.85 \\ -4.73 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\}_{\text{FPF}} = \begin{Bmatrix} -47.29 \\ -19.06 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (28)$$

ANALIZA LAMINATU PO USZKODZENIU PIERWSZEJ WARSTWY

8) Zredukowane i transformowane macierze sztywności warstw

Nieuszkodzone warstwy 0° mają zredukowane i transformowane macierze sztywności bez zmian, tzn.:

$$[\mathbf{Q}]_0 = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad ; \quad [\bar{\mathbf{Q}}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 137.91 & 3.03 & 0 \\ 3.03 & 10.11 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (29)$$

Zredukowana macierz sztywności dla uszkodzonej warstwy 90° zmienia się wskutek mechanizmu uszkodzenia opisanego wcześniej. Degradacji ulega sztywność warstwy w kierunku poprzecznym do przebiegu włókien w tej warstwie. Przyjmuje się w związku z tym, że poprzeczny moduł sprężystości i moduł ścinania mają wartości zerowe. Zgodnie z rów. (D1) zredukowana macierz sztywności i wynikająca z niej macierz transformowana mają postaci :

$$[\mathbf{Q}]_{90} = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad ; \quad [\bar{\mathbf{Q}}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 137 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (30)$$

9) Macierz sztywności tarczowej laminatu uszkodzonego

Macierz sztywności tarczowej laminatu można wyznaczyć jedynie z ogólnej definicji (D3a), nie można natomiast skorzystać z prostszych zależności (D3b). Przyczyna tkwi oczywiście w tym, że warstwy 0° i 90° są opisane różnymi zredukowanymi macierzami sztywności i współczynniki U_i tracą swój sens, czy mówiąc precyzyjnie w ogóle nie dadzą się zdefiniować. Korzystając z (D3a) oraz (31b) i (33b) otrzymujemy :

$$[\mathbf{A}]/t = \begin{bmatrix} 45.97 & 1.01 & 0 \\ 1.01 & 94.70 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad ; \quad [\mathbf{A}]^{-1}t = \begin{bmatrix} 217.6 & -2.32 & 0 \\ -2.32 & 105.6 & 0 \\ 0 & 0 & 6250.0 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \quad (31)$$

10) Wypadkowe siły termiczne

Wypadkowe siły termiczne obliczone z (99), po wykorzystaniu (31b), (33b) i (17) wynoszą :

$$\{\mathbf{N}^{\mathbf{T}}\}/t = \begin{Bmatrix} -4.56 \\ -13.32 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{MPa}] \quad (32)$$

11) Naprężenia warstwowe

Naprężenia warstwowe obliczone wg tej samej procedury co w punkcie 5) wynoszą :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3.0002 \\ 0.0636 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \frac{N}{t} + \begin{Bmatrix} -0.001 \\ 29.74 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0318 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \frac{N}{t} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -14.86 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

12) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu uszkodzonego przy obciążeniu FPF

Naprężenia warstwowe w laminacie z uwzględnieniem degradacji sztywności warstwy 90° i całego laminatu, przy obciążeniu wywołującym tę degradację, tzn. $(N/t)_{\text{FPF}}$, wynoszą :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 234.92 \\ 34.72 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -17.35 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (34)$$

Odkształcenia laminatu wynoszą wówczas :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{M}}\} = \begin{Bmatrix} 170.38 \\ -1.81 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\} = \begin{Bmatrix} -9.615 \\ -13.87 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (35)$$

13) Sprawdzenie kryterium A-T-H dla laminatu uszkodzonego przy obciążeniu FPF

Uszkodzeniu warstwy 90° przy obciążeniu FPF towarzyszy zmiana sztywności laminatu i skokowa zmiana naprężeń warstwowych (widoczna z porównania (26) i (34)), a również i odkształceń laminatu (widoczna z porównania (28) i (35)). Może się więc zdarzyć tak, że obciążenie to wywoła także uszkodzenie warstwy 0° . Należy zatem sprawdzić, czy stan naprężenia w warstwie 0° jest stanem bezpiecznym wg przyjętego kryterium A-T-H. Odpowiedni warunek, wynikający z tego kryterium przyjmuje tutaj postać :

$$\left(\sigma_{x0^\circ}/X_t\right)^2 + \left(\sigma_{y0^\circ}/Y_t\right)^2 - \sigma_{x0^\circ} \sigma_{y0^\circ}/X_t^2 \leq 1 \quad (36)$$

Łatwo sprawdzić, że warunek (36) dla naprężeń (34) jest spełniony. Oznacza to, że warstwa 0° pozostaje nadal nieuszkodzona, a laminat może przejąć zwiększone obciążenie zewnętrzne.

14) Obciążenie N_1 uszkadzające warstwę 0° laminatu uszkodzonego

Oznaczmy przez N_1 obciążenie zewnętrzne, jakie jest w stanie przenieść uszkodzony laminat. Wartość tego dodatkowego obciążenia wyznaczamy z kryterium A-T-H zastosowanego dla warstwy 0° , w której naprężenia opisane są tensorem (33). Sposób postępowania pokazano w pkt. 6. W wyniku obliczeń otrzymujemy :

$$N_1/t = 150.8 \text{ [MPa]} \quad (37)$$

15) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu przy obciążeniu N_1

Naprężenia warstwowe wyznaczone z (33) i (37) wynoszą :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ}^1 = \begin{Bmatrix} 452.5 \\ 39.3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -19.66 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (38)$$

Odkształcenia laminatu mają następujące wartości :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{M}}\}_1 = \begin{Bmatrix} 328.1 \\ -3.477 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\} = \begin{Bmatrix} -9.615 \\ -13.87 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (39)$$

Z wartości naprężeń w warstwie zewnętrznej 0° widać, że naprężenie $\sigma_y = \sigma_2$ jest bardzo bliskie wytrzymałości warstwy na poprzeczne (tzn. o kierunku osi "2") rozciąganie. Mechanizm uszkodzenia tej warstwy musi być zatem związany z pękaniem matrycy w kierunku równoległym do włókien. Z (39) widać także, że naprężenia o kierunku włókien,

zarówno w warstwie 0° , jak i 90° , są wyraźnie mniejsze od odpowiednich wytrzymałości - włókna pozostają więc nadal nieuszkodzone i tylko one mogą przenosić dalsze obciążenie. Przedstawiony tu stan uszkodzenia warstw, który można nazwać stanem separacji własności warstw (można też spotkać określenie laminat "rozprzęgnięty"), powoduje, że jedyną niezerową składową zredukowanej macierzy sztywności dla obu warstw jest Q_{11} . Z punktu widzenia warstwy 0° jest to sztywność w kierunku zgodnym z kierunkiem obciążenia. Oznacza to, że warstwa ta, a w zasadzie jeden z jej składników - nieuszkodzone włókna - nadal mogą przejmować obciążenie, mimo że laminat jest w stanie rozprzęgniętym.

ANALIZA LAMINATU ROZPRZĘGNIĘTEGO

16) Zredukowana i transformowane macierze sztywności warstw

Zredukowana macierz sztywności obu warstw jest taka sama i ma postać :

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\text{MPa}] \quad (40)$$

Macierze transformowane dla warstw 0° i 90° mają składowe :

$$[\bar{\mathbf{Q}}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\text{MPa}] \quad [\bar{\mathbf{Q}}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 137 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\text{MPa}] \quad (41)$$

17) Macierz sztywności tarczowej laminatu rozprzęgniętego

Unormowana macierz sztywności tarczowej laminatu w stanie rozprzęgniętym ma postać :

$$[\mathbf{A}] / t = \begin{bmatrix} 45.7 & 0 & 0 \\ 0 & 91.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\text{MPa}] \quad (42)$$

Ze względu na konieczność odwrócenia macierzy $[\mathbf{A}]$ składowa A_{66} musi być przyjęta jako dowolnie mała, ale niezerowa. W wyniku odwrócenia macierzy $[\mathbf{A}]$ otrzymujemy :

$$[\mathbf{A}]^{-1} / t = \begin{bmatrix} 219.0 & 0 & 0 \\ 0 & 109.5 & 0 \\ 0 & 0 & "\infty" \end{bmatrix} \times 10^{-7} \quad [\text{MPa}]^{-1} \quad (43)$$

18) Wypadkowe siły termiczne

Wypadkowe siły termiczne obliczone z (99), po wykorzystaniu (41) i (76) oraz (17) wynoszą :

$$\{\mathbf{N}^T\} / t = \begin{Bmatrix} -1.416 \\ -2.831 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{MPa}] \quad (44)$$

19) Naprężenia warstwowe w stanie separacji własności warstw

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3.0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times N/t \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

20) Naprężenia warstwowe i odkształcenia laminatu rozprężniętego przy obciążeniu N_1

Naprężenia warstwowe w stanie rozprężniętym laminatu, przy obciążeniu N_1/t wynoszą :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 452.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (46)$$

Odkształcenia laminatu mają wówczas wartości :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^M\} = \begin{Bmatrix} 330.2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^T\} = \begin{Bmatrix} -3.1 \\ -3.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (47)$$

WYTRZYMAŁOŚĆ LAMINATU

Przedstawiona analiza wytrzymałościowa laminatu służy przede wszystkim określeniu jego wytrzymałości (nośności N). Wyznaczone uprzednio obciążenie N_1 jest obciążeniem, przy którym zgodnie z kryterium A-T-H ulega uszkodzeniu warstwa 0° , jednocześnie ostatnia warstwa laminatu, która dotąd pozostawała nieuszkodzona. Nie jest to jednak końcowa wartość obciążenia, jakie może przenieść laminat. Patrząc na wartości naprężeń w warstwie 0° laminatu uszkodzonego, ale jeszcze nie rozprężniętego, przy obciążeniu równym N_1 (rów. (38)) stwierdzamy, że naprężenie normalne w kierunku włókien (zgodnym z kierunkiem obciążenia) wynosi $\sigma_{x0^\circ}^I = 452.5$ MPa, podczas gdy wytrzymałość podłużna warstwy, o której decydują głównie nieuszkodzone włókna, wynosi $X_t = 1531$ MPa. Warstwa 0° jest więc w stanie przenieść dodatkowo, już po "rozprężnięciu" laminatu, naprężenie $\Delta\sigma$ wynoszące:

$$\Delta\sigma = X_t - \sigma_{x0^\circ}^I \quad (48)$$

Odpowiadający temu przyrostowi naprężeń przyrost obciążenia, można określić na podstawie postaci tensora naprężenia (45). Przyrost obciążenia wynosi :

$$\Delta N/t = \Delta\sigma/3 \quad (49)$$

Maksymalne obciążenie, jakie jest w stanie przenieść analizowany laminat, odpowiadające całkowitemu zniszczeniu warstwy 0° , określone jako N_{LPF} wynosi :

$$N_{LPF}/t = N_1/t + \Delta N/t = 150.8 + (1531 - 452.5)/3 = 510.3 \text{ [MPa]} \quad (50)$$

Łatwo sprawdzić, że ten sam wynik otrzymujemy poprzez zastosowanie kryterium A-T-H w odniesieniu do naprężeń warstwowych (46).

Odkształcenia laminatu odpowiadające temu obciążeniu przyjmują wartości :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^M\} = \begin{Bmatrix} 1117.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \quad (51)$$

ANALIZA ROZWIĄZANIA

W oparciu o uzyskane wyniki zbudowano wykres zależności naprężenia σ_x (tzn. N_x/t) w laminacie od jego odkształcenia podłużnego $\varepsilon_x = \varepsilon_x^M$. Przedstawiono go na rys. 7.

Składa się on z trzech odcinków prostoliniowych różniących się kątami nachylenia. Pominięto tu odkształcenia residualne, wskutek czego pierwszy z odcinków wychodzi z początku układu współrzędnych. Koniec odcinka określony jest punktem o współrzędnych

$\sigma_x=78.3$ MPa, $\varepsilon_x=148.85 \times 10^{-5}$, odpowiadającym uszkodzeniu pierwszej warstwy (rów. (25), (28)). Podłużny moduł sprężystości laminatu, określający nachylenie odcinka, wynika z macierzy (16b) i jest równy $E_L=1/A'_{11}=52.6$ GPa. Na skutek zmiany sztywności laminatu po uszkodzeniu pierwszej warstwy następuje skokowy przyrost odkształcenia do wartości $\varepsilon_x=170.38 \times 10^{-5}$ (rów. (35)) przy niezmiennym naprężeniu, widoczny na wykresie w postaci tzw. "kolana". Wychodzi z niego drugi odcinek wykresu, biegnący do punktu określającego uszkodzenie drugiej i zarazem ostatniej warstwy. Punkt ten wyznaczają współrzędne $\sigma_x=150.8$ MPa, $\varepsilon_x=328.1 \times 10^{-5}$ (rów. (37), (39)). Podłużny moduł sprężystości wynosi teraz 45.9 GPa (patrz - macierz (35b)).

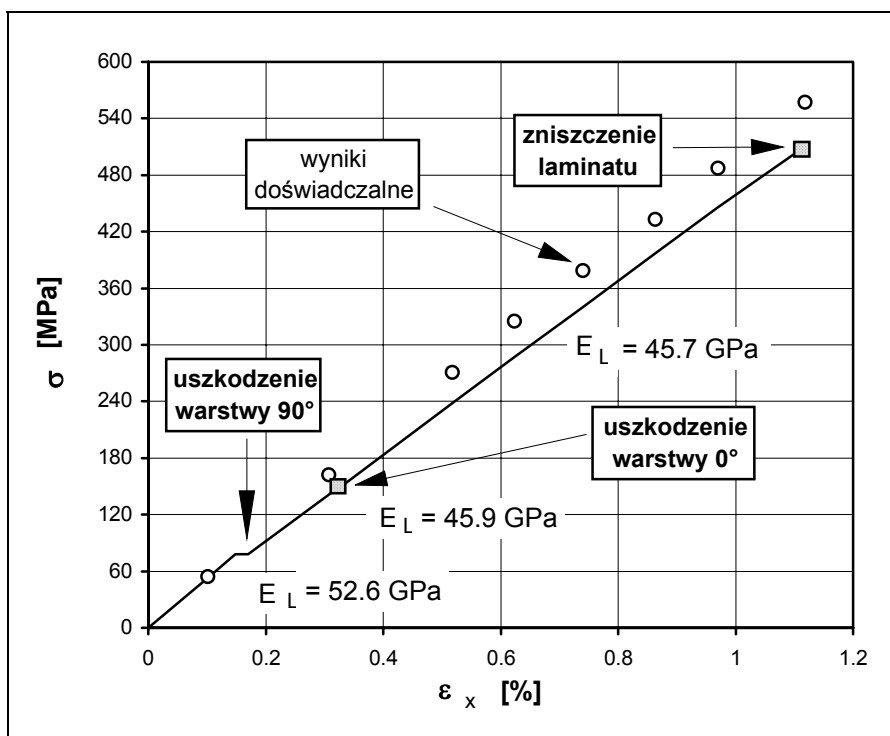
Kolejny odcinek odpowiada stanowi rozprężnionemu laminatu. Wskutek tego, że pierwszy element macierzy podatności (43) zmienia się w stosunku do stanu poprzedniego znikomo mało, moduł sprężystości praktycznie pozostaje na niezmiennym poziomie ($E_L=45.7$ GPa), a tym samym nie zmienia się również nachylenie trzeciego odcinka. Z (47) wynika ponadto, że wskutek zmiany sztywności, naprężeniu $\sigma_x=150.8$ MPa odpowiada w stanie rozprężnionym odkształcenie $\varepsilon_x=330.2 \times 10^{-5}$, a więc nieznacznie większe niż odkształcenie przy tym samym obciążeniu, ale w stanie poprzedzającym "rozprężnienie". Pojawia się w związku z tym drugie kolano odpowiadające uszkodzeniu drugiej warstwy. Końcowy punkt na wykresie oznaczający maksymalne obciążenie, jakie może przenieść laminat wyznaczają współrzędne $\sigma_x=510.3$ MPa, $\varepsilon_x=1117.6 \times 10^{-5}$ (rów. (50), (51)).

Na wykresie pokazano także wyniki badań doświadczalnych uzyskane przez autora. Widać, że teoretyczna analiza wytrzymałościowa daje wyniki zaniżone w stosunku do wartości pomierzonych, szczególnie przy dużych odkształceniach liniowych laminatu. Nie są to jednak jakiegoś zasadnicze różnice. W badaniach nie stwierdzono występowania "kolana", które jest wyłącznie skutkiem słabości istniejącej procedury teoretycznej, a nie efektem realnie istniejącym. Gdyby drugi odcinek wykresu połączyć z pierwszym z pominięciem "kolana", to zgodność wyników istotnie poprawiłaby się. Ważnym rezultatem jakościowym analizy teoretycznej, znajdującym potwierdzenie doświadczalne, jest efekt zmiany wartości podłużnego modułu sprężystości. Patrząc na wykres teoretyczny widać, że w przeważającym zakresie obciążeń moduł ten jest o ok. 12.5 procent mniejszy od modułu początkowego.

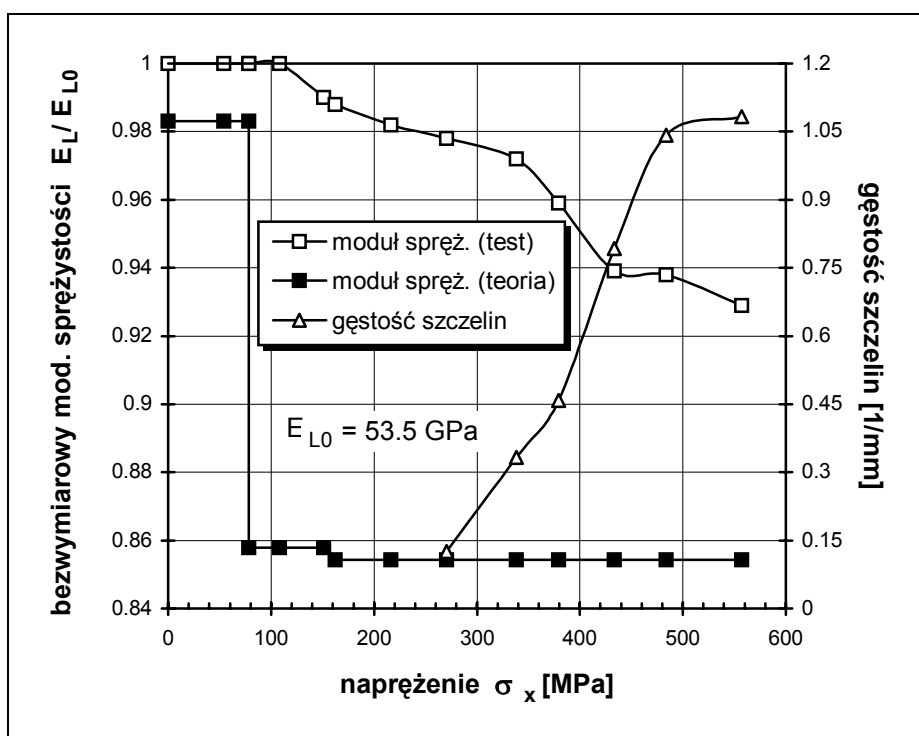
Właśnie ten ostatni jest wyznaczany w standardowej procedurze określania stałych inżynierskich dla laminatu. Należy zatem liczyć się z tym, że zachowanie konstrukcji laminatowych może odbiegać od prognozowanego w oparciu o obliczone - zgodnie z istniejącą procedurą - stałe inżynierskie, szczególnie przy większych obciążeniach. Rzeczywisty obraz zmiany modułu sprężystości różni się nieco od teoretycznego. Po pierwsze nie obserwuje się skokowej jego zmiany, ale zmianę ciągłą. Po drugie zmierzone zmniejszenie modułu wynosiło ok. 7 procent, a więc było mniejsze niż to wynika z analizy teoretycznej. Zmianę modułu uzyskaną doświadczalnie, a także tę, jaka jest rezultatem analizy wytrzymałościowej metodą LPF z częściową degradacją warstw i przy wykorzystaniu kryterium A-T-H, przedstawiono na rys. 8. Na rysunku tym pokazano także, jak zmienia się ilość pęknięć matrycy warstwy 90° przy wzrastającym obciążeniu. Wpływ tych pęknięć na zmiany charakterystyk sztywnościowych kompozytu (w tym przypadku modułu sprężystości) jest jednym z aktualnych problemów naukowych mechaniki kompozytów.

Występowanie różnic między wynikami analizy teoretycznej i wynikami doświadczalnymi nie może zaskakiwać, jeśli weźmie się pod uwagę wszystkie uproszczenia stosowane w opisie teoretycznym, a także pewną dowolność tego opisu. Należy pamiętać, że wszystkie stosowane kryteria wytrzymałościowe mają jedynie przybliżony charakter. Nie uwzględniają one występujących wzajemnych oddziaływań warstw na siebie - pomijany jest więc tzw. efekt więzów sąsiednich warstw. Analiza wytrzymałościowa laminatu nie bierze pod uwagę innego

ważnego efektu, a mianowicie tzw. delaminacji warstw, czyli ich rozłączania się. W pewnym sensie jest to efekt przeciwny do procesu laminacji warstw, stąd jego nazwa. Kolejnym przybliżeniem jest sposób eliminacji warstwy uszkodzonej, polegający na zerowaniu jej sztywności. Jest to równoznaczne z odebraniem warstwie możliwości przenoszenia jakiegokolwiek obciążenia, podczas gdy w rzeczywistości, nawet w stanie uszkodzonym, może ona je przejmować. W chwili obecnej nie ma jednak innej procedury od tej pokazanej w przykładzie, mimo wszystkich jej oczywistych niedoskonałości.



Rys. 7. Teoretyczna zależność naprężeń od odkształceń dla rozciąganego laminatu $[0,90_2]_s$ w oparciu o metodę częściowej degradacji sztywności i kryterium Azzi-Tsai'a-Hilla.



Rys. 8. Bezwymiarowy podłużny moduł sprężystości i gęstość szczelin wewnątrzwarstwowych w warstwie 90° w funkcji naprężenia dla laminatu $[0/90_2]_s$.

WYBRANE POZYCJE LITERATURY

Podręczniki i monografie

- [1] Carlsson, L. A., Gillespie, J. W., (eds.), *Delaware Composites Design Encyclopedia*, Vol.1-6, Technomic Publishing Company, Lancaster, PA, 1989-1991.
- [2] Christensen, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.
- [3] Dato, M. H., *Mechanics of Fibrous Composites*, Elsevier, 1991.
- [4] German, J., *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, 1996.
- [5] Hull, D., *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge University Press, 1981.
- [6] Hult, J., Bjarnehed, H., *Styvhet och Styrka*, Studentlitteratur, Lund, 1993.
- [7] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Mc Grow-Hill, New York, 1975.
- [8] Tsai, S. W., *Composite Design*, 3 ed. Think Composites, Dayton, OH, 1987.
- [9] Tsai, S. W., Hahn, T., *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Company, Lancaster, PA, 1980.
- [10] Vinson, J. R., Chou, Tsu-Wei, *Composite Materials and their Use in Structures*, Applied Science Publishers, London, 1990.
- [11] Vinson, J. R., Sierakowski, R. L., *The Behaviour of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhof Publishers, Dordrecht, 1986.

Artykuły, materiały konferencyjne i in.

- [12] Azzi, V. D., Tsai, S. W., *Anisotropic Strength of Composites*, Experimental Mechanics, Vol. 5, 1965.
- [13] François, D., Gołaski, L., (eds.), *Joint Seminary on Failure of Advanced Materials*, Paris - Kielce, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 1996
- [14] German J., *Analiza doświadczalna pęknięcia laminatów wykonanych z taśmy "prepreg" Vicotex NCHR 174B (carbon/epoxy)*, Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Mechanika 56, Kielce, 1995.
- [15] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London, 1950.
- [16] Hult, J., Rammerstorfer, F. G., (eds.), *Engineering Mechanics of Fibre Reinforced Polymers and Composite Structures*, Springer-Verlag, Wien - New York, 1994.
- [17] Sendeckyj, G. P., *A Brief Survey of Empirical Multiaxial Strength Criteria for Composites*, in: *Composite Materials: Testing and Design*, ASTM STP 497, 1972.
- [18] Tsai, S. W., *Structural Behavior of Composite Materials*, NASA CR-71, July, 1964
- [19] Tsai S. W., Pagano, N. J., *Invariant Properties of Composite Materials*, in: *Composite Materials Workshop*, Technomic Publishing Company, Westport, Conn., 1968.
- [20] Tsai, S. W., Wu, E. M., *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*, J. Composite Materials, Vol. 5, January, 1971.

DODATEK - podstawowe równania mechaniki kompozytów laminatowych

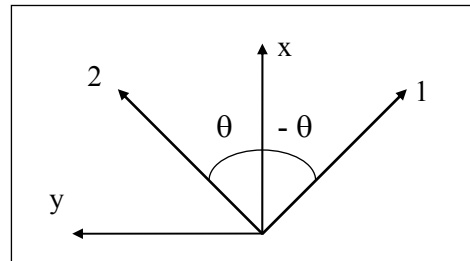
- **Macierz sztywności warstwy**

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} mE_1 & m\nu_{12}E_2 & 0 \\ m\nu_{12}E_2 & mE_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}; \quad m = (1 - \nu_{12}\nu_{21})^{-1}; \quad \nu_{21} = (E_2\nu_{12})/E_1 \quad (\text{D1})$$

- **Transformowana macierz sztywności warstwy**

$$\begin{aligned} U_1 &= 1/8 (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ U_2 &= 1/2 (Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 &= 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 &= 1/8 (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_5 &= 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

	1	U_2	U_3
\bar{Q}_{11}	U_1	$\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
\bar{Q}_{22}	U_1	$-\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
\bar{Q}_{12}	U_4	-	$-\cos 4\theta$
\bar{Q}_{66}	U_5	-	$-\cos 4\theta$
\bar{Q}_{16}	-	$\sin 2\theta$	$\sin 4\theta$
\bar{Q}_{26}	-	$\sin 2\theta$	$-\sin 4\theta$



np. $\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$

- **Unormowana macierz sztywności tarczowej laminatu**

$$[\mathbf{A}]/t = \sum_{k=1}^N [\bar{\mathbf{Q}}]_k \nu_k \quad (\text{D3a})$$

- **Unormowana macierz sztywności tarczowej laminatu** (dla laminatu, w którym wszystkie warstwy mają tę samą macierz sztywności)

$$\begin{aligned} V_1^* &= \sum_{k=1}^N \nu_k \cos 2\theta_k & V_2^* &= \sum_{k=1}^N \nu_k \cos 4\theta_k & \nu_k &= V_k/V = t_k/t \\ V_3^* &= \sum_{k=1}^N \nu_k \sin 2\theta_k & V_4^* &= \sum_{k=1}^N \nu_k \sin 4\theta_k \end{aligned} \quad (\text{D3b})$$

	1	U_2	U_3
A_{11}/t	U_1	V_1^*	V_2^*
A_{22}/t	U_1	$-V_1^*$	V_2^*
A_{12}/t	U_4	0	$-V_2^*$
A_{66}/t	U_5	0	$-V_2^*$
A_{16}/t	0	$1/2 V_3^*$	V_4^*
A_{26}/t	0	$1/2 V_3^*$	$-V_4^*$

- **Wypadkowe siły termiczne**

$$\{\mathbf{N}^T\} = \Delta T \sum_{k=1}^N [\bar{\mathbf{Q}}]_k \{\boldsymbol{\alpha}\}_k t_k$$

) (D4)

- **Napężenia warstwowe dla laminatu symetrycznego w stanie tarczowym**

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_k = [\bar{\mathbf{Q}}]_k [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{N}\} + [\bar{\mathbf{Q}}]_k \{[\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{N}^T\} - \{\boldsymbol{\alpha}\}_k \Delta T\}$$

) (D5)

- **Odształcenia laminatu symetrycznego w stanie tarczowym**

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{A}]^{-1} (\{\mathbf{N}\} + \{\mathbf{N}^T\})$$

) (D6)